Transformées de Laplace des fonctions et des distributions

Cours et exercices

Université de Paris-Sud - 2008 - jean-luc.raimbault@lpp.polytechnique.fr

Chapitre 1

Transformation de Laplace au sens des fonctions

1.1 Introduction

La transformée de Laplace appartient à la famille très vaste des transformées intégrales, qui établissent une relation entre une fonction f et sa transformée F sous la forme :

$$F(\omega) = \int_I K(\omega, t)\, f(t)\, dt$$

Une transformée particulière nécessite donc la définition du noyau $K(\omega, t)$ et de l'intervalle d'intégration I. Les transformations les plus utilisées sont celles de Fourier, pour laquelle on a :

$$I = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad K(\omega, t) = \mathrm{e}^{-i\omega t}, \quad \omega \in \mathbb{R} \quad \text{(Fourier)},$$

et celles de Laplace, pour laquelle on a :

$$I = \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad K(\omega, t) = \mathrm{e}^{-\omega t}, \quad \omega = \omega_r + i\,\omega_i \in \mathbb{C} \quad \text{(Laplace)}.$$

Puisque ω est complexe, la tranformation de Laplace peut être vue comme une généralisation de la transformation de Fourier, restreinte aux fonctions définies sur

$\mathbb{R}^+$. La restriction à $\mathbb{R}^+$ n'est guère contreignante dans les applications réalistes où $f(t)$ représente un signal physique à l'instant t qui ne peut exister de toute éternité. Il est en effet toujours possible de choisir l'instant où on démarre les mesures comme l'origine des temps. De ce point de vue, l'analyse de Fourier est plus adaptée à l'étude des régimes forcés, tandis que l'analyse de Laplace convient davantage pour l'étude des régimes transitoires.

En revanche, il est extrêmement bénéfique de passer de la variable réelle à la variable complexe qui rajoute le facteur de convergence $\mathrm{e}^{-\omega_r t}$ dans l'intégrale, au moins dans une partie du plan complexe. Il en résulte qu'un grand nombre de fonctions admettent une transformée de Laplace, ce qui n'est pas le cas des transformées de Fourier.

Pour peu qu'ils soient linéaires, la transformée de Laplace est un outil très simple d'emploi pour résoudre les problèmes d'évolution (équations différentielles ou aux dérivées partielles, équations aux différences ou intégrales ...). Le principe général d'action de la transformée de Laplace sur les opérateurs d'évolution consiste en une réduction de l'ordre des opérateurs. Par transformée de Laplace, les équations différentielles deviennent des équations algébriques, tandis que les équations aux dérivées partielles se transforment en des équations différentielles. Il en résulte une simplification efficace des problèmes qui permet souvent leur résolution analytique.

1.2 Définition de la transformée de Laplace

Définition 1.2.1 *Soit f une fonction de la variable réelle, la transformée de Laplace de f, lorsqu'elle existe, est la fonction F de la variable complexe z définie par l'intégrale :*

$$F(z) \equiv \int_{\mathbb{R}^+} f(t)\,\mathrm{e}^{-zt}\,dt$$

Remarques

1. On appelle f, *l'originale* et sa transformée F, *l'image*.
2. Les notations utilisées pour les transformées de Laplace sont très variées et dépendent du domaine d'application. Afin de souligner sa nature d'élément de $\mathbb{C}$, nous avons noté la variable indépendante par z. Les lettres p et s sont également utilisées.
3. On remarquera que les valeurs de f pout $t < 0$ n'interviennent pas dans la définition. Une fonction f est dite *causale* si $f(t) = 0$ pour $t < 0$. On peut toujours rendre une fonction causale en la multipliant par la fonction de

Heaviside H, ce que nous ferons couramment dans la suite.

La transformée de Laplace d'une fonction n'existe en général que dans une partie du plan complexe. Pozons $z = x + iy$, l'existence de $F(z)$ impose que :

$$t \mapsto |f(t)\,\mathrm{e}^{-zt}| = |f(t)|\,\mathrm{e}^{-xt} \in L^1(\mathbb{R}^+)$$

Introduisons d'abord la notion d'abcisse de sommabilité.

Définition 1.2.2 *Le nombre réel :*

$$x_0 \equiv \inf\{x \in \mathbb{R} \,|\, t \mapsto f(t)\, e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R}^+)\}$$

est appelé l'abcisse de sommabilité de f.

On peut maintenant donner le théorème d'existence suivant :

Théorème 1.2.1 *Si f est une fonction d'abcisse de sommabilité x_0, alors, la transformée de Laplace F existe dans le demi-plan ouvert $\Re z > x_0$.*

En effet, posons $z = x + iy$,

$$|F(z)| \leq \int_{\mathbb{R}^+} |f(t)|\,\mathrm{e}^{-xt}\,dt < \int_{\mathbb{R}^+} |f(t)|\,\mathrm{e}^{-x_0 t}\,dt < +\infty,$$

pour $\Re z = x > x_0$.

En conséquence, F est bornée pour $\Re z > x_0$.

◇ Exemples

1. *Fonction de Heaviside H.*
   L'abcisse de sommabilité est $x_0 = 0$, puisque $t \mapsto H(t)\mathrm{e}^{-xt} \in L^1(\mathbb{R}^+)$ pour $x > 0$.
   Le calcul de la transformée est immédiat :

$$f(t) = H(t) \quad \xrightarrow{F} \quad F(z) = \int_{\mathbb{R}^+} \mathrm{e}^{-zt}\,dt = \frac{1}{z} \quad \text{pour} \quad \Re z > 0.$$

2. *Fonction puissance $t \mapsto t^n$.*
   Commençons par le cas linéaire : $t \mapsto t\mathrm{e}^{-xt} \in L^1(\mathbb{R}^+)$ pour $x > 0$. On effectue le calcul par parties :

$$f(t) = t \quad \xrightarrow{F} \quad F(z) = \int_{\mathbb{R}^+} t\,\mathrm{e}^{-zt}\,dt = \frac{1}{z}\int_{\mathbb{R}^+} 1\,\mathrm{e}^{-zt}\,dt = \frac{1}{z^2} \quad \text{pour} \quad \Re z > 0.$$

   Puis, par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f(t) = t^n \quad \xrightarrow{F} \quad F(z) = \int_{\mathbb{R}^+} t^n\,\mathrm{e}^{-zt}\,dt = \frac{n}{z}\int_{\mathbb{R}^+} t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-zt}\,dt = \frac{n!}{z^{n+1}} \quad \text{pour} \quad \Re z > 0.$$

3. *Fonction exponentielle* $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$.

$$f(t) = \mathrm{e}^{at} \quad \xrightarrow{F} \quad F(z) = \int_{\mathbb{R}^+} \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{e}^{-zt}\,dt = \frac{1}{z-a} \quad \text{pour} \quad \Re z > \Re a.$$

4. *Fonction* $t \mapsto 1/\sqrt{t}$.
   $t^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-xt} \sim t^{-1/2}$ quand $t \to 0$ et $t^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-xt} \sim \mathrm{e}^{-xt}$ quand $t \to +\infty$, donc $F(z)$ converge pour $x = \Re z > 0$.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \xrightarrow{F} \quad F(z) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{-zt}\,dt = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-zu^2}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{z}} \quad \text{pour} \quad \Re z > 0,$$

   (la dernière égalité est obtenue en calculant le carré de l'intégrale). Pour le calcul de $z^{1/2}$, on choisira la détermination principale du logarithme de telle sorte qu'on obtienne le résultat usuel si z est réel.

1.3 Holomorphie

Commençons par préciser la relation entre la transformée de Fourier et la transformée de Laplace. Si x_0 est l'abcisse de sommabilité de f, la fonction $t \mapsto H(t)f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}$ est sommable sur $\mathbb{R}$ pour $x > x_0$. La transformée de Laplace de f peut alors s'écrire comme une transformée de Fourier. En effet, posons $z = x + i2\pi y$:

$$F(x + i2\pi y) = \int_{\mathbb{R}^+} f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{e}^{-i2\pi yt}\,dt = \int_{\mathbb{R}} \left[H(t)f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\right]\,\mathrm{e}^{-i2\pi yt}\,dt$$

soit encore :

$$F(x + i2\pi y) = \mathcal{F}\left[H(t)f(t)\mathrm{e}^{-xt}\right](y), \quad \text{pour} \quad x > x_0$$

où $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier.

Cette remarque facilitera certaines démonstrations.

Ainsi une transposition directe du résultat connu sur les transformées de Fourier conduit au résultat suivant, important dans la pratique, l'égalité des images par TL implique l'égalité des originaux :

$$F(z) = G(z) \quad \text{pour} \quad \Re z > x_0, \quad \Rightarrow \quad f(t) = g(t) \quad (p.p.),$$

où x_0 est la plus grande des 2 abcisses de sommabilité des fonctions f et g.

Concernant les propriétés d'holomorphie, on a le résultat suivant :

Théorème 1.3.1 *Soit f une fonction d'abcisse de sommabilité x_0 :*
- *L'abcisse de sommabilité de la fonction $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto (-t)^m f(t)$ est x_0.*
- *F est holomorphe dans le demi-plan $\Re z > x_0$, et*

$$\frac{dF^m(z)}{dz^m} = \int_{\mathbb{R}^+} (-t)^m f(t)\,\mathrm{e}^{-zt}\,dt$$

En effet, les 2 fonctions $t \mapsto f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}$ et $t \mapsto (-t)^m f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}$ ont le même comportement à l'infini, donc la même abcisse de sommabilité. Il faut justifier la dérivation sous le signe somme, ce qui résulte de l'inégalité :

$$|(-t)^m f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}| \leq t^m\,|f(t)|\,\mathrm{e}^{-x_0 t}$$

pour tout $z = x + iy$ tel que $x > x_0$. La fonction majorante étant intégrable, on peut permuter la dérivation et le signe intégral, d'où le résultat. $F'(z)$ est fini en tant que TL : on en déduit donc l'holomorphie de F.

◇ `Exemples`

1. $\frac{1}{(z+a)^2} = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z+a}\right) \quad \xleftarrow{F} \quad f(t) = t\,\mathrm{e}^{-at}$.
2. $\sin t \quad \xrightarrow{F} \quad = \frac{1}{z^2+1}$ donc, $t \sin t \quad \xrightarrow{F} \quad -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^2+1}\right) = \frac{2z}{(z^2+1)^2}$.

1.4 Propriétés de la transformée de Laplace

Outre la propriété de linéarité qui découle de la définition intégrale de la transformée de Laplace, les propriétés de translation, conjugaison et dilatation qui suivent sont obtenues par de simples changements de variables (le vérifier).

□ **Linéarité**

$$\lambda\, f(t) + \mu\, g(t) \quad \xrightarrow{F} \quad \lambda\, F + \mu\, Lg, \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

□ **Translation** [1]

$$H(t-t_0) f(t-t_0) \quad \xrightarrow{F} \quad \mathrm{e}^{-zt_0}\, F(z), \quad t_0 \in \mathbb{R}^+.$$
$$\mathrm{e}^{-at}\, f(t) \quad \xrightarrow{F} \quad F(z+a).$$

□ **Conjugaison**

$$\bar{f}(t) \quad \xrightarrow{F} \quad \overline{F}(\bar{z}).$$

1. Les propriétés associées à la translation des variables sont parfois appelées “ théorèmes du retard ”.

□ Dilatation

$$\lambda > 0, \quad f(\lambda t) \quad \xrightarrow{F} \quad \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{z}{\lambda}\right).$$

◇ Exemples

1. *Fonction* $t \mapsto t^n \, \mathrm{e}^{at}$.
   $\frac{t^n}{n!} \quad \xrightarrow{F} \quad \frac{1}{z^{n+1}}$, donc $\frac{t^n \, \mathrm{e}^{at}}{n!} \quad \xrightarrow{F} \quad \frac{1}{(z-a)^{n+1}}$, et pour finir $t^n \, \mathrm{e}^{at} \quad \xrightarrow{F} \quad \frac{n!}{(z-a)^{n+1}}$.
2. *Original de* $\frac{1}{z^2-2z+5}$.
   $\frac{1}{z^2-2z+5} = \frac{1}{(z-1)^2+4} \quad \xleftarrow{F} \quad \frac{\mathrm{e}^t \sin 2t}{2}$.
3. *Fonction* $t \mapsto e^{-at} \, \sin at$.
   $e^{-t} \, \sin t \quad \xrightarrow{F} \quad \frac{1}{(z+1)^2+1}$, donc $e^{-at} \, \sin at \quad \xrightarrow{F} \quad \frac{1}{a} \frac{1}{(z/a+1)^2+1} = \frac{a}{(z+a)^2+a^2}$

□ Dérivation

Une des applications importantes de la transformation de Laplace étant la résolution des équations différentielles, le théorème suivant est capital.

Théorème 1.4.1 *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, sauf éventuellement en $t = 0$ où $\lim_{t \to 0^+} f(t) \equiv f(0^+)$ existe. On suppose en outre que f' est une fonction continue par morceaux qui admet une transformée de Laplace, alors :*

$$f'(t) \quad \xrightarrow{F} \quad zF(z) - f(0^+),$$

La démonstration se fait par parties.

Ce résulat se généralise aisément (par récurrence) pour les dérivées d'ordres supérieurs :

$$f^{(n)}(t) \quad \xrightarrow{F} \quad z^n \, F(z) - z^{n-1} \, f(0^+) - z^{n-2} \, f\,'(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+).$$

L'apparente complication de la formule vient des sauts possibles à l'origine et de ses dérivées. On verra que ces termes sont pris automatiquement en compte dans le cadre des distributions.

Notons enfin que l'hypothèse de continuité pour les $(n-1)$ premières dérivées pour $t \neq 0$ est obligatoire pour une utilisation correcte de cette formule (cf. exercices).

◇ Exemple

Soit à résoudre l'équation différentielle

$$y''(t) + y(t) = \cos t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0\,.$$

La transformée de Laplace $Y(z)$ s'écrit

$$Y(z) = \frac{z}{z^2+1} + \frac{z}{(z^2+1)^2} \quad \Rightarrow \quad y(t) = H(t)\left(\cos t + \frac{t}{2}\sin t\right).$$

□ Intégration

Ainsi, prendre la TL d'une dérivée revient essentiellement à multiplier par z. On ne sera pas surpris du résultat réciproque : une division par z correspond à une intégration de la fonction.

Théorème 1.4.2 *Soit $\int_0^t f(t')dt'$ la primitive de f qui s'annule en 0, alors*

$$\int_0^t f(t')dt' \quad \xrightarrow{F} \quad \frac{F(z)}{z},$$

Posons $g(t) \equiv \int_0^t f(t')dt'$. On a manifestement $g'(t) = f(t)$ et $g(0) = 0$. On a donc à la fois $f(t) \xrightarrow{F} F(z)$ et $g'(t) \xrightarrow{F} zG(z)$ par application du théorème précédent. L'identification de ces 2 résultats conduit au théorème $g(t) \xrightarrow{F} G(z) = F(z)/z$.

◇ Exemple

Original de $\frac{1}{z\sqrt{z}}$

$\frac{1}{z\sqrt{z}} = \frac{1/\sqrt{z}}{z} \xleftarrow{F} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi t'}}\,dt' = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$

□ Convolution

Venons en maintenant au propriétés liées au produit de convolution.

On rappelle que le produit de convolution $f \star g$ de 2 fonctions intégrables f et g est défini par la relation :

$$(f \star g)(t) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(t')g(t-t')\,dt'$$

Supposons maintenant que f et g soient des fonctions causales. On a donc $f(t') = 0$ pout $t' < 0$ et $g(t-t') = 0$ pour $t' > t$. Le domaine d'intégration est donc restreint à l'intervalle $[0,t]$ dans le cas de fonctions causales :

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(t')\,g(t-t')\,dt' \quad \text{(f et g causales)}.$$

On remarquera que $f \star g$ est elle-même causale, puisque $f(t') = 0$ pour $t' < 0$.

Le théorème central est le suivant.

Théorème 1.4.3 *Soient f et g 2 fonctions causales qui admettent des TL, alors*

$$(f \star g)(t) \quad \xrightarrow{F} \quad F(z).G(z) \quad \textit{pour} \quad \Re z > x_0,$$

où x_0 est la plus grande des 2 abcisses de sommabilités de f et g.

C'est une conséquence du théorème de Fubini.

◇ `Exemples`

1. *Calcul de $H(t)t \star H(t)t^2$.*
   $t \star t^2 \quad \xrightarrow{F} \quad \frac{1}{z^2}.\frac{2}{z^3} = \frac{2}{z^5} \quad \xleftarrow{F} \quad 2\,\frac{t^4}{4!} = \frac{t^4}{12}$
2. *Original de $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$.*
   $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1}.\frac{1}{z-2} \quad \xleftarrow{F} \quad H(t)e^t \star H(t)\mathrm{e}^{2t} = \int_0^t \mathrm{e}^{2(t-u)}\mathrm{e}^u\,du = \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t\,.$

1.5 Comportements asymptotiques

□ Comportement à l'infini

On sait déjà que les transformées de Laplace sont bornées et holomorphes pour $\Re z > x_0$. Montrons en outre que la transformée de Laplace tend vers 0 à l'infini.

Théorème 1.5.1 *Soit f une fonction d'abcisse de sommabilité x_0, alors*

$$\lim_{|z|\to+\infty} F(z) = 0, \quad \textit{pour} \quad \Re z > x_0\,.$$

En effet, posons $z = x_0 + R\,\mathrm{e}^{i\theta}$. Prenons d'abord $|\theta| < \pi/2$, alors $\lim_{|z|\to+\infty} |f(t)\,\mathrm{e}^{-zt}| = \lim_{R\to+\infty} |f(t)|\,\mathrm{e}^{-x_0 t}\,\mathrm{e}^{-R\cos\theta t} = 0$, puisque $\cos\theta > 0$. On obtient le résultat par application du théorème de convergence dominée. Lorsque $\theta = \pi/2$, on exprime la TL comme une TF et on utilise le lemme de Riemann-Lebesgue.

□ Théorème de la valeur finale

Comme pour la transformée de Fourier, il existe une correspondance entre le comportement d'une fonction f en $t = +\infty$ (ou en $t = 0$), et le comportement de sa transformée de Laplace F en $z = 0$ (ou en $z = +\infty$). On le voit empiriquement à partir de la définition de la transformée de Laplace, où l'on constate que l'intégrand $f(t)\, e^{-zt} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$, sauf pour les petites valeurs de z, typiquement $t|z| \leq 1$. Le premier résultat précis, connu sous le nom de *théorème de la valeur finale* s'énonce :

Théorème 1.5.2 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Si f a une limite $f(+\infty)$ lorsque $t \mapsto +\infty$, alors F vérifie :*

$$\lim_{|z|\to 0^+} z\, F(z) = f(+\infty)$$

Lorsque $\Re z > 0$, $|\mathrm{e}^{-zt} f'(t)| \leq |f'(t)|$. Donc par application du théorème de convergence dominée, on a $\lim_{|z|\to 0} \left(\int_{\mathbb{R}^+} f'(t)\, \mathrm{e}^{-zt}\, dt\right) = \int_{\mathbb{R}^+} f'(t)\, dt = f(+\infty) - f(0^+)$. Par ailleurs le théorème sur la TL de $f'(t)$ donne $z\, F(z) - f(0^+)$. On obtient donc également $\lim_{|z|\to 0} \left(\int_{\mathbb{R}^+} f'(t)\, \mathrm{e}^{-zt}\, dt\right) = \lim_{|z|\to 0} z\, F(z) - f(0^+)$, d'où le résultat.

□ Théorème de la valeur initiale

Théorème 1.5.3 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Si f a une limite $f(0^+)$ lorsque $t \mapsto 0$, alors F vérifie :*

$$\lim_{|z|\to +\infty} z\, F(z) = f(0^+)$$

$f'(t)$ a pour TL $z\, F(z) - f(0^+)$. Or toute TL doit tendre vers 0 lorsque $|z| \to +\infty$. Donc $\lim_{|z|\to +\infty} (z\, F(z) - f(0^+)) = 0$, d'où le résultat.

◇ `Exemples`

1. $f(t) = H(t)$,
   $F(z) = 1/z$, $f(0^+) = f(+\infty) = 1$,
   on a bien $\lim_{|z|\to\infty} zF(z) = 1$, et $\lim_{|z|\to 0^+} zF(z) = 1$.
2. $f(t) = \cos t$,
   $F(z) = z/(z^2 + 1)$, $f(0^+) = 1$ et on a bien $\lim_{|z|\to\infty} zF(z) = 1$.
   Le théorème de la valeur finale ne peut pas être utilisé car $f(+\infty)$ n'existe pas.
   Un calcul direct montre que $\lim_{|z|\to 0^+} zF(z) = 0$.

1.6 Inversion de la transformée de Laplace

On se pose maintenant le problème de déterminer l'original f lorsque la transformée de Laplace F est connue.

□ Formule de Bromwich-Wagner

Soit G une fonction holomorphe donnée. Le théorème suivant donne des conditions suffisantes sur G pour que celle-ci soit la transformée de Laplace d'une fonction.

Théorème 1.6.1 *Soit G une fonction de la variable complexe telle que*
- *G soit holomorphe dans le demi-plan ouvert $\Re z > x_0$,*
- *$\lim_{|z|\to+\infty} |G(z)| = 0$, pour $\Re z > x_0$,*
- *Pour tout $x > x_0$, la fonction $y \in \mathbb{R} \mapsto G(x+iy)$ est sommable sur $\mathbb{R}$.*

Soit $\mathcal{B}$ une droite parallèle à l'axe imaginaire d'abcisse $x > x_0$. Cette droite est appelée droite de Bromwich. L'originale de la fonction G est donnée par l'intégrale :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} G(z)\, \mathrm{e}^{+zt}\, dz.$$

Cette formule s'appelle la formule de Bromwich-Wagner.

Soit g l'original associé à la fonction G. Pour x donné tel que $x > x_0$, $G(z)$ peut s'exprimer comme une transformée de Fourier $G(x+i2\pi y) = \mathcal{F}\left[H(t)g(t)\mathrm{e}^{-xt}\right](y)$. En utilisant la formule d'inversion de Fourier, on obtient :

$$H(t)g(t) = \mathrm{e}^{+xt} \int_{\mathbb{R}} G(x+i2\pi y)\, \mathrm{e}^{+i2\pi yt}\, dy = \frac{1}{2i\pi} \lim_{y\to+\infty} \int_{x-i2\pi y}^{x+i2\pi y} G(z)\, \mathrm{e}^{+zt}\, dz \equiv \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} G(z)\, \mathrm{e}^{+zt}\, dz.$$

Remarques

1. G étant holomorphe pour $x > x_0$, toutes les singularités de G sont à gauche de $\mathcal{B}$.
2. Par application du théorème de Cauchy, la droite de Bromwich peut être déformée continument en n'importe quelle courbe pour peu qu'aucune des singularités de L ne soient franchies. En particulier le résultat ne doit pas dépendre de l'abcisse x de la droite de Bromwich.
3. Le fait que $G(z) \to 0$ lorsque $|z| \to +\infty$ est essentiel. L'intégrale définie dans le théorème peut exister sans correspondre pour autant à l'originale d'une transformée de Laplace. Par exemple, l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} \mathrm{e}^{+z^2}\, \mathrm{e}^{+zt}\, dz = \mathrm{e}^{+xt} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{(x+i2\pi y)^2}\, \mathrm{e}^{+i2\pi yt}\, dy,$$

existe comme transformée de Fourier d'une gaussienne, mais ne peut pas être l'originale d'une transformée de Laplace, puisque $\lim_{|z|\to+\infty} \mathrm{e}^{z^2} \neq 0$.

◇ Exemples

1. $G(z) = 1/z^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

G est holomorphe dans $\mathbb{C}^*$, tend vers 0 lorsque z tend vers l'infini, et on a bien $y \mapsto 1/|z^n| = 1/(x^2 + 4\pi^2 y^2)^{n/2} \in L^1(\mathbb{R})$ pour $n > 1$.

Pour évaluer l'intégrale à calculer, soit :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} \frac{\mathrm{e}^{+zt}}{z^n}\, dz,$$

on utilise les contours dits de Bromwich représentés sur la figure 1.1. Pour

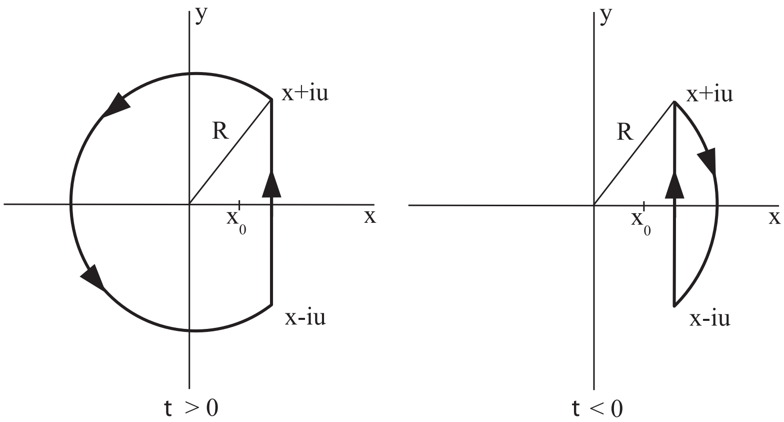


FIGURE 1.1 – Contours de Bromwich.

$t > 0$, on utilise le théorème des résidus. Montrons que l'intégrale sur l'arc de cercle est nulle. On note d'abord que $u = \sqrt{(R + ix)}$, de sorte que $u \to +\infty$ quand $R \to +\infty$. Le domaine angulaire relatif à l'arc de cercle est donc l'intervalle $[\pi/2, 3\pi/2]$. Sur le demi-cercle où $z = R\,\mathrm{e}^{i\theta}$ et $\cos\theta \leq 0$, on a $dz = izd\theta$ de sorte que :

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{+zt}\, iz}{z^n}\right| = \left|\frac{\mathrm{e}^{+zt}}{z^{n-1}}\right| = \frac{\mathrm{e}^{tR\cos\theta}}{R^{n-1}} \leq \frac{1}{R^{n-1}},$$

qui tend vers 0 quand $R \to \infty$. Le seul résidu de la fonction étant le pôle $z = 0$, on peut donc écrire, pour $t > 0$

$$f(t) = \mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{+zt}}{z^n}, z = 0\right)$$

Avec $\mathrm{e}^{zt} = 1 + \cdots z^{n-1}\, \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots$, on obtient le résultat attendu :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} \frac{\mathrm{e}^{+zt}}{z^n}\, dz = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t > 0\,.$$

Comme toutes les singularités de la fonction sont à gauche de la droite de Bromwich, l'application du théorème de Cauchy au contour utilisé lorsque $t < 0$ conduit au deuxième résultat :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{B}} \frac{\mathrm{e}^{+zt}}{z^n}\,dz = 0, \quad \text{pour} \quad t < 0,$$

(l'intégrale sur l'arc de cercle s'annulant en conséquence de la même majoration que ci-dessus, avec maintenant, $t < 0$ et $\cos\theta > 0$).

La formule de Bromwich nous a donc permis de retrouver le résultat déjà connu :

$$G(z) = 1/z^n \quad \xleftarrow{F} \quad H(t)t^{n-1}/(n-1)!$$

Il est intéressant de noter que le théorème ne peut pas être appliqué à la fonction $G(z) = 1/z$ car elle n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction de la variable y. La formule de Bromwich est cependant bien définie dans ce cas et donne le bon résultat (1) (ce résultat peut être justifié à l'aide d'un autre théorème aux hypothèses plus faibles). Il est également important de remarquer que la fonction à intégrer $z \mapsto G(z)\,\mathrm{e}^{zt}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, et non pas seulement pour $\Re z > 0$, ce qui justifie les excursions dans le demi-plan $x < 0$.

2. $G(z) = \frac{\mathrm{e}^{-az^{1/2}}}{z}$.
   Cet exemple sera traité en TD. Indiquons seulement le choix pertinent du contour pour ce genre de fonction présentant des points de branchement. Ici, G présente un point de branchement en $z = 0$, et on doit choisir un contour qui évite 0 et qui présente une coupure ; le choix standard est celui de la détermination principale du logarithme (coupure sur $\mathbb{R}^-$) qui permet de prolonger naturellement les résultats obtenus lorsque z est réel. Le contour est reporté sur la figure 1.2.

□ **Décomposition en élements simples**

Lorsque l'image est une fraction rationnelle, il est plus simple d'effectuer une décomposition en éléments simples de la fonction plutôt que d'utiliser la formule de Bromwich.

Rappelons le principe de la décomposition d'une fraction rationnelle de la forme

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)},$$

où N et D sont des polynômes tels que le degré de N soit inférieur à celui de D.

- A chaque facteur de la forme $(a\,z+b)^n$ dans $D(z)$ correspond une décomposition de la forme :

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\alpha_m}{(a\,z+b)^m}$$

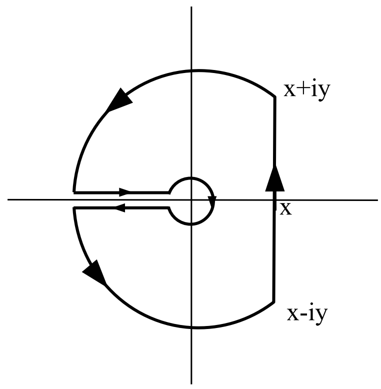


FIGURE 1.2 – Contour de Bromwich pour une fonction présentant un point de branchement à l'origine.

– A chaque facteur de la forme $(a\,z^2 + b\,z + c)^n$ dans $D(z)$ correspond une décomposition de la forme :

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\alpha_m\, z + \beta_m}{(a\,z^2 + b\,z + c)^m}$$

– Les α_m et β_m sont ensuite déterminés par comparaison avec la fraction intiale $G(z)$.

◇ <u>`Exemples`</u>

1. $G(z) = \frac{1}{z(z+1)^2} = \frac{(z+1)-z}{z(z+1)^2} = \frac{1}{z(z+1)} - \frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{(z+1)^2}$
   $g(t) = H(t)\,\left(1 - \mathrm{e}^{-t} - t\,\mathrm{e}^{-t}\right).$
2. $G(z) = \frac{1}{1+z+z^2} = \frac{1}{(z+1/2)^2+3/4}$
   $g(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,H(t)\,\mathrm{e}^{-t/2}\,\sin\frac{\sqrt{3}\,t}{2}.$
3. $G(z) = \frac{c+z}{(z-a)(z-b)} = \frac{(c+a)+(z-a)}{(z-a)(z-b)} = \frac{c+a}{a-b}\left[\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right] + \frac{1}{z-b} = \frac{c+a}{a-b}\,\frac{1}{z-a} - \frac{b+c}{a-b}\,\frac{1}{z-b}$
   $g(t) = H(t)\,\left[\frac{c+a}{a-b}\,\mathrm{e}^{at} - \frac{b+c}{a-b}\,\mathrm{e}^{bt}\right].$

1.7 Exercices

Exercice 1.7.1 *Justifier l'existence ou la non-existence des transformées de Laplace des fonctions f suivantes :*

$$\begin{aligned}
a) \quad f(t) &= \sin t, \\
b) \quad f(t) &= \frac{\sin t}{t}, \\
c) \quad f(t) &= \sqrt{t}, \\
d) \quad f(t) &= \frac{\cos t}{t}, \\
e) \quad f(t) &= \int_0^t \frac{\cos \tau}{\sqrt{\tau}}\, d\tau, \\
f) \quad f(t) &= t^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Exercice 1.7.2 *On rappelle que la transformée de Laplace de la fonction : $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$ où a est un nombre complexe, est donnée par $F(z) = (z-a)^{-1}$ pour $\Re z > \Re a$.*

En déduire les transformées suivantes :

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad F(z) = \frac{\omega}{z^2+\omega^2}, \\
f(t) &= \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad F(z) = \frac{z}{z^2+\omega^2}, \\
f(t) &= \sinh \omega t \quad \Rightarrow \quad F(z) = \frac{\omega}{z^2-\omega^2}, \\
f(t) &= \cosh \omega t \quad \Rightarrow \quad F(z) = \frac{z}{z^2-\omega^2}, \\
f(t) &= \mathrm{e}^{-\gamma t} \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad F(z) = \frac{\omega}{(z+\gamma)^2+\omega^2}, \\
f(t) &= \mathrm{e}^{-\gamma t} \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad F(z) = \frac{z+\gamma}{(z+\gamma)^2+\omega^2},
\end{aligned}$$

où ω et γ sont des réels positifs.

Exercice 1.7.3 *Soit f une fonction causale, a et t_0 des nombres réels strictement positifs. On cherche la solution de l'équation aux différences,*

$$f(t) = a + f(t-t_0),$$

en utilisant la transformée de Laplace.

1. *Montrer que la TL de f peut s'écrire, pour $\Re z > 0$ sous la forme d'une série :*

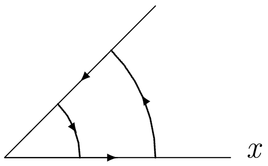
$$F(z) = \frac{a}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nzt_0}$$

2. *En déduire la solution de l'équation aux différences par inversion et la représenter.*

Exercice 1.7.4 *On rappelle la définition de la fonction Gamma d'Euler :*

$$\Gamma(z) \equiv \int_{\mathbb{R}^+} x^{z-1}\, \mathrm{e}^{-x}\, dx,$$

1. *Montrer que* $\Gamma(z)$ *existe dans le demi-plan* $\Re z > 0$.
2. *Calculer les 2 valeurs remarquables* $\Gamma(1)$ *et* $\Gamma(1/2)$.
3. *Montrer qu'on a* $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ *et en déduire que la fonction Gamma généralise la fonction factorielle définie pour* $z \in \mathbb{N}$.
4. *Utilisez le contour suivant pour montrer que :*



$$f(t) = H(t)\, t^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad F(z) = \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}}, \quad \Re\alpha > -1,$$

5. *En déduire*

$$f(t) \;=\; \frac{H(t-t_0)\,(t-t_0)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad F(z) = \frac{\mathrm{e}^{-zt_0}}{z^{\alpha}}, \quad \Re\alpha > 0.$$

Exercice 1.7.5 1. *Montrer que la fonction* $f : t \mapsto f(t) = H(t)\ln t$ *admet une transformée de Laplace mais pas une transformée de Fourier.*

2. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}^+_*$. *Montrer que* F *vérifie l'équation :*

$$F(z/\lambda) = \lambda\, F(z) + \frac{\lambda \ln \lambda}{z}$$

3. *Dériver l'expression précédente par rapport à* λ *et en déduire que* $F'(z)$ *obéit à l'équation différentielle :*

$$F'(z) = -\frac{F(z)}{z} - \frac{1}{z^2}.$$

4. *Intégrer l'équation précédente par la méthode de la variation de la constante et en déduire le résultat :*

$$f(t) = H(t)\,\ln t \quad \Rightarrow \quad F(z) = -\frac{C + \log z}{z}, \quad \Re z > 0,$$

où C *est la constante d'Euler-Mascheroni définie par l'intégrale :* $C \equiv -\int_{\mathbb{R}^+} \mathrm{e}^{-u} \ln u\, du \approx -0.577216$.

5. *Déterminer sans aucun calcul la TL de la fonction* $t \mapsto H(t)\,\ln t/\tau$ *où* τ *est un nombre réel strictement positif.*

Exercice 1.7.6 1. *Soit* f *la fonction causale telle que* $f(t) = \sin t$ *pour* $t > 0$. *Représentez les fonctions* f, f' *et* f''. *Utilisez la relation entre* $f''(t)$ *et* $f(t)$ *pour calculer la transformée de Laplace* $F(z)$.

2. *Pour quelle raison ne peut-on pas utiliser la même méthode pour la fonction* $g(t) = H(t)\,\sin|t-\pi|$ *?*
3. *Calculer* $G(z)$ *par une autre méthode.*

Exercice 1.7.7 *On rappelle que* $(\pi/z)^{1/2}$ *est la transformée de Laplace de la fonction* $t \mapsto H(t)/\sqrt{t}$ *pour* $\Re z > 0$.

1. *Déterminer la TL de la fonction* $t \mapsto H(t)\mathrm{e}^{\pm it}/\sqrt{t}$.
2. *En utilisant la propriété concernant l'intégration de l'original, déterminer la TL de la fonction* $t \mapsto H(t)\int_0^t \mathrm{e}^{\pm i\tau}/\sqrt{\tau}\,d\tau$.
3. *En déduire les transformées de Laplace des 2 intégrales de Fresnel :*

$$C(t) \equiv H(t)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t \frac{\cos\tau}{\sqrt{\tau}}\,d\tau \quad \text{et} \quad S(t) \equiv H(t)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t \frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}}\,d\tau.$$

Exercice 1.7.8 *On rappelle la définition des fonctions de Bessel de 1ère espèce d'ordre* n $(n \in \mathbb{N})$ *:*

$$J_n(t) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{e}^{i(n\theta - t\,\sin\theta)}\,d\theta$$

1. *Etablir le résultat par une intégration directe :*

$$f(t) = H(t)\,J_n(t) \quad \Rightarrow \quad F(z) = \frac{\left(\sqrt{1+z^2}-z\right)^n}{\sqrt{1+z^2}}.$$

2. *Etablir la formule :*

$$\int_0^t J_0(u)\,J_0(t-u)\,du = \sin t, \quad \text{pour} \quad t > 0.$$

Exercice 1.7.9 *On se propose de montrer que la fonction Beta d'Euler définie par la relation*

$$B(p,q) \equiv \int_0^1 t^{p-1}\,(1-t)^{q-1}\,dt, \quad \Re p > 0, \quad \Re q > 0.$$

est associée à la fonction Gamma par la relation :

$$\Gamma(p+q)\, B(p,q) = \Gamma(p)\, \Gamma(q).$$

1. *En effectuant le changement de variables $x = t^2$ dans la définition de la fonction Gamma, montrer que l'on peut écrire :*

$$\Gamma(p) \equiv 2 \int_{\mathbb{R}^+} t^{2p-1}\, \mathrm{e}^{-t^2}\, dt, \quad \Re p > 0.$$

2. *Effectuez le produit $\Gamma(p)\Gamma(q)$ pour p et q tels que $\Re p > 0$ et $\Re q > 0$, et en déduire la relation entre la fonction Γ et la fonction B.*
3. *Montrer que $B(p,q)$ s'écrit comme un produit de convolution, et utilisez le théorème sur la transformée de Laplace du produit de convolution pour retrouver la relation entre B et Γ.*

Exercice 1.7.10 *On veut calculer la TL de la fonction $t \mapsto H(t)\,|\sin t|$.*

1. *Justifier l'identité*

$$H(t)\,|\sin t| = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_{n\pi}(t)\, \sin(t - n\pi),$$

où $\Pi_{n\pi}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$.

2. *En déduire le résultat :*

$$f(t) = H(t)\,|\sin t| \quad \Rightarrow \quad F(z) = \frac{1}{1+z^2}\, \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi z}}{1-\mathrm{e}^{-\pi z}}.$$

3. *Utilisez la formule d'inversion pour retrouver le développement en série de Fourier de $t \mapsto |\sin t|$:*

$$|\sin t| = \frac{2}{\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{1-4n^2}\right).$$

Exercice 1.7.11 1. *Montrer que le théorème d'inversion peut être appliqué à la fonction :*

$$F_1(z) = \frac{1}{1+z^n},$$

avec n entier supérieur ou égal à 2.

2. *Calculer explicitement l'original pour $n = 2$.*

Exercice 1.7.12 *Calculer l'original des fonctions*

$$F_2(z) = \frac{z}{(1+z)^3(z-1)^2}, \quad \text{et} \quad F_3(z) = \frac{\mathrm{e}^{-az^{1/2}}}{z},$$

à l'aide de la formule d'inversion complexe en utilisant un contour de Bromwich adapté.

Exercice 1.7.13

1. *Effectuer une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle*
$$F(z) = \frac{2a^2 z}{z^4 - a^4},$$
2. *On suppose que F est la transformée de Laplace d'une fonction f. Utilisez le résultat de la question précédente pour déterminer f.*

Exercice 1.7.14 *Soit F la transformée de Laplace définie par la relation :*

$$F(z) = \frac{1}{(z+a)(z+b)} \quad \text{avec} \quad a \neq b.$$

Déterminer l'original par les 3 méthodes suivantes :

1. *décomposition en éléments simples,*
2. *théorème de convolution,*
3. *intégrale de Bromwich.*

Chapitre 2

Transformation de Laplace au sens des distributions

Considérons la fonction constante $z \mapsto 1$. Puisqu'elle ne tend pas vers 0 à l'infini, elle ne peut être la transformée de Laplace d'une fonction au sens des fonctions. Nous allons voir qu'il est possible, en passant des fonctions aux distributions, de définir une TL qui pourra croître à l'infini (pas plus vite qu'un polynôme tout de même).

2.1 Définitions et propriétés

Rappelons que le support d'une distribution T est le plus petit ensemble fermé en dehors duquel T est nulle [1]. On note $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions dont le support est contenu dans $[0, +\infty[$.

La transformée de laplace d'une distribution est définie comme suit :

> **Définition 2.1.1** *Soit T une distribution de $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ à support borné. La transformée de Laplace de T, est la fonction $z \mapsto \mathcal{T}(z)$ définie par :*
>
> $$\mathcal{T}(z) \equiv \langle T, \mathrm{e}^{-zt} \rangle$$

1. Une distribution T est nulle dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}$, si $\langle T, \varphi \rangle = 0$, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ayant son support dans Ω.

On notera que dans le cas des distributions régulières on retrouve la définition de la TL au sens des fonctions. La définition précédente de la TL impose nécessairement des restrictions aux distributions auxquelles elle s'applique. Dans le cas présent, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-zt}$ est bien C^∞, mais n'est pas à support borné. $\mathcal{T}(z)$ n'est donc bien définie que parce que la distribution elle-même est à support borné. On peut définir les TL de distributions dans d'autres cas, par exemple pour $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ et telle que $\mathrm{e}^{-zt}T \in \mathcal{S}'_+(\mathbb{R})$.

L'application immédiate de la définition à la distribution de Dirac δ (dont le support est $\{0\}$), donne directement

$$\delta \quad \xrightarrow{F} \quad \langle \delta, \mathrm{e}^{-zt} \rangle = 1$$

On a les théorèmes suivants sur les dérivées.

Théorème 2.1.1 *Soit T une distribution qui admet une TL. La distribution dérivée T' admet aussi une TL qui vérifie :*

$$T' \quad \xrightarrow{F} \quad z\,\mathcal{T}(z)$$

La fonction $z \mapsto \mathcal{T}(z)$ est holomorphe dans tout le plan complexe, et on a :

$$\mathcal{T}'(z) \quad = \quad \langle -tT, \mathrm{e}^{-zt} \rangle$$

En effet, si T est une distribution à support borné qui appartient à $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, il en est de même de sa dérivée. T' admet donc une TL, et on a

$$\langle T', \mathrm{e}^{-zt} \rangle \equiv -\langle T, (\mathrm{e}^{-zt})' \rangle = -\langle T, -z\mathrm{e}^{-zt} \rangle = +z\,\langle T, \mathrm{e}^{-zt} \rangle \equiv z\,\mathcal{T}(z)$$

de même,

$$\langle -tT, \mathrm{e}^{-zt} \rangle = \langle T, -t\mathrm{e}^{-zt} \rangle = \langle T, \frac{d}{dz}\left(\mathrm{e}^{-zt}\right) \rangle = \frac{d\mathcal{T}}{dz}$$

◇ Exemples

1. $\delta' \quad \xrightarrow{F} \quad z.1 = z$
2. $\delta^{(n)} \quad \xrightarrow{F} \quad z.z^{n-1} = z^n$

On remarquera la similarité avec les théorèmes correspondants au sens des fonctions, mais sans la complexité des contributions à l'origine qui se trouve prises en compte automatiquement avec les distributions. Soit f une fonction localement sommable, à laquelle on associe la distribution régulière Hf. On a successivement :

$$\begin{aligned} Hf \quad &\xrightarrow{F} \quad \mathcal{F}(z), \\ (Hf)' - f(0)\,\delta \quad &\xrightarrow{F} \quad z\mathcal{F}(z) - f(0) \end{aligned}$$

Or, par application de la formule des sauts : $(Hf)' = Hf' + f\,\delta = Hf' + f(0)\,\delta$, soit encore $(Hf)' - f(0)\delta = Hf'$. Comme Hf est une distribution régulière, on a $\mathcal{F}(z) = \int_{\mathbb{R}} h(t)f(t)\mathrm{e}^{-zt}\,dt \equiv F(z)$, et on retrouve bien le résultat obtenu au sens des fonctions :

$$Hf' \quad \xrightarrow{F} zF(z) - f(0)$$

Le théorème précédent se généralise au cas des dérivées d'ordre n

$$\boxed{\begin{array}{ccc} T^{(n)} & \xrightarrow{F} & z^n\,\mathcal{T}(z) \\ \dfrac{d^n\mathcal{T}}{dz^n} & = & \langle(-t)^nT, \mathrm{e}^{-zt}\rangle \end{array}}$$

2.2 Convolution et inversion

Rappelons que le produit de convolution des 2 distributions S et T, lorsqu'il existe, noté $S\star T$, est défini, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ de la forme $\varphi(x, y) = u(x)v(y)$ avec $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, par la relation :

$$\langle S \star T, u(x)v(y)\rangle = \langle S, u\rangle\langle T, v\rangle$$

On rappelle également que le produit de convolution existe si l'une au moins des 2 distributions est à support borné.

Théorème 2.2.1 *Soient U et V 2 distributions de $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ dont les TL existent, alors leur produit de convolution existe et possède une TL définie par :*

$$U \star V \quad \xrightarrow{F} \quad \mathcal{U}(z).\mathcal{V}(z)$$

Si U et V sont à supports bornés, comme le support de $U \star V$ est inclus dans la somme du supports de U et du support de V, le support de $U \star V$ est donc borné. $U \star V \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ puisque U et V appartiennent à $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, donc puisque $\mathrm{e}^{-z(x+y)} = \mathrm{e}^{-zx}\mathrm{e}^{-zy}$:

$$U \star V \quad \xrightarrow{F} \quad \langle U \star V, \mathrm{e}^{-zx}\mathrm{e}^{-zy}\rangle = \langle U, \mathrm{e}^{-zx}\rangle\,\langle V, \mathrm{e}^{-zy}\rangle = \mathcal{U}(z).\mathcal{V}(z)$$

Pour la propriété d'inversion, nous nous contenterons de donner, sans démonstration, le théorème fondamental suivant :

Théorème 2.2.2 *Pour qu'une fonction holomorphe $\mathcal{T} : z \mapsto \mathcal{T}(z)$ soit la TL d'une distribution $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, il faut et il suffit qu'il existe un demi-plan dans lequel elle soit majorée en module par un polynôme en $|z|$.*

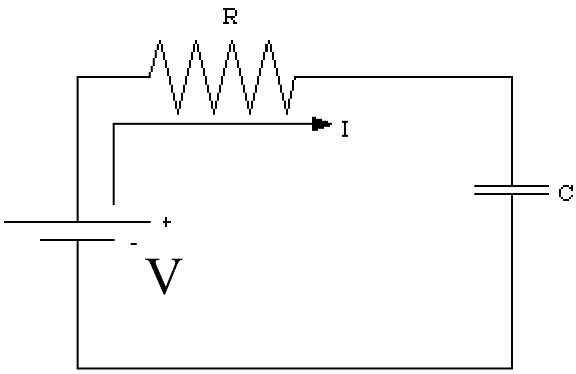
◇ Exemples

1. $\delta^{(n)} \star T \quad \xrightarrow{F} z^n.\mathcal{T}(z) \quad \xleftarrow{F} T^{(n)}$, donc $\delta^{(n)} \star T = T^{(n)}$.
2. $\delta' \star T \quad \xrightarrow{F} z.\mathcal{T}(z)$. Comme $\delta' \star T = T'$, on retrouve le résultat $T' \quad \xrightarrow{F} z\mathcal{T}(z)$.

2.3 Equations de convolution

Commençons par quelques exemples.

Considérons le circuit RC série alimenté par une tension $v(t)$. On applique la tension à l'instant origine $t = 0$ (v est donc nulle pour $t < 0$).



Le courant $i(t)$ vérifie l'équation intégrale

$$Ri(t) + C^{-1} \int_0^t i(\tau)\, d\tau = v(t)$$

On cherche les solutions de cette équation dans l'espace des distributions de $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. Soit I et V les distributions associées au courant et à la tension ; l'équation précédente s'écrit sous la forme d'une équation de convolution :

$$A \star I = V$$

où $A \equiv R\,\delta + C^{-1}\,H$ est la distribution caractéristique du circuit RC.

Considérons maintenant une équation différentielle ordinaire, par exemple l'équation de l'oscillateur harmonique forcé :

$$X'' + \omega_0^2\, X = F$$

C'est également un exemple d'équation de convolution, puisqu'elle peut s'écrire sous la forme

$$A \star X = F,$$

avec $A = \delta'' + \omega_0^2\,\delta$ la distribution caractérisant l'oscillateur.

En généralisant on a la définition :

Définition 2.3.1 *Une équation de convolution dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ est une équation de la forme :*

$$A \star T = B,$$

où A et B sont des distributions données de $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, et T une distribution inconnue de $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

□ Méthode de Green

Les équations de convolution peuvent se résoudre par la méthode de Green (ou méthode de la réponse impulsionnelle).

Supposons que l'on sache résoudre l'équation

$$A \star E = E \star A = \delta$$

pour A donnée. La solution, E, de cette équation est *la réponse impulsionnelle* (ou solution élémentaire, ou inverse de convolution) de l'équation étudiée. Cette solution particulière suffit à résoudre l'équation générale $A \star T = B$ pour une sollicitation B quelconque sous la forme

$$T = E \star B$$

En effet, $E \star B = E \star (A \star T) = (E \star A) \star T = \delta \star T = T$, où l'utilisation des propriétés de commutativité et d'associativité sont légitimes puisque toutes les distributions sont dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

La résolution de l'équation $A \star E = \delta$ est aisée par transformée de Laplace puisqu'on trouve aussitôt par application du théorème de convolution : $\mathcal{E}(z) = 1/\mathcal{A}(z)$. On obtient ensuite E par tranformée de Laplace inverse (ce qui peut être délicat), puis la solution générale T par $T = E \star B$.

On pourra vérifier à titre d'exercice que l'inverse de convolution correspondant au circuit RC présenté plus haut vaut :

$$E = \frac{1}{R}\left(\delta - \frac{1}{RC}\,H\,\mathrm{e}^{-t/RC}\right)$$

Remarque

La méthode présentée ci-dessus ne permet pas d'obtenir *toutes* les solutions d'une équation de convolution, mais seulement celle qui est dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ et qui admet une TL (cf. exercices).

□ Remarque sur les équations différentielles

Considérons l'équation différentielle :

$$x''(t) + \omega^2\, x(t) = 0,$$

où $x : t \mapsto x(t)$ est une fonction. Si $x(0) = x'(0) = 0$, l'unique solution est la fonction nulle. Si $x'(0) = 0$ mais que $x(0) \equiv x_0 \neq 0$, l'unique solution est $x(t) = x_0 \cos \omega t$.

Il est facile de vérifier que l'on peut retrouver aisément ces résultats en utilisant la transformation de Laplace au sens des fonctions.

Que se passe-t-il si l'on considère cette équation au sens des distributions ? Par transformée de Laplace, on a aussitôt :

$$\left(z^2 + \omega^2\right) \mathcal{X}(z) = 0$$

qui admet pour seule solution $\mathcal{X}(z) = 0$, et donc $X = 0$, quelle que soient les conditions initiales.

La raison de la différence avec le calcul effectué au sens des fonctions, vient ce que le calcul à l'aide des TL des distributions implique pour celles-ci l'appartenance à $\mathcal{D}'_+$, c'est-à-dire une propriété de causalité, qui impose que les distributions soient nulles dans $\mathbb{R}^-$.

La bonne façon de procéder consiste à associer la distribution $X \equiv xH$ à la fonction x, de sorte que :

$$X' = x'H + x_0\,\delta \quad \text{et} \quad X'' = x''H + x'_0\,\delta + x_0\,\delta'$$

En utilisant l'équation différentielle, on a $x''H = -\omega^2\, xH = -\omega^2\, X$, et donc, au sens des distributions :

$$X'' + \omega^2\, X = x'_0\,\delta + x_0\,\delta'$$

On vérifiera aisément que l'on retrouve bien les solutions attendues par transformation de Laplace.

Cette modification, parfois nécessaire, des équations différentielles résolues par TL au sens des distributions, est la contre-partie des formules compactes concernant les dérivées.

2.4 Exercices

Exercice 2.4.1 *Calculer directement les TL des distributions,* δ', $\delta^{(n)}$ *et* δ_a.

Exercice 2.4.2 *Montrer que :*

$$L\left[H(t)\,\mathrm{e}^{\lambda t}\,\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right](z) = \frac{1}{(z-\lambda)^n},$$

pour $\Re z > \Re\lambda$.

Exercice 2.4.3 *Quels sont les inverses de convolution des distributions* δ', $H(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$ *et* $H(t)\cos t$ *?*

Exercice 2.4.4 *Déterminer l'inverse de convolution de la distribution* $\delta'' + a^2\,\delta$.

En déduire une solution particulière des équations différentielles :

$$\begin{aligned} T'' + a^2\,T &= H(t)f(t), \\ T'' + a^2\,T &= \delta' \end{aligned}$$

où f *est une fonction localement sommable.*

Exercice 2.4.5 *Trouver une solution particulière de l'équation intégrale en* u *:*

$$\int_0^t \cos(t-s)\,u(s)\,ds = f(t),$$

où f *est une fonction localement sommable.*

Chapitre 3

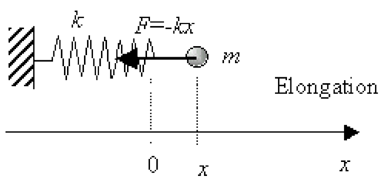
Applications de la transformation de Laplace

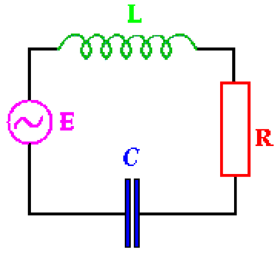
Equations différentielles linéaires
Equations aux dérivées partielles
Equations intégrales
Exercices

3.1 Equations différentielles linéaires

La plupart des problèmes de physique conduisent à poser et à tenter de résoudre une équation d'évolution avec des conditions aux limites caractéristiques de la situation étudiée. La transformée de Laplace permet de traiter un grand nombre d'équations d'évolution, pour peu qu'elles soient linéaires.

Pour introduire le sujet, commençons par le cas fréquent des équations différentielles du 2ème ordre à coefficients constants, telles qu'on les rencontre dans le cas des oscillateurs mécaniques ou électriques.





L'équation étudiée est donc de la forme :

$$x''(t) + \gamma\, x'(t) + \omega_0^2\, x(t) = f(t),$$

complétées par les conditions initiales $x(0) \equiv x_0$ et $x'(0) \equiv x_1$. f est une fonction source connue.

Soit $X(\omega)$ et $F(\omega)$ les transformées de Laplace des fonctions x et f. On a aussitôt :

$$X(\omega) = \frac{x_1 + x_0\,\omega + \gamma\, x_0}{\omega^2 + \gamma\,\omega + \omega_0^2} + \frac{F(\omega)}{\omega^2 + \gamma\,\omega + \omega_0^2}$$

Deux cas sont à considérer :

- si le polynôme caractéristique $\omega^2 + \gamma\,\omega + \omega_0^2$ admet 2 racines distinctes ω_1 et ω_2, on trouve par inversion (le faire !) que la solution s'écrit sous la forme

  $$x(t) = A_1\, e^{\omega_1 t} + A_2\, e^{\omega_2 t} + \int_0^t \chi(t - t')\, f(t')\, dt',$$

  où A_1 et A_2 dépendent des conditions initiales x_0 et x_1, et où χ est *la susceptibilité* définie par :

  $$\chi(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{\omega^2 + \gamma\,\omega + \omega_0^2}\right](t) = \frac{\mathrm{e}^{\omega_1 t} - \mathrm{e}^{\omega_2 t}}{\omega_1 - \omega_2}, \quad \omega_1 \neq \omega_2\,.$$

  La susceptibilité traduit la réponse du système à la force extérieure f. On notera que la convolution traduit *le principe de causalité*, selon lequel l'effet ne peut précéder la cause, puisque l'intégration est limitée aux seuls temps $t' \leq t$.
  - si les parties réelles de ω_1 et ω_2 sont toutes deux négatives, le système est *stable*. Dans cette situation, aux temps suffisamment longs, seul demeure le terme *forcé* (proportionnel à f) : l'oubli des conditions initiales est total.
  - si une des racines est imaginaire pur (en fait les 2, si l'équation est à coefficients réels), alors le terme homogène ne tend pas vers zéro aux temps longs : les pôles imaginaires purs donnent des contributions oscillatoires non amorties, même aux temps longs.
- si le polynôme caractéristique $\omega^2 + \gamma\,\omega + \omega_0^2$ admet 1 racine double $\bar{\omega} = \omega_1 = \omega_2$, on trouve par inversion (le faire !) que la solution s'écrit sous la forme

  $$x(t) = (x_0 + A_1\, t)\; e^{\bar{\omega} t} + \int_0^t \chi(t - t')\, f(t')\, dt',$$

  où A_1 dépend des conditions initiales x_0 et x_1, et où χ est définie par :

  $$\chi(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{\omega^2 + \gamma\,\omega + \omega_0^2}\right](t) = t\,\mathrm{e}^{\bar{\omega} t}, \quad \omega_1 = \omega_2 = \bar{\omega}\,.$$

L'apparition d'un terme de la forme $t\,\mathrm{e}^{\bar{\omega} t}$ est caractéristique des pôles multiples.

Généralisation

D'une façon assez générale, les systèmes physiques limités par une frontière physique avec le milieu extérieur, peuvent être caractérisés globalement par la relation qui existe entre une grandeur de sortie et une grandeur d'entrée (cf. les exemples en mécanique, automatique, électronique ...)

Une classe particulière de systèmes traitables par TL comprend les systèmes linéaires et homogènes, caractérisés du point de vue mathématique par des équations différentielles à coefficients constants. La situation générique consiste à exciter un système par une fonction extérieure, que nous noterons $e(t)$ et à mesurer la réponse $s(t)$ du système. Dans le cadre de notre étude, on supposera que e et s admettent une TL. Le système physique étudié est dit *linéaire et homogène* (ou linéaire et invariant) si l'on peut définir un opérateur $\mathcal{L} : e \mapsto s = \mathcal{L}(e)$, qui satisfait aux deux propriétés suivantes :
- $\mathcal{L}(\alpha e_1(t) + \beta e_2(t)) = \alpha\mathcal{L}(e_1(t)) + \beta\mathcal{L}(e_2(t))$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{L}(e(t - t_0)) = s(t - t_0)$

La convolution permet de construire aisément un opérateur linéaire et homogène. On montre en effet, que si la réponse du système s'écrit sous la forme $s = \mathcal{L}(e) = h \star e$, où h une fonction sommable, l'opérateur $\mathcal{L}$ est bien linéaire et homogène.

Entrée		Système linéaire et homogène		Sortie
$e(t)$	$\Rightarrow$	h(t)	$\Rightarrow$	$s(t) = (h \star e)(t)$

Le théorème sur la transformée de Laplace du produit de convolution permet de calculer la réponse $s = h \star e$ d'un sytème linéaire et homogène. En effet la TL conduit à l'égalité :

$$\mathcal{H}(z) = \frac{\mathcal{S}(z)}{\mathcal{E}(z)},$$

où $\mathcal{H}$ est appelée, *fonction de transfert (ou admittance)* du système.

De façon plus précise, considérons un système linéaire et invariant caractérisé par l'équation différentielle homogène à coefficients constants :

$$a_n\, s^{(n)}(t) + \cdots + a_1\, s'(t) + a_0\, s(t) = b_m\, e^{(m)}(t) + \cdots + b_1\, e'(t) + b_0\, e(t),$$

avec, pour simplifier, l'ensemble des conditions initiales nulles. (On notera que les équations inhomogènes (avec présence de termes constants) se ramènent aux équations homogènes par changement de variables).

La fonction de transfert du système s'écrit comme le rapport de polynômes en z :

$$\mathcal{H}(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \equiv \frac{b_m\, z^m + \cdots + b_0}{a_n\, z^n + \cdots + a_0}$$

L'équation algébrique $D(z) = 0$ est l'équation caractéristique de l'équation différentielle en $s(t)$. Ses racines sont appelés *les pôles* du système ou de la fonction de transfert, et conditionnent, comme nous allons le voir, la stabilité du système.

Puisque le système est caractérisé par un opérateur de convolution, il suffit d'étudier sa réponse par rapport à l'impulsion de Dirac δ (méthode de Green).

Définition 3.1.1 *Un système est stable si la réponse au signal d'entrée, $e \equiv \delta$, tend vers 0, lorsque $t \mapsto +\infty$ (ou reste bornée, selon une autre définition).*

Dans ce cas, puisque $\mathcal{E}(z) = 1$, on obtient $\mathcal{S}(z) = \mathcal{H}(z)$. La décomposition en éléments simples de $\mathcal{S}(z)$ conduit à une somme de termes de la forme :

$$\mathcal{S}(z) = \sum_k \frac{A_k}{(z - z_k)^{\alpha_k}},$$

où α_k est la multiplicité associée à la racine z_k. L'original correspondant est donc de la forme :

$$s(t) = \sum_k A_k t^{\alpha_k - 1} \mathrm{e}^{z_k\, t}$$

Le système ne sera donc stable que si tous les pôles de la fonction de transfert sont dans le demi-plan gauche ouvert du plan complexe. Les pôles sur l'axe imaginaire ($\Re z_k = 0$) conduisent à une solution bornée lorsqu'ils sont de multiplicité 1 ($\alpha_k = 1$).

La localisation des pôles peut être réalisée à l'aide de critères algébriques ou géométriques (cf. cours d'automatique).

Remarque

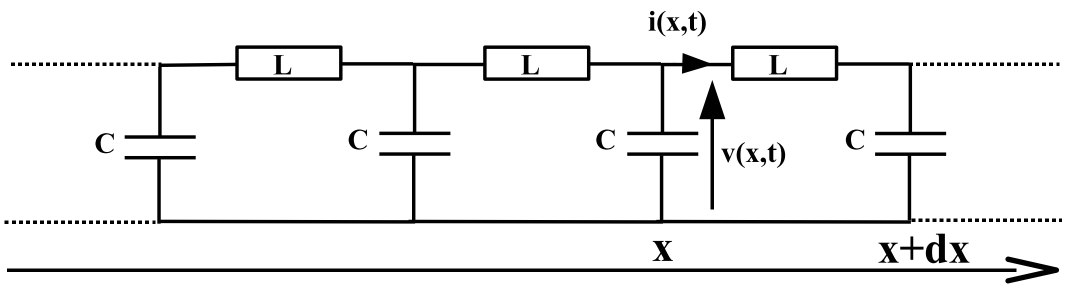
On vient de voir que la transformée de Laplace remplaçait la résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants par une équation algébrique.

La transformée de Laplace peut également être utilisée dans certaines circonstances pour résoudre les équations différentielles linéaires du 2ème ordre *à coefficients variables.* En particulier une équation dont les coefficients sont des polynômes est transformée en une équation du même type. Lorsque le degré des coefficients est inférieur à l'ordre de l'équation originale, la transformée de Laplace abaisse l'ordre de l'équation, et on peut espérer que le problème à résoudre sera plus simple (cf. exercices).

3.2 Equations aux dérivées partielles linéaires

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation différentielle ordinaire (EDO) pour une fonction de plusieurs variables. On rencontre de telles équations dans tous les domaines de la physique. Les équations de Maxwell en électromagnétisme, l'équation de Schrödinger en mécanique quantique, les équations de Navier-Stokes en hydrodynamique, l'équation de la chaleur en thermodynamique, ...etc ... en sont des exemples bien connus.

Dans le cas des problèmes à deux dimensions (par exemple un problème dépendant du temps mais unidimensionnel dans l'espace), l'application de la TL, par rapport à une des variables, permet de transformer l'EDP en une EDO par rapport à la variable non transformée. Dans le cas d'un plus grand nombre de variables, on est amené à effectuer plusieurs transformations consécutives (de Laplace ou de Fourier), jusqu'à réduire le problème à une EDO.



Traitons à titre d'exemple le cas d'une ligne de transmission électrique sans perte, de longueur d, dont l'inductance et la capacité par unité de longueur sont L et C. Le long de la ligne, le potentiel $v(x,t)$ et le courant $i(x,t)$ sont représentés par des fonctions de la position x et du temps t. Ces 2 fonctions obéissent aux équations aux dérivées partielles dites des télégraphistes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -L\,\frac{\partial i}{\partial t}, \\ \frac{\partial i}{\partial x} &= -C\,\frac{\partial v}{\partial t}, \end{aligned}$$

On cherche le potentiel à l'extrémité de la ligne $x = d$, sachant

– que les conditions initiales sont données par :

$$v(x,0) = i(x,0) = 0\,.$$

– que les conditions aux limites sont données par :

$$v(0,t) = v_0, \quad v(d,t) = L_0\,\frac{\partial i}{\partial t}\,,$$

c'est-à-dire qu'une tension constante v_0 est appliquée à l'entrée de la ligne qui se termine sur une inductance L_0.

Effectuons une transformée de Laplace par raport à la variable t. On pose donc :

$$V(x,\omega) \equiv \int_{\mathbb{R}^+} v(x,t)\, \mathrm{e}^{-\omega t}\, dt, \quad I(x,\omega) \equiv \int_{\mathbb{R}^+} i(x,t)\, \mathrm{e}^{-\omega t}\, dt$$

Compte-tenu des conditions initiales, les équations des télégraphistes s'écrivent :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L\,\omega I \quad \frac{\partial I}{\partial x} = -C\,\omega V\,.$$

En combinant ces 2 équations, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC\omega^2\, V,$$

dont la solution évidente est :

$$V(x,\omega) = A\,\cosh\left(\frac{\omega\, x}{v}\right) + B\,\sinh\left(\frac{\omega\, x}{v}\right),$$

où on a introduit la vitesse de propagation du signal $v = 1/\sqrt{LC}$ le long de la ligne. Les constantes A et B sont fixées par les conditions aux limites qui s'écrivent :

$$V(0,\omega) = \frac{v_0}{\omega}, \quad V(d,\omega) = L_0\,\omega I = -\frac{L_0}{L}\frac{\partial V}{\partial x}(d,\omega)$$

Tout calcul fait, on trouve en bout de ligne :

$$V(d,\omega) = \frac{v_0}{\omega\,\cosh(\omega d/v) + \bar{\omega}\,\sinh(\omega d/v)},$$

où $\bar{\omega} = \sqrt{L/C}/L_0$. Le résultat dépendant du temps est obtenu par la formule d'inversion :

$$v(d,t) = \frac{v_0}{2i\pi}\int_{\mathcal{B}} \frac{\mathrm{e}^{+\omega t}}{\omega\,\cosh(\omega d/v) + \bar{\omega}\,\sinh(\omega d/v)}\, d\omega.$$

Cette intégrale peut être calculée par un développement en série et s'exprime en fonction des polynômes de Laguerre (cf. exercices).

3.3 Equations intégrales

Traitons à titre d'exemple le cas de l'*inversion d'Abel*. On considère l'équation intégrale définie par la relation :

$$\int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{x-t}}\, dt = f(x).$$

Le problème consiste à exprimer la fonction y à partir de f qui est supposée connue. On supposera que y et f sont des fonctions continues qui admettent des transformées de Laplace.

L'intégrale peut s'écrire comme un produit de convolution :

$$\frac{H(x)}{\sqrt{x}} \star H(x)y(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{H(x-t)}{\sqrt{x-t}} H(t)y(t)\, dt = \int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{x-t}}\, dt$$

On a montré précédemment que $H(t)t^{-1/2} \quad \xrightarrow{F} \quad \sqrt{\frac{\pi}{z}}$ pour $\Re z > 0$.

Notons $F(z)$ et $Y(z)$ les transformées de Laplace des fonctions $f(t)$ et $y(t)$. En appliquant le théorème de convolution, on obtient

$$F(z) = \sqrt{\frac{\pi}{z}}\,.\,Y(z) \quad \Leftrightarrow \quad Y(z) = \sqrt{\frac{z}{\pi}}\, F(z)$$

On remarquera que la fonction $z \mapsto \sqrt{z}$ ne tend pas vers 0 lorsque $z \to +\infty$, elle ne peut donc pas être la transformée de Laplace d'une fonction. Cependant, en divisant par z, on a :

$$\frac{Y(z)}{z} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{z}} F(z) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{z}}.\, F(z)$$

En utilisant à nouveau le théorème de convolution et le théorème sur l'intégration, on obtient :

$$\int_0^x y(x')\, dx' = \frac{1}{\pi} \frac{H(x)}{\sqrt{x}} \star H(x)f(x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\, dt$$

$y(x)$ est obtenu en dérivant par rapport à x :

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\, dt\,.$$

On peut aller un peu plus loin si f est dérivable. Comme la fonction $t \mapsto (x-t)^{-1/2}$ est singulière pour $t = x$, il convient d'abord d'intégrer par parties. Posons $I(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\, dt$, on trouve :

$$I(x) \quad = \quad 2x^{1/2} f(0) + 2 \int_0^x (x-t)^{1/2} f'(t)\, dt,$$

puis en dérivant cette expression :

$$I'(x) = \frac{f(0)}{x^{1/2}} + 2 \lim_{t \to x} (x-t)^{1/2} f'(t) + \int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{1/2}}\, dt,$$

soit encore :

$$y(x) = \frac{f(0)}{\pi\sqrt{x}} + \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{f'(t)}{\sqrt{x-t}}\, dt\,.$$

3.4 Exercices

Exercice 3.4.1 *On cherche les solutions causales de l'équation :*

$$f'(t) - \gamma\, f(t-t_0) = 0,$$

où $\gamma < 1$ et t_0 sont des nombres réels positifs. On posera $f(0) = f_0$.

1. *Résoudre cette équation de proche en proche (pour $t \in [0, t_0]$, puis $t \in [t_0, 2t_0]$ ...) sans utiliser la transformée de Laplace.*
2. *Montrer par transformée de Laplace que la solution de cette équation peut s'écrire sous la forme :*

$$f(t) = f_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\gamma^n}{n!} H(t - n t_0)\, (t - n t_0)^n$$

3. *Représenter cette fonction et montrer que toutes ses dérivées présentent des sauts que l'on précisera.*
4. *Quelle est la solution de l'équation avec second membre :*

$$f'(t) - \gamma\, f(t-t_0) = \Phi(t),$$

où Φ est une fonction arbitraire supposée connue qui admet une TL.

Exercice 3.4.2 *Trouver la solution du système différentiel :*

$$\begin{aligned} x'(t) &= a\, y(t) + f(t), \\ y'(t) &= -a\, x(t) + g(t), \end{aligned}$$

qui s'annule pour $t = 0$. Les fonctions f et g sont supposées connues et admettre une TL.

Exercice 3.4.3 *Soit u_n la fonction causale qui vérifie pour $t > 0$:*

$$t\, u_n''(t) + u_n'(t) + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{t}{4}\right) u_n(t) = 0$$

On notera $U_n(z)$ sa transformée de Laplace.

1. *Montrer que U_n vérifie l'équation différentielle :*

$$\left(z^2 - \frac{1}{4}\right) U_n'(z) + \left(z - n - \frac{1}{2}\right) U_n(z) = 0$$

2. *En déduire que*

$$U_n(z) = A \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)^n}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^{n+1}}, \quad A \in \mathbb{C}.$$

3. *Vérifier que :*

$$\mathrm{e}^{-t/2}\, u_n(t) = A\, \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{t^n}{n!}\, \mathrm{e}^{-t}\right).$$

$L_n(t) \equiv \mathrm{e}^{t/2}\, u_n(t)$ *est le polynôme de Laguerre d'ordre n.*

Exercice 3.4.4 *On considère l'équation différentielle du second ordre à coefficients variables,*

$$xy''(x) + 2y'(x) + xy(x) = 0$$

1. *Vérifier que les fonctions $x \mapsto \sin x/x$ et $x \mapsto \cos x/x$ constituent 2 solutions (indépendantes) de l'équation différentielle.*
2. *On note $Y(z)$ la TL de la fonction $y(x)$. Montrer que Y vérifie une équation différentielle du 1er ordre.*
3. *En déduire une des solutions de l'équation différentielle.*
4. *Pour quelle raison la méthode de résolution par TL ne permet-elle pas de retrouver les 2 solutions de l'équation différentielle ?*

Exercice 3.4.5 *On considère un milieu en contact en $x = 0$ avec un thermostat qui impose la température constante T. La température en un point du milieu ($x > 0$) est une fonction $\theta : (x, t) \mapsto \theta(x, t)$ de la distance x au thermostat, et du temps t. Cette fonction obéit à l'équation de la diffusion :*

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D\, \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2},$$

où D est une constante positive.

Résoudre cette équation par TL avec les conditions suivantes :

$$\theta(0, t) = T\, H(t), \quad \theta(x, 0) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \theta(x, t) = 0.$$

Exercice 3.4.6 *Utiliser la TL pour déterminer la solution* $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ *de l'équation d'onde unidimensionnelle :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

qui satisfait les conditions :

$$u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad u(0,t) = H(t)\, f(t), \quad \lim_{x \to +\infty} u(x,t) = 0.$$

Table des matières