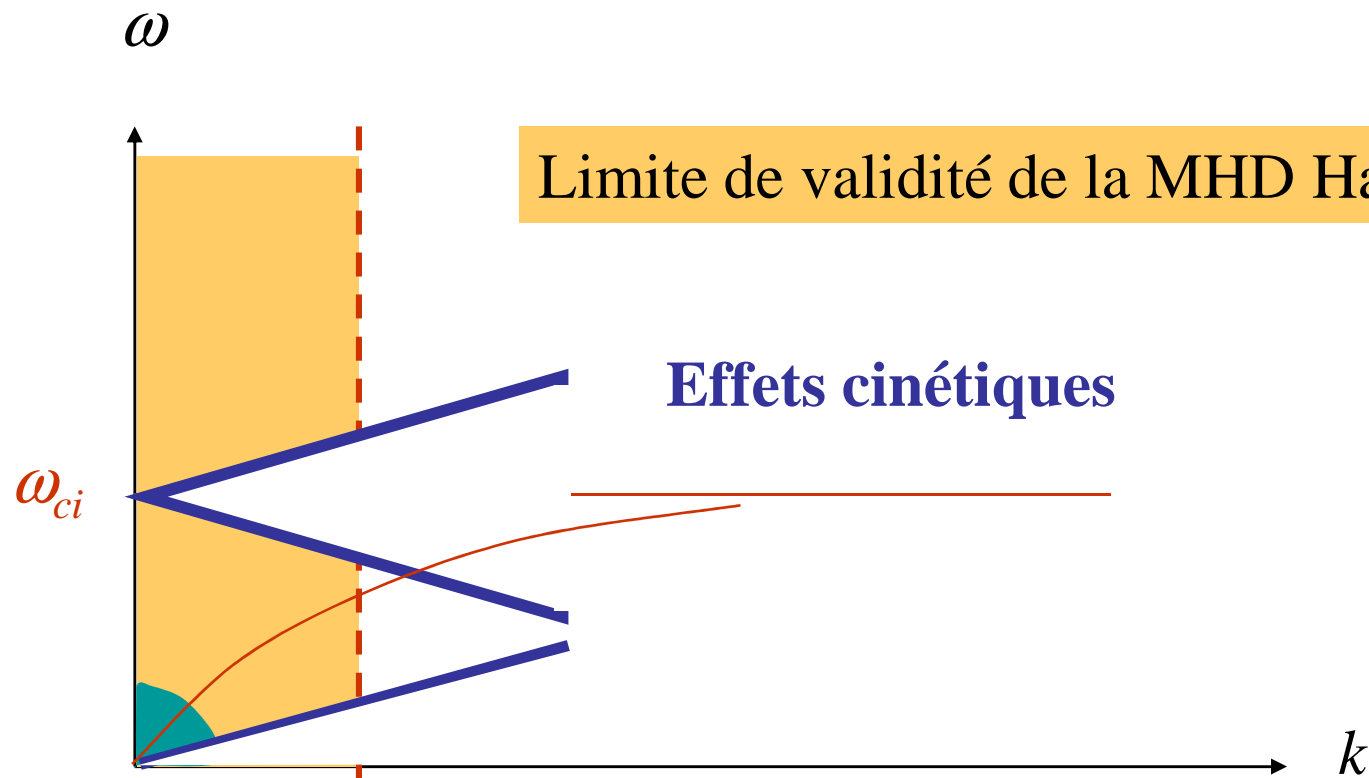


Plasmas chauds magnétisés : approche cinétique

Solutions ONDES des équations de la MHD



Limite de validité de la MHD Hall

Effets cinétiques

ω_{ci}

k

Limite de validité
de la MHD idéale

Effets de rayon de Larmor fini

Equation de Vlasov pour une population de particules

$$\partial_t (f) + \mathbf{v} \cdot \nabla_x (f) + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v (f) = 0$$

Linéarisation

$$\partial_t (f_1) + \mathbf{v} \cdot \nabla_x (f_1) + \frac{q}{m} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla_v (f_1) = -\frac{q}{m} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1) \cdot \nabla_v (f_0)$$

Pour une distribution isotrope à l'ordre 0

$$\frac{df_1}{dt} = -\frac{q}{m} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_v (f_0) \quad \text{le long de la trajectoire d'une particule}$$

Intégration de l'équation de Vlasov

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -\frac{q}{m} \int_{-\infty}^t \mathbf{E}_1(\mathbf{r}', t') \cdot \nabla_{\mathbf{v}'}(f_0) dt'$$

Prise en compte de la trajectoire non perturbée des particules

$$v'_z = v_{//}$$

$$z' = z + v_{//}(t'-t)$$

$$v'_x = v_{\perp} \cos(\omega_c(t'-t) + \varphi)$$

$$x' = x + \frac{v_{\perp}}{\omega_c} (\sin(\omega_c(t'-t) + \varphi) - \sin \varphi)$$

Transformation de Fourier

$$\tilde{f}_1 e^{i(-\omega t + k_x x + k_z z)} = -\frac{q}{m} \int_{-\infty}^t \tilde{\mathbf{E}}_1 e^{i(-\omega t' + k_x x' + k_z z')} \cdot \nabla_{v'}(f_0) dt'$$

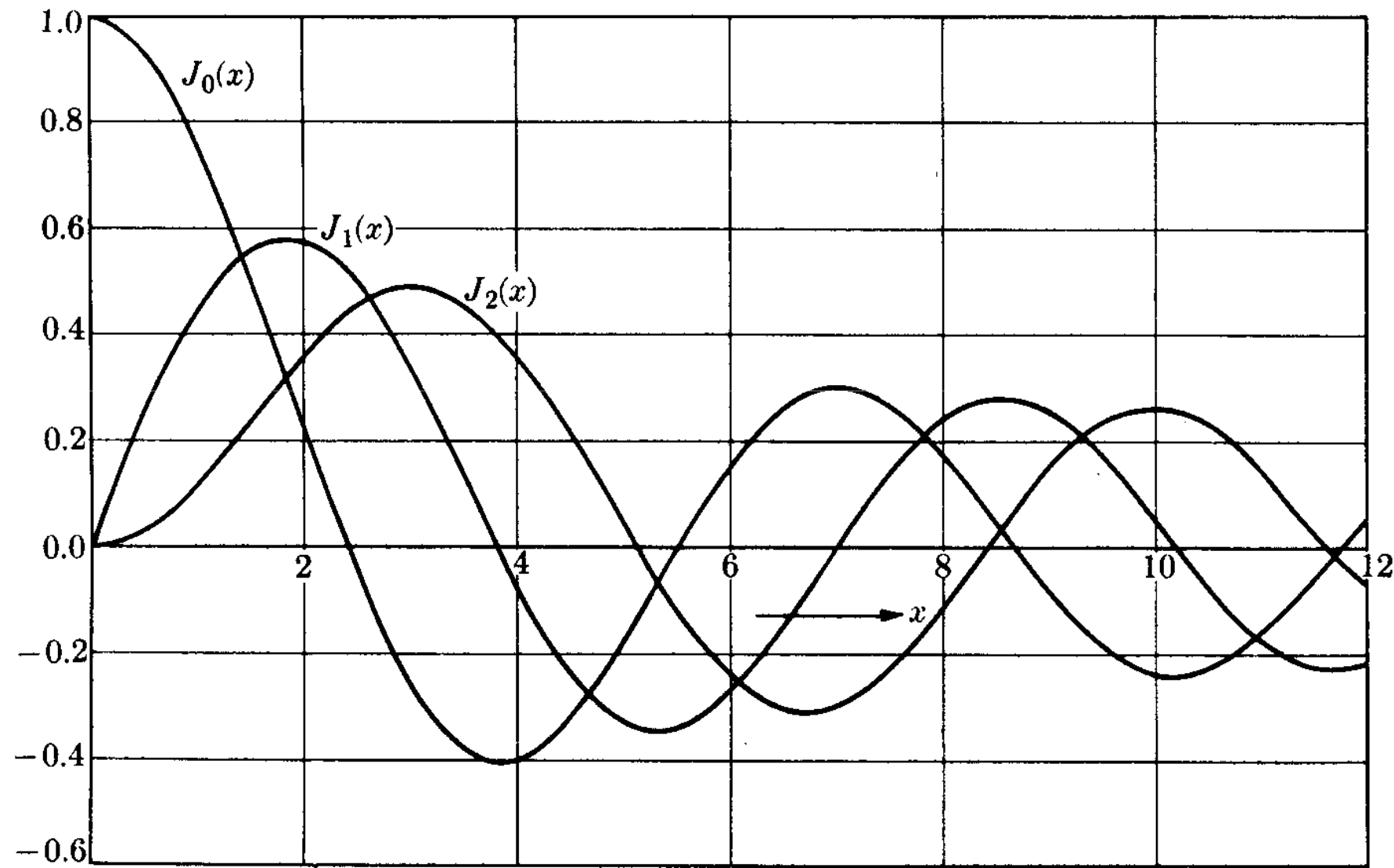
$$\tilde{f}_1 = -\frac{q}{m} \int_{-\infty}^t \tilde{\mathbf{E}}_1 e^{i(-\omega(t'-t) + k_x(x'-x) + k_z(z'-z))} \cdot \nabla_{v'}(f_0) dt'$$

$$\tilde{f}_1 = -\frac{q}{m} \int_{-\infty}^0 \tilde{\mathbf{E}}_1 e^{i\left(-\omega\tau + \frac{k_x v_{\perp}}{\omega_c} (\sin(\omega_c \tau + \varphi) - \sin \varphi) + k_z v_{\parallel} \tau\right)} \cdot \nabla_{v'}(f_0) d\tau$$

$$e^{i\gamma \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\gamma) e^{in\theta}$$

$$e^{-i\gamma \sin \varphi} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(\gamma) e^{-im\varphi}$$

Fonctions de Bessel



Fonction de distribution à l'ordre 1 :

$$\tilde{f}_1 = -\frac{q}{m} \int \sum_{-\infty}^0 \sum_{n,m} J_n \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} \right) J_m \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} \right) e^{i(-\omega\tau + k_z v_{//}\tau + n\omega_c\tau + (n-m)\varphi)} \tilde{\mathbf{E}}_1 \cdot \nabla_{v'}(f_0) d\tau$$

$$\nabla_{v'}(f_0) = 2\mathbf{v}'_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v'^2_{\perp}} + 2\mathbf{v}'_z \frac{\partial f_0}{\partial v'^2_{//}}$$

$$\mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{v'}(f_0) = 2\mathbf{E}_{1\perp} \cdot \mathbf{v}'_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v'^2_{\perp}} + 2E_{1z} v'_z \frac{\partial f_0}{\partial v'^2_{//}}$$

Remplacer les composantes de la vitesse par des fonctions de τ
pour pouvoir intégrer sur τ

Connaissant \tilde{f}_1 pour chaque espèce de particules on peut calculer

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{e,i} q \int \mathbf{v} \tilde{f}_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 \mathbf{v}$$



$$\overset{=}{\sigma}(\mathbf{k}, \omega)$$



$$\overset{=}{\varepsilon}(\mathbf{k}, \omega)$$

Etapes de l'intégration

$$\sum_{n,m} J_n \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} \right) J_m \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} \right) e^{i(-\omega\tau + k_z v_{\parallel}\tau + n\omega_c\tau + (n-m)\phi)}$$

$$d\mathbf{v} = d\phi v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}$$

Intégration sur ϕ : $n = m$

$$\text{Intégration sur } \tau : \int e^{i\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{i\alpha} e^{i\alpha\tau}$$

$$\text{Dénominateur en } \frac{1}{k_{\parallel} v_{\parallel} + n\omega_c - \omega}$$

Fonctions de distribution maxwelliennes à l'ordre 0

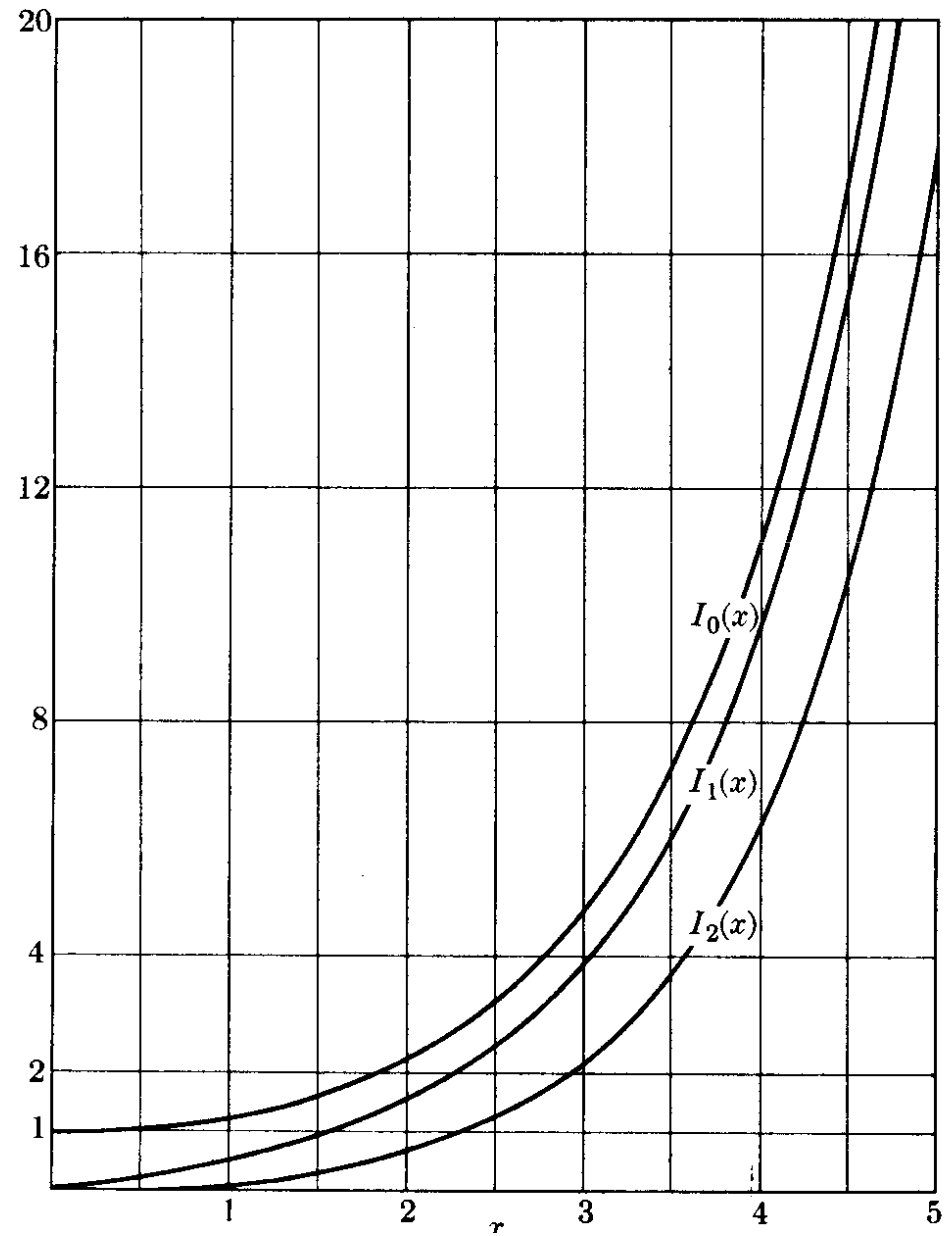
$$F_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k_B T_{//}} \right)^{1/2} \left(\frac{m}{2\pi k_B T_{\perp}} \right) \exp \left[- \left(\frac{mv_{//}^2}{2k_B T_{//}} + \frac{mv_{\perp}^2}{2k_B T_{\perp}} \right) \right]$$

$$\frac{\exp \left[- \frac{mv_{//}^2}{2k_B T_{//}} \right]}{k_{//} v_{//} + n\omega_c - \omega} \propto \frac{\exp[-z^2]}{z - (\omega - n\omega_c) / \sqrt{2k_{//} V_{th//}}} \propto \int \frac{\exp[-z^2]}{z - \zeta} dv_{//}$$

$$Z(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-z^2)}{z - \zeta} dz$$

Fonction de Fried et Conte

Fonctions de Bessel I_n



Modes de Bernstein

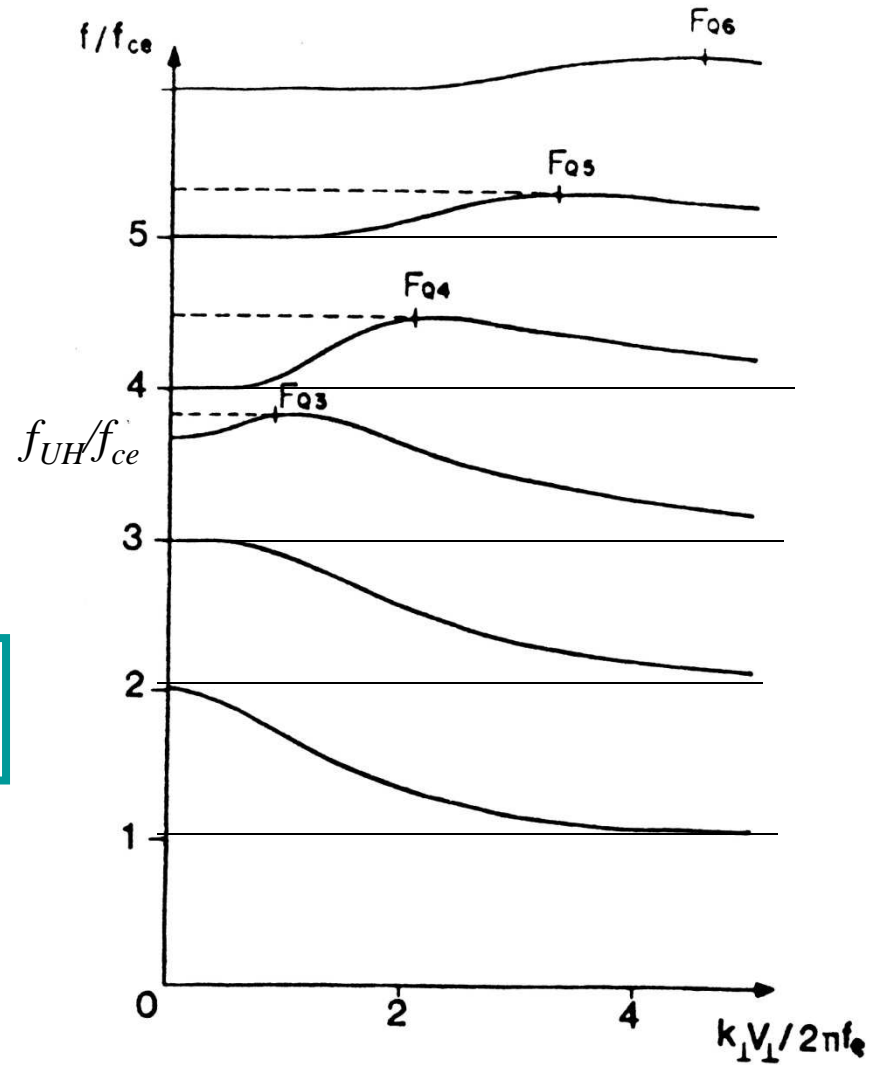
Modes de Bernstein

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{2l^2 I_l(\eta)}{\eta(\nu^2 - l^2)} \exp(-\eta) = 0$$

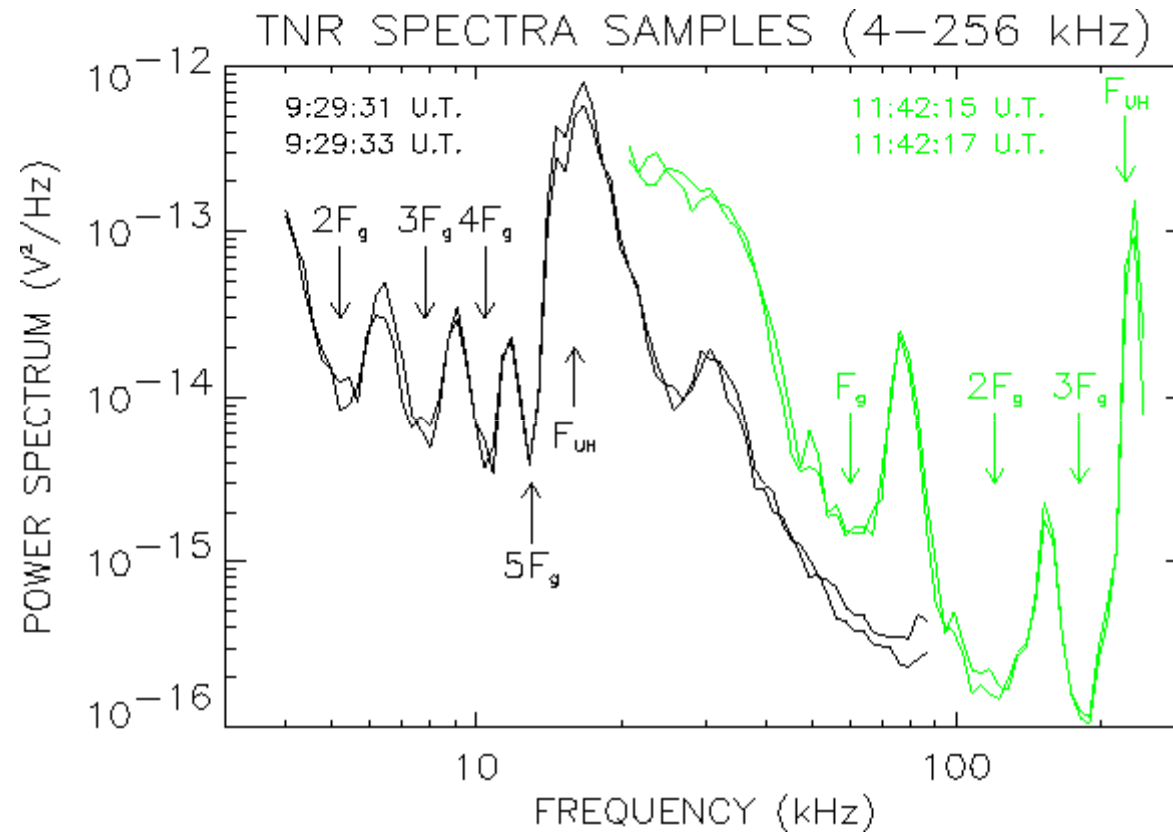
$$\nu = \frac{\omega}{\omega_c} \quad \eta = \frac{k_{\perp}^2 v_T^2}{2\omega_c^2}$$

I_l fonctions de Bessel modifiées

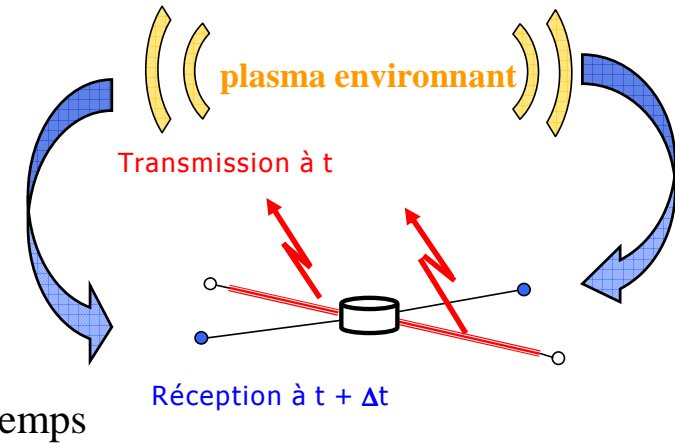
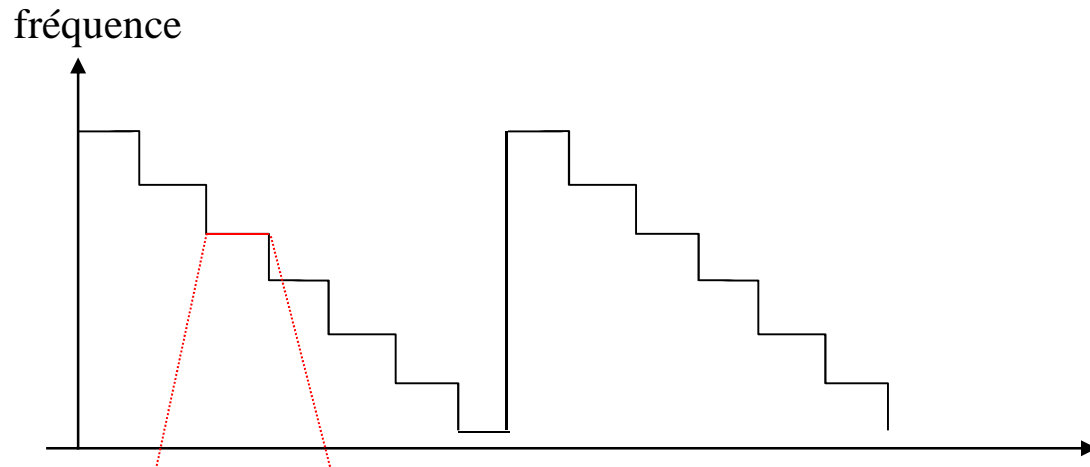
Coupures et résonances pour $\omega = l\omega_c$
Sauf pour $l = 1$



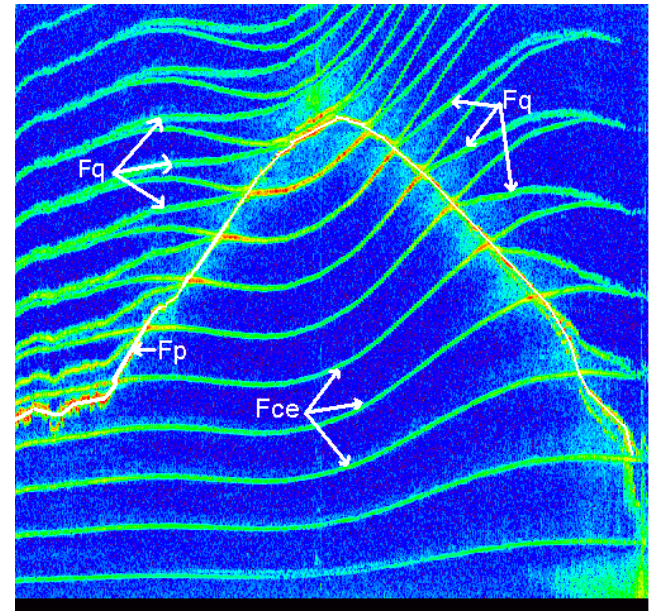
Observations de Wind dans la plasmasphère



Spectrogramme de Cluster dans la plasmasphère: Sondage actif du plasma par WHISPER



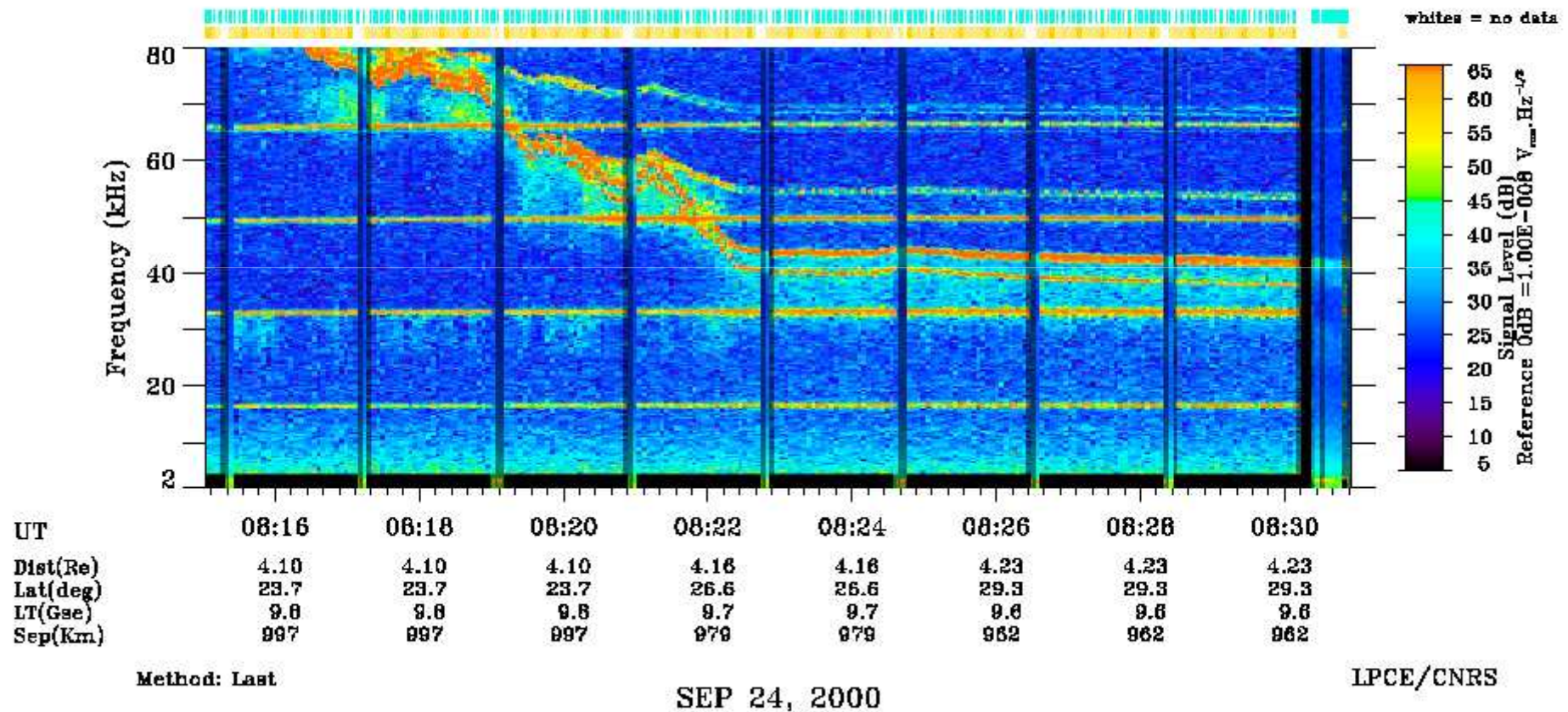
réception
émission



Fp : Fréquence plasma
Fce : Gyrofréquences électroniques
Fq : Modes de Bernstein

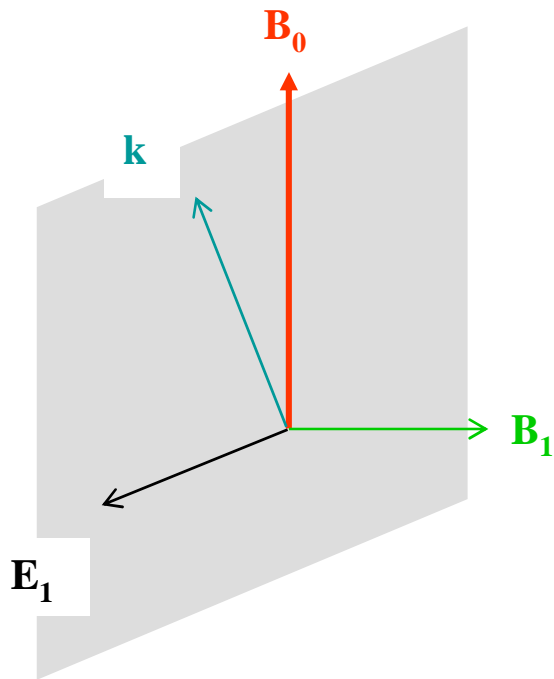
CLUSTER SALSA ORBIT 39
WHISPER-2 ELECTRIC FIELD SPECTROGRAM

Le champ est constant, la densité varie, les f_Q varient pas les harmoniques de f_{ce}



Effets de rayon de Larmor fini sur l'onde d'Alfven

Prise en compte des propriétés de l'onde d'Alfven



$$\mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{v'}(f_0) = 2\mathbf{E}_{1\perp} \cdot \mathbf{v}'_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v'_{\perp}{}^2} + 2E_{1z} v'_z \frac{\partial f_0}{\partial v'_{\parallel}{}^2}$$

$$\mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{v'}(f_0) = -2ik_x \tilde{\Phi} v'_x \frac{\partial f_0}{\partial v'_{\perp}{}^2} - 2ik_z v'_z \tilde{\Psi} \frac{\partial f_0}{\partial v'_{\parallel}{}^2}$$

$$\mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{v'}(f_0) = -2ik_x \tilde{\Phi} v_{\perp} \cos(\omega_c(t'-t) + \varphi) \frac{\partial f_0}{\partial v'_{\perp}{}^2} - 2ik_z v_{\parallel} \tilde{\Psi} \frac{\partial f_0}{\partial v'_{\parallel}{}^2}$$

Expression finale de \mathbf{f}_1

$$\tilde{f}_1 = 2 \frac{q}{m} \sum_{n,m} J_n \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} \right) J_m \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} \right) \frac{e^{i(n-m)\varphi}}{n\omega_c - \omega + k_z v_{\parallel}} \left[n\omega_c \tilde{\Phi} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}^2} + k_z v_{\parallel} \tilde{\Psi} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}^2} \right]$$

$$n_e = \int \tilde{f}_e dv_{\parallel} dv_{\perp}^2$$

$$n_i = \int \tilde{f}_i dv_{\parallel} dv_{\perp}^2$$

$$\mathbf{J}_e(\mathbf{r}, t) = - \sum_{e,i} e \int \mathbf{v} \tilde{f}_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 \mathbf{v}$$

$$\mathbf{J}_i(\mathbf{r}, t) = \sum_{e,i} e \int \mathbf{v} \tilde{f}_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 \mathbf{v}$$

Calcul des perturbations de densité et de courant

Effets de rayon de Larmor fini pour les ions :

$$k_{\perp} \rho_i \leq 1$$



$$k_{\perp} \rho_e \ll 1$$

Perturbation de densité électronique

$$k_{\perp} \rho_e \approx 0 \quad J_n(0) = 0 \quad J_0(0) = 1$$

$$n_e = -2 \frac{e}{m} \tilde{\Psi} \int \frac{k_z v_{\parallel}}{-\omega + k_z v_{\parallel}} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}^2} dv_{\parallel} dv_{\perp}^2$$

f_0 maxwellienne

$$n_e = \frac{\epsilon_0 \omega_{pe}}{e V_{the}} 2 \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{V_A}{V_{the}} \right) \tilde{\Psi} \quad \text{Amortissement Landau}$$

Etablissement de la relation de dispersion

en négligeant l'amortissement Landau

$$\left(I_0(\lambda_i) e^{-\lambda_i} - \frac{\omega^2}{k_z^2 V_S^2} \right) \left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 V_A^2} \frac{1}{\lambda_i} (1 - I_0(\lambda_i) e^{-\lambda_i}) \right) = \frac{\omega^2}{k_z^2 V_{thi}^2} (1 - I_0(\lambda_i) e^{-\lambda_i})$$

**Relation de dispersion de
l'onde d'Alfven cinétique**

$$\omega^2 = k_z^2 V_A^2 \left(1 + k_{\perp}^2 \rho_i^2 \left(\frac{3}{4} + \frac{T_e}{T_i} \right) \right)$$

Equations fluides

$$\overline{\overline{\mathbf{p}}} = \int m(\mathbf{w} - \mathbf{v})(\mathbf{w} - \mathbf{v}) f(\mathbf{w}) d^3\mathbf{w}$$

$$\overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}} = \int m(\mathbf{w} - \mathbf{v})(\mathbf{w} - \mathbf{v})(\mathbf{w} - \mathbf{v}) f(\mathbf{w}) d^3\mathbf{w} \quad \text{Tenseur flux de chaleur d'ordre 3}$$

$$\partial_t(nm\mathbf{v}) + \nabla \cdot (nm\mathbf{v}\mathbf{v} + \overline{\overline{\mathbf{p}}}) - nq(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$$

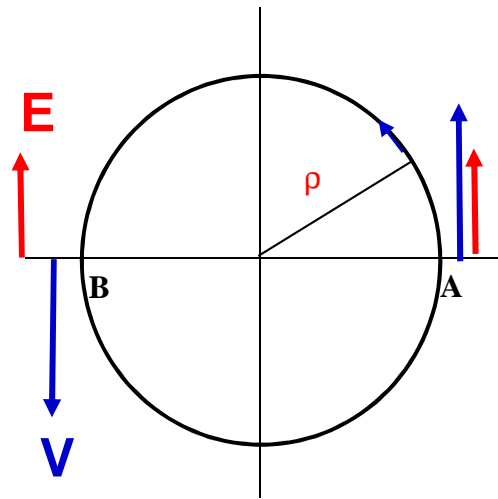
$$\partial_t(\overline{\overline{\mathbf{p}}}) + \nabla \cdot (\mathbf{v}\overline{\overline{\mathbf{p}}} + \overline{\overline{\overline{\mathbf{Q}}}}) + [\overline{\overline{\mathbf{p}}} \cdot \nabla(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\omega}_c \times \overline{\overline{\mathbf{p}}}] + [idem]^{transposé} = 0$$

Equations linéarisées

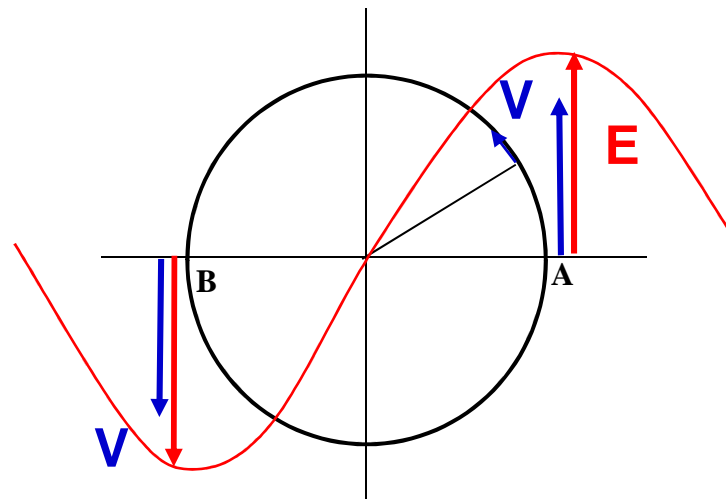
$$-i\omega n m \mathbf{v}_1 + i\mathbf{k} \cdot \bar{\bar{\mathbf{p}}}_1 - nq(\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) = 0$$

$$-i\omega \bar{\bar{\mathbf{p}}}_1 + ip\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 + [ip\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\omega}_c \times \bar{\bar{\mathbf{p}}}_1] + [idem]^{transposé} = 0$$

Résonance avec les ions



$$k_{\perp} = 0$$



$$k_{\perp} = \pi/2\rho_i$$