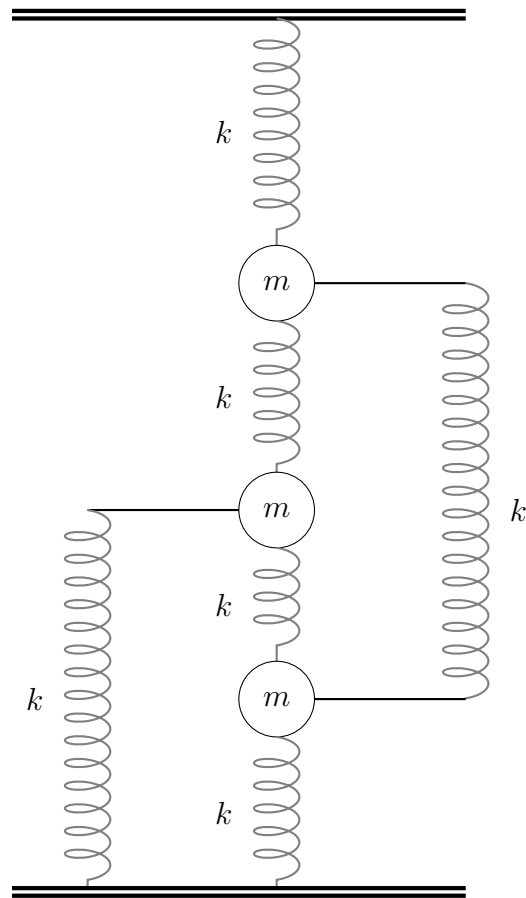


Oscillateurs linéaires

COURS ET EXERCICES



Chapter 1

Introduction

Notion d'oscillateur

Un système physique possède des positions d'équilibres stables lorsqu'il existe des forces au sein même du système qui tendent à le ramener vers les positions d'équilibre. Sous l'effet d'une perturbation extérieure, une des réponses possibles du système est un mode d'oscillation (ou vibration) périodique, généralement amorti, qui le ramène progressivement vers sa position d'équilibre.

L'archétype du système mécanique présentant un tel comportement est donné par le couple masse-ressort ou par les différents types de pendules.

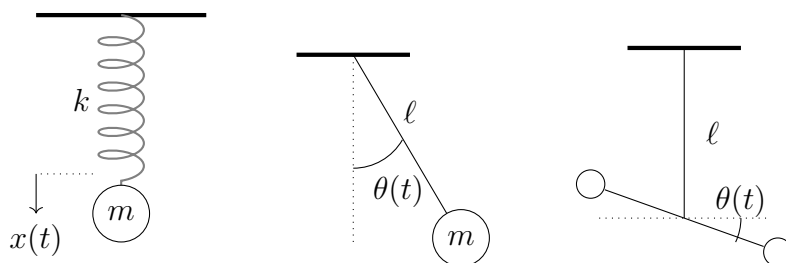


Figure 1.1: Exemples d'oscillateurs mécaniques : système masse-ressort, pendule simple et pendule de torsion.

Un oscillateur est dit “harmonique” si sa position au cours du temps est une fonction sinusoïdale. L'amplitude de l'oscillateur peut décroître si le système est soumis à des frottements mais l'évolution peut rester périodique si les frottements ne sont pas trop importants. Il est facile de montrer dans ce cas, que l'accélération et la force de rappel doivent être proportionnelle et opposée, ce qui implique que la force de rappel soit proportionnelle au déplacement:

$$x(t) = a \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \ddot{x}(t) \propto -x(t) \Rightarrow F \propto -x(t)$$

Pour cette raison, dans cette situation, on parle également d’“oscillateurs linéaires”. On peut remarquer que si tous les oscillateurs ne sont pas linéaires (et donc éventuellement anharmoniques) - et c’est même le cas le plus fréquent - il n’en reste pas moins vrai que tous les oscillateurs sont linéaires pour des écarts à l’équilibre suffisamment faibles.

En effet, une force de rappel linéaire est associée à une énergie potentielle quadratique (à 1 dimension $F \equiv -dE_P/dx$). Dans la situation la plus générale $E_p(x)$ est une fonction quelconque de la position x que l’on peut développer autour d’une position d’équilibre \bar{x} :

$$E_p(x) = E_p(\bar{x}) + (x - \bar{x}) \frac{dE_p(\bar{x})}{dx} + \frac{1}{2} (x - \bar{x})^2 \frac{d^2 E_p(\bar{x})}{dx^2} + \dots$$

Les positions d’équilibre étant déterminées par la condition $\frac{dE_p(\bar{x})}{dx} = 0$, et le choix de l’origine des énergies restant libre, on voit que le terme dominant pour les petits déplacements autour de l’équilibre est le terme quadratique, ce qui correspond au cas des oscillateurs linéaires¹.

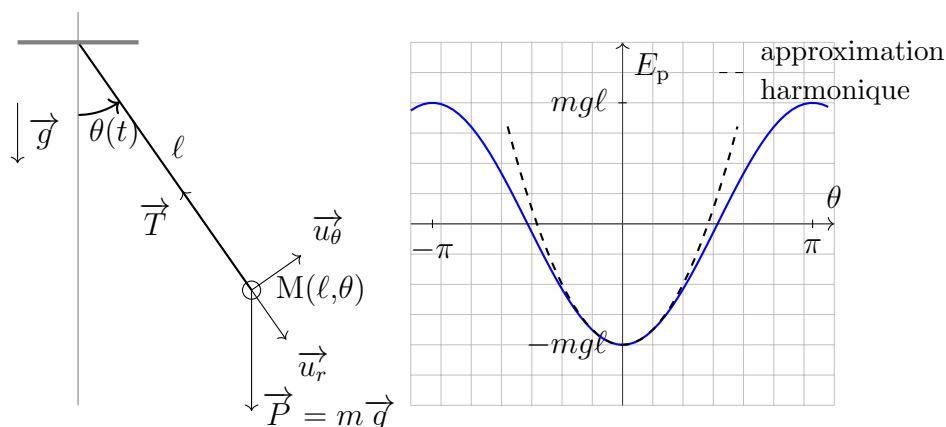


Figure 1.2: Pendule simple et approximation harmonique de son énergie potentielle de pesanteur.

Du fait de ce caractère générique, on rencontre des oscillateurs linéaires dans tous les domaines de la physique. En plus des systèmes mécaniques déjà cités, il est facile d’en mettre en évidence dans le domaine de l’électricité ou de l’électronique (circuit LC ou RLC), de l’optique (susceptibilité linéaire des matériaux), de la physique des solides (oscillations plasma des métaux), de la mécanique quantique (niveaux

¹Plus précisément, les positions d’équilibres stables exigeant que la dérivée seconde de l’énergie potentielle soit positive, l’énergie potentielle des oscillateurs harmoniques est une fonction quadratique *et* positive de la position.

d'énergie d'une molécule di-atomique), ou de la mécanique des fluides (oscillations de l'atmosphère dans certaines circonstances) ...

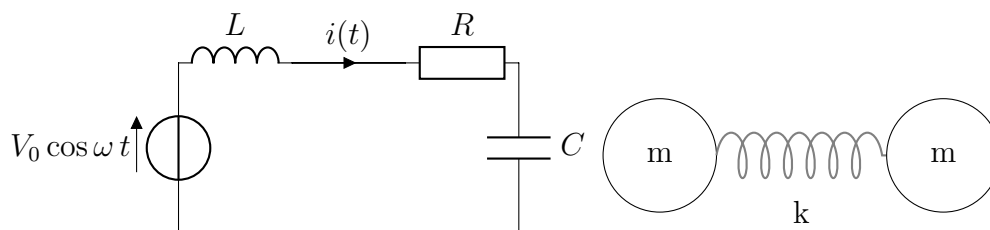


Figure 1.3: Exemple d'un oscillateur électrique (circuit RLC) et d'un modèle d'oscillateur quantique (molécule diatomique).

Outre la force de rappel linéaire, un oscillateur peut être soumis à des forces additionnelles, comme des forces de frictions dues au milieu ambiant et des forces extérieures appliquées à l'oscillateur. Ces 2 forces ont des effets opposés sur les oscillateurs : les forces de friction s'accompagnent de la perte d'énergie de l'oscillateur, tandis que les forces extérieures peuvent être à l'origine d'un apport d'énergie au système. Du point de vue mathématique, un oscillateur linéaire dissipatif forcé à 1 degré de liberté, c'est-à-dire dont la description du mouvement ne requiert qu'une seule variable, est décrit par une équation différentielle linéaire du second ordre, qui peut s'écrire de la façon suivante dans un système d'unités adaptées :

$$\ddot{\phi}(t) = -\phi(t) - \frac{1}{Q} \dot{\phi}(t) + f(t)$$

où $\phi(t)$ mesure l'écart à la position d'équilibre à l'instant t , Q est un paramètre mesurant le degré d'amortissement du milieu et $f(t)$ une force extérieure appliquée à l'oscillateur.

Contenu et plan du cours

Dans le 2ème chapitre de ce cours, nous commencerons par détailler le comportement d'un seul oscillateur linéaire en régime libre, c'est à dire en absence de forces extérieures. Puis, nous étudierons le couplage de 2 oscillateurs linéaires de façon à étudier le comportement des systèmes dits à 2 degrés de liberté. Dans ce dernier cas, le système à étudier sera décrit par 2 équations différentielles couplées :

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_1(t) &= -\phi_1(t) - \frac{1}{Q_1} \dot{\phi}_1(t) + C(\phi_2 - \phi_1), \\ \ddot{\phi}_2(t) &= -\phi_2(t) - \frac{1}{Q_2} \dot{\phi}_2(t) - C(\phi_2 - \phi_1), \end{aligned}$$

où le dernier terme des seconds membres est un terme de couplage entre les 2 oscillateurs. Les mathématiques offrent des méthodes extrêmement puissantes pour résoudre ce type de systèmes différentiels linéaires généralisables à des systèmes à un plus grand nombre de degrés de liberté. Nous dégagerons la notion de modes d'oscillations et de coordonnées normales, et nous discuterons la notion de battements ainsi que les échanges d'énergie entre les oscillateurs.

Cette même étude, à 1 ou 2 oscillateurs couplés, sera reprise dans le 3ème chapitre en régime forcé, c'est-à-dire en présence d'une force extérieure. Nous mettrons en évidence les régimes dits transitoires et permanents de ces systèmes forcés, tandis que l'analyse de la puissance fournie par la force extérieure aux oscillateurs nous conduira à la notion de résonance. Enfin, en partant d'une analyse des modes de ces oscillateurs couplés, nous introduirons les notions de fréquences de coupure, de bande passante et plus généralement de filtrage².

Enfin, en augmentant le nombre d'oscillateurs couplés et donc le nombre de degrés de libertés, nous montrerons dans le 4ème chapitre, par un passage à la limite continue, que l'on peut retrouver le comportement ondulatoire des systèmes décrits par une équation aux dérivées partielles du type des cordes vibrantes :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

où $u(x, t)$ est la déformation du système à la position x , à l'instant t et où v est la vitesse de propagation de l'onde de déformation. Ce passage à la limite conduit aussi bien aux ondes longitudinales telles que celles rencontrées en acoustique, qu'aux ondes transversales telles que celles intervenant en électromagnétisme ou en dynamique des structures.

En suivant cette approche, on passera progressivement de systèmes discrets où la masse est localisée dans l'espace (typiquement dans les masses accrochées aux

²Lorsque la force extérieure est périodique, nous montrerons que le comportement asymptotique d'un oscillateur linéaire, c'est-à-dire son comportement aux temps longs, est lui-même périodique de même période. Il n'en va plus de même lorsque l'oscillateur est non-linéaire. Par exemple, dans le cas général du pendule pour lequel l'équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$\ddot{\phi}(t) = -\sin \phi(t) - \frac{1}{Q} \dot{\phi}(t) + A \sin \omega t$$

le couplage de la non-linéarité et du forçage peut conduire à des solutions asymptotiques périodiques de périodes, $T = 2\pi/\omega, 2T, 4T, \dots$, voire à une évolution chaotique. L'étude des systèmes différentiels non linéaires (on parle maintenant de théorie des systèmes dynamiques ou théorie du chaos) constitue un champ disciplinaire immense, considérablement plus riche et complexe que celui des systèmes linéaires, mais dont on rencontre également des illustrations dans tous les domaines de la physique, voire des sciences.

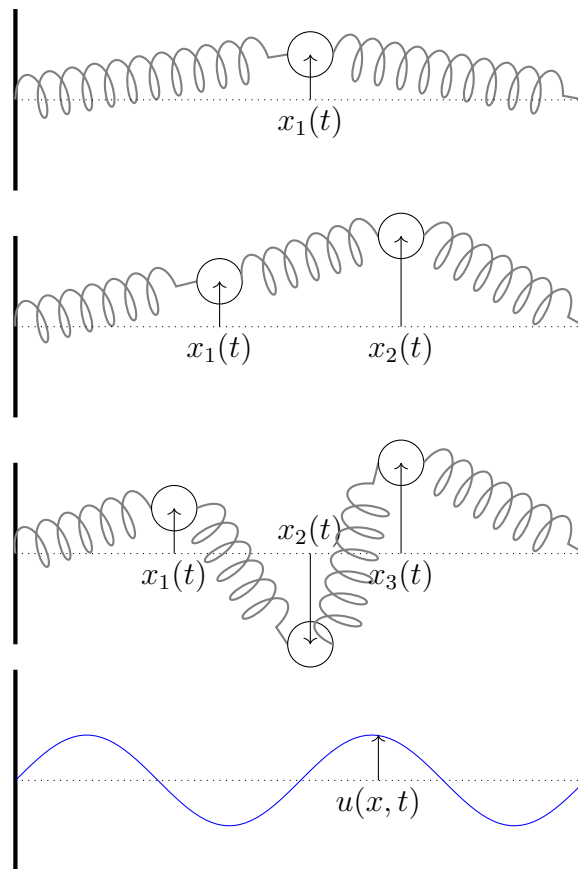


Figure 1.4: Exemple de passage à la limite continue par augmentation du nombre de degrés de liberté (cas des oscillations transversales de masses couplées élastiquement).

ressorts ou placées à l'extrémité des pendules), à des systèmes continus où la masse est répartie continûment dans l'espace (par exemple le long d'une corde).

Ce cours devrait donc vous permettre d'utiliser et d'approfondir les notions de mécanique acquises en L1 et au 1er semestre de L3, à établir un lien avec le cours d'ondes suivi en L2, le tout en utilisant vos connaissances mathématiques (en particulier sur les équations différentielles et l'algèbre linéaire).

Le plan du cours sera le suivant :

- Chapitre 1 : Introduction
- Chapitre 2 : Oscillations libres des systèmes à 1 et 2 degrés de liberté.

- Chapitre 3 : Oscillations forcées des systèmes à 1 et 2 degrés de liberté.
- Chapitre 4 : Oscillations des systèmes à n degrés de liberté et limite continue.

Bibliographie sélective

- L'ouvrage le plus proche du cours est probablement :
Le cours de physique de Berkeley, Ed. Armand Colin
 - Volume 1 : Mécanique (chapitres 5, 6, 7)
 - Volume 3 : Ondes (chapitres 1, 2, 3, 4)
- L'ouvrage suivant est d'un niveau plus élevé et plus synthétique :
Mécanique, L. Landau et E. Lifchitz, Ed. Mir (chapitre 5)
- Celui-ci contient des rappels de cours et de nombreux exercices corrigés de niveau variable :
Mechanical vibrations, William Seto, Ed. Schaum
- Un cours complet de mécanique :
Mécanique, fondements et applications, J. Ph. Pérez, Ed. Dunod (chapitres 10, 11, 27)
- Enfin, pour ceux d'entre vous qui voudraient se faire une idée d'un prolongement de ce cours vers les oscillateurs non-linéaires, on peut citer :
L'ordre dans le chaos, P. Berger, Y. Pomeau, C. Vidal, Ed. Hermann
The chaotic pendulum, M. Gitterman, Ed. World Scientific
The noisy oscillator, M. Gitterman, Ed. World Scientific

Chapter 2

Oscillations libres à 1 et 2 degrés de liberté

2.1 Oscillations libres à 1 degré de liberté

On dit qu'un système est à *1 degré de liberté* lorsqu'une seule variable est nécessaire pour décrire le mouvement.

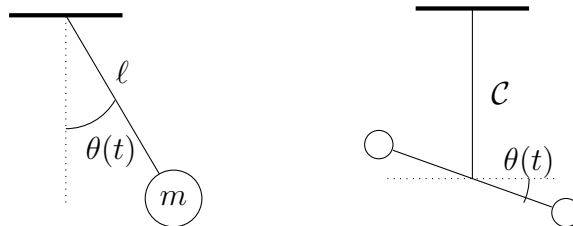
2.1.1 Exemples

Sans être exhaustif, on peut citer comme exemples d'oscillations à 1 degré de liberté :

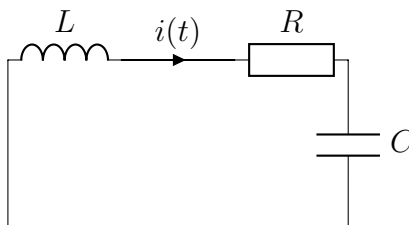
- les oscillations longitudinales ou transversales d'une masse accrochée ressort



- les oscillations des pendules pesants ou des pendules de torsion.



- les oscillations de charges ou de courant dans les circuits électriques



Mis à part le circuit RLC qui constitue intrinsèquement un exemple d'oscillateur linéaire puisqu'il n'est constitué que de composants linéaires (résistance, inductance et capacité), les oscillateurs mécaniques peuvent opérer en régime linéaire ou non-linéaire, selon que l'écart à la position d'équilibre est faible ou important.

Dans les différents exemples présentés ci-dessus, la variable décrivant le mouvement au cours du temps est soit une élongation $x(t)$, soit un angle $\theta(t)$, soit une charge électrique $q(t)$...

2.1.2 Equation du mouvement

Dans la mesure où on se restreint à l'étude des oscillateurs linéaires, la force de rappel s'exerçant sur le système est proportionnelle à la variable décrivant le mouvement. Dans les exemples présentés ci-dessus, ces forces s'écrivent sous la forme : $-kx(t)$ et $-mg\theta(t)$ dans le cas du ressort et du pendule, le couple de rappel du fil de torsion s'écrit $-C\theta(t)$, la tension aux bornes de la capacité est $-q(t)/C$, etc.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au système masse-ressort vertical par exemple (masse m , constante de rappel du ressort k de longueur à vide ℓ_0), s'écrit dans un repère lié au support, sous la forme suivante (schéma de droite):

$$m\ddot{z}(t) = -k(z(t) - \ell_0) + mg$$

A l'équilibre (schéma du milieu), le poids compense la force de rappel du ressort :

$$0 = -k(\ell_{eq} - \ell_0) + mg$$

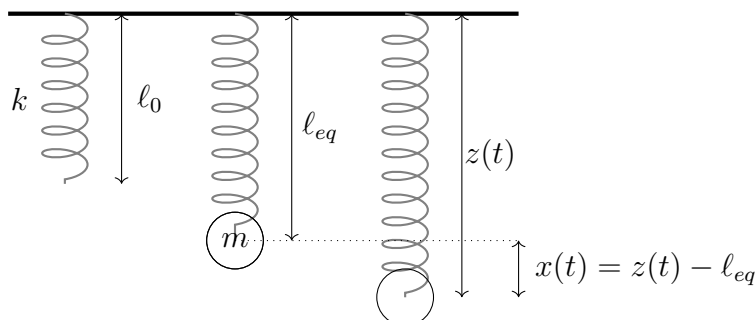
En faisant la différence de ces 2 équations, on trouve aussitôt :

$$m\ddot{z}(t) = -k(z(t) - \ell_{eq})$$

Il est commode d'introduire la position par rapport à l'équilibre, $x(t) = z(t) - \ell_{eq}$ qui, puisque $\ddot{x}(t) = \ddot{z}(t)$, conduit aussitôt à l'équation :

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t)$$

Cette situation est générique quel que soit le problème. On gagne souvent en simplicité en exprimant les déplacements par rapport à la position d'équilibre. C'est ce que nous ferons d'une façon systématique dans la suite de ce cours.



On peut se placer dans une situation un peu plus générale en introduisant une éventuelle force de frottement fluide¹ :

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - \alpha\dot{x}(t)$$

où $\dot{x}(t)$ est la vitesse relative de la masse par rapport au fluide et où α est le coefficient de frottement.

En introduisant les variables $2\lambda \equiv \alpha/m$ et $\omega_0^2 \equiv k/m$, cette équation s'écrit encore sous la forme :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.1)$$

Cette équation différentielle est l'équation caractéristique qui décrit le mouvement des oscillateurs libres à 1 degré de liberté.

Remarques

1. Il apparaît clairement à partir de cette équation que les deux paramètres caractérisant l'oscillateur, à savoir, λ et ω_0 , sont homogènes à l'inverse d'un temps.
2. Une équation présentant la même structure décrit les autres oscillateurs à partir des variables $\theta(t), q(t), \dots$
3. On parle d'*oscillateur amorti ou dissipatif* lorsque $\lambda \neq 0$, d'*oscillateur non amorti ou non dissipatif* lorsque $\lambda = 0$.

Application

Déterminer ω_0^2 pour les différents oscillateurs présentés plus haut.

¹Ce régime n'est qu'une approximation. Dans certains cas, on doit recourir à une force de frottement visqueux non-linéaire de type $-\alpha|\dot{x}|$, voire à des frottements solides du type donné par la loi de Coulomb.

2.1.3 Solutions des équations du mouvement

L'équation (2.1) est une équation différentielle linéaire, du 2nd ordre, homogène et à coefficients constants. Rappelons que les solutions d'une telle équation peuvent être recherchées sous la forme $x(t) = A e^{rt}$ ce qui, après substitution dans l'équation conduit à l'annulation du polynôme caractéristique :

$$P(r) = r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

dont les 2 racines sont :

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

Régime non amorti : $\lambda = 0$

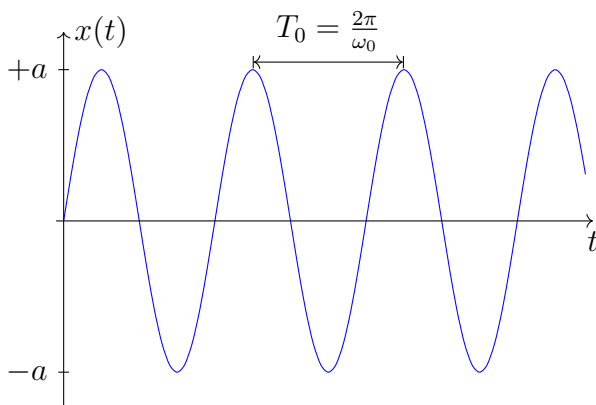
Dans ce cas, les 2 racines sont imaginaires pures et conjuguées : $r_{1,2} = \pm i\omega_0$. La solution générale de (2.1) s'écrit donc sous la forme :

$$x(t) = C_1 e^{+i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$$

où C_1 et C_2 sont 2 constantes complexes dépendant des conditions initiales. $x(t)$ devant être réelle, il est préférable d'écrire la solution sous les formes équivalentes suivantes :

$$x(t) = B_1 \cos(\omega_0 t) + B_2 \sin(\omega_0 t) \quad \text{ou} \quad x(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Dans cette dernière expression a est l'amplitude du mouvement et φ la phase au temps origine. Le mouvement est donc périodique, de période $T_0 \equiv 2\pi/\omega_0$, sans atténuation d'amplitude.



Régimes amorti et sur-amorti : $\lambda \neq \omega_0$

Dans ce cas, la solution générale peut s'écrire sous la forme :

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

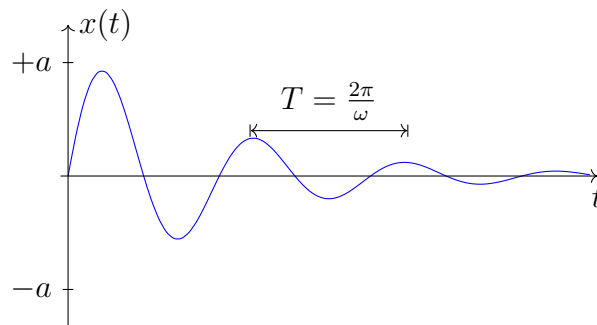
où $r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$.

Deux cas sont à distinguer :

- si $\lambda < \omega_0$, les 2 racines $r_{1,2}$ sont imaginaires conjuguées : $r_{1,2} = -\lambda \pm i\omega$ où $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$. la solution peut donc s'écrire sous la forme :

$$x(t) = a e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Il s'agit à nouveau d'un mouvement périodique (on dit parfois pseudo-périodique), de période $T = 2\pi/\omega > T_0$, d'amplitude décroissante avec le temps caractéristique λ^{-1} . L'oscillateur est qualifié *d'amorti*.



- si $\lambda > \omega_0$, les 2 racines $r_{1,2}$ sont réelles et négatives. La solution est une combinaison de 2 exponentielles avec 2 temps caractéristiques différents $r_{1,2}^{-1}$:

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left(C_1 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{+\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} \right)$$

Le mouvement est sans oscillation et le régime est dit *sur-amorti* ou *apériodique*.

Application

Déterminer le temps caractéristique dominant lorsque $\omega_0 \ll \lambda$, et en déduire le comportement aux temps longs ainsi que l'équation différentielle vérifiée par l'oscillateur dans cette situation.

Régime critique : $\lambda = \omega_0$

Dans, ce cas, $r_{1,2} = -\lambda$ est racine double du polynôme caractéristique. Le déplacement vérifie donc l'équation :

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\lambda t}$$

Le mouvement est non oscillant avec 1 seul temps caractéristique λ^{-1} . Ce régime, également apériodique, est dit *critique*.

Globalement, on pourra retenir que le cas particulier $\lambda = \omega_0$ sépare les cas des réponses périodiques ($\lambda < \omega_0$) et non-périodiques ($\lambda \geq \omega_0$) des oscillateurs linéaires.

2.1.4 Facteur de qualité

Nous avons déjà souligné que l'équation (2.1) régissant le mouvement des oscillateurs libres comprend 2 temps caractéristiques, à savoir $(2\lambda)^{-1}$ et ω_0^{-1} . On peut donc former un nombre sans dimension, Q , tel que :

$$Q \equiv \frac{\omega_0}{2\lambda}$$

Q s'appelle *le facteur de qualité* de l'oscillateur. Le sens de cette dénomination apparaîtra plus clairement lorsque nous étudierons les oscillateurs forcés.

On peut mettre facilement en évidence le facteur de qualité en procédant à un adimensionnement de l'équation (2.1). Pour cela, introduisons les 2 grandeurs sans dimension :

$$X(t) \equiv \frac{x(t)}{x(0)} \quad \text{et} \quad \tau \equiv \omega_0 t$$

Il est facile de montrer que l'équation (2.1) s'écrit alors de la façon suivante :

$$\ddot{X}(\tau) + \frac{1}{Q}\dot{X}(\tau) + X(\tau) = 0$$

On constate que le terme dissipatif (celui proportionnel à la vitesse) disparaît lorsque $Q \rightarrow \infty$. On en déduit donc plus Q est grand, moins l'oscillateur est amorti.

Nous reviendrons plus longuement sur le sens physique du facteur de qualité lorsque nous traiterons les régimes forcés.

Application

Quelle valeur maximum faut-il donner à Q pour qu'un oscillateur retourne au plus vite et sans oscillations à l'équilibre (c'est ce qu'on souhaite par exemple pour les systèmes de suspension des automobiles) ?

2.1.5 Aspects énergétiques

L'énergie mécanique E de l'oscillateur, somme de l'énergie cinétique, E_c , et de l'énergie potentielle, E_p , s'écrit :

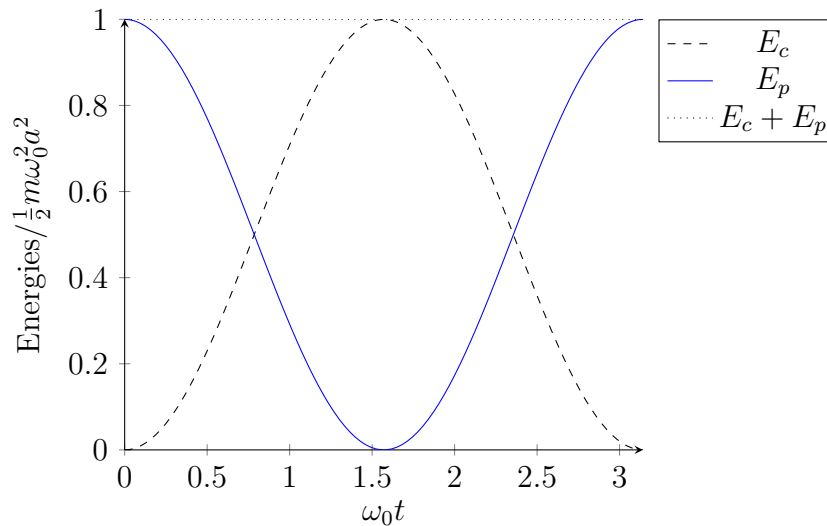
$$E = E_c(t) + E_p(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t)$$

- **Cas sans amortissement** ($\lambda = 0$)

Dans ce cas, on a vu que $x(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi)$. En utilisant le fait que $k = m\omega_0^2$, on obtient aussitôt :

$$E = \frac{1}{2}ma^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2$$

Comme on pouvait s'y attendre en absence de dissipation, l'énergie est constante et proportionnelle au carré de l'amplitude. Il y a un échange permanent entre les 2 formes d'énergies : lorsque l'énergie cinétique est maximale, l'énergie potentielle est minimale et vice versa.



- **Cas avec amortissement** ($\lambda \neq 0$)

Dans ce cas, comme $x(t) \propto e^{-\lambda t}$, on en déduit que l'énergie instantanée, $E(t)$, décroît avec le temps :

$$E(t) \propto e^{-2\lambda t}$$

Dans le cas particulier d'un milieu peu dissipatif, plus précisément lorsque $\lambda \ll \omega_0$ (ou $Q \geq 1/2$), l'amplitude ne varie presque pas pendant une période d'oscillation $T = 2\pi/\omega$. Il est alors intéressant de calculer l'énergie moyennée sur une période, $\overline{E}(t)$ qui conduit au résultat suivant (le calcul sera détaillé en TD) :

$$\overline{E}(t) \equiv \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt \approx \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 e^{-2\lambda t}$$

L'énergie moyenne décroît donc de façon exponentielle avec une constante de temps $(2\lambda)^{-1}$.

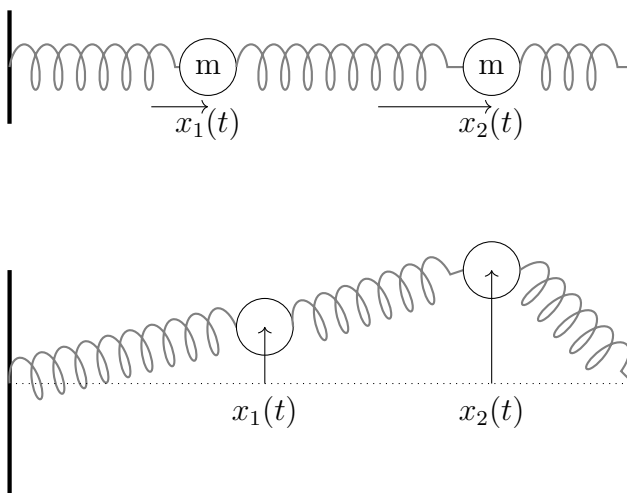
2.2 Oscillations libres à 2 degrés de liberté

Considérons maintenant des systèmes à 2 degrés de libertés, c'est-à-dire des systèmes pour lesquels 2 variables sont nécessaires pour décrire le mouvement au cours du temps.

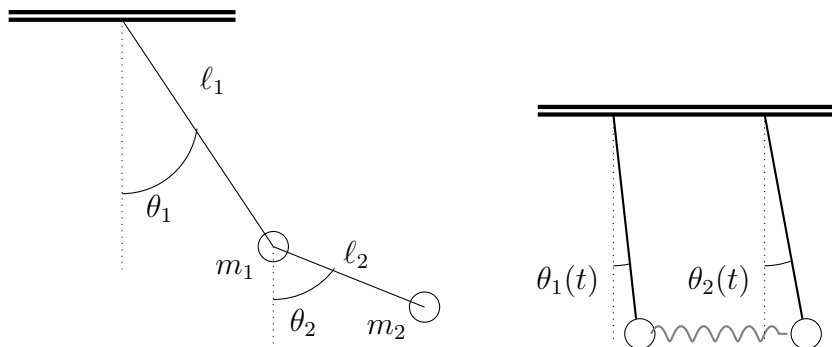
2.2.1 Exemples

En reprenant les différentes catégories d'oscillateurs déjà discutés pour les systèmes à 1 degré de liberté, on peut citer :

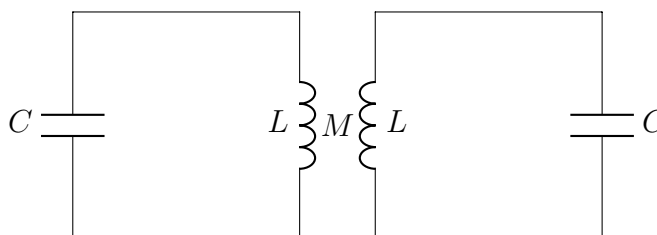
- les oscillations longitudinales ou transversales de 2 oscillateurs mécaniques couplés élastiquement.

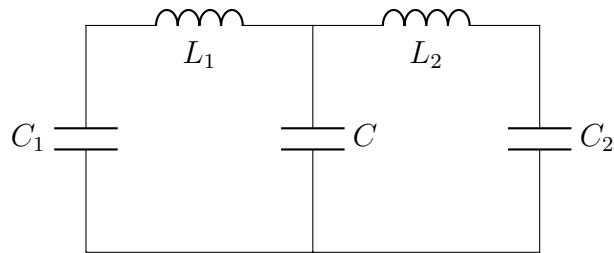


- les oscillations d'un pendule double ou de 2 oscillateurs simples couplés élastiquement.



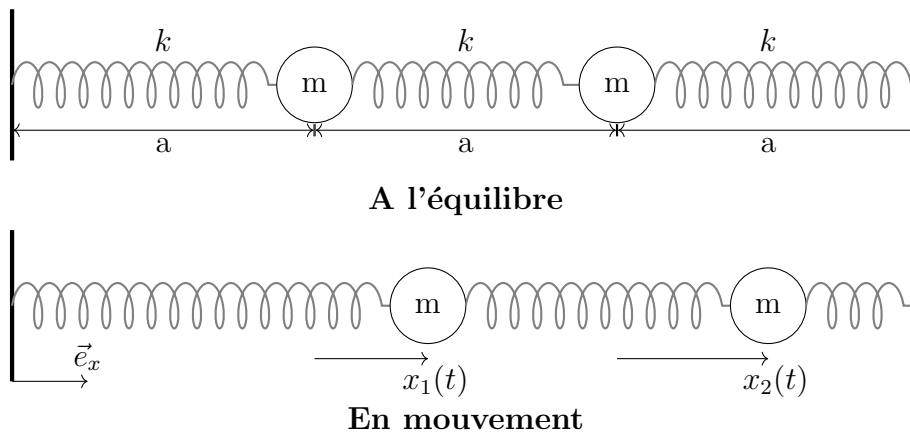
- les circuits électriques couplés par inductance mutuelle ou par capacité.





2.2.2 Premier exemple : introduction des modes

Pour introduire le sujet, considérons d'abord un cas particulier, celui des oscillations longitudinales de 2 masses couplées élastiquement en absence de dissipation.



Les équations du mouvement projetées sur l'axe x s'écrivent :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + k(x_2 - x_1), \\ m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) - kx_2, \end{aligned}$$

En effet, la 1ère masse est reliée à 2 ressorts.

- Celui de gauche exerce une force de rappel proportionnelle à son allongement x_1 par rapport à la position d'équilibre. Si x_1 est positif (cas du schéma), le ressort est allongé et la force de rappel est dirigée vers la gauche, d'où la projection de la force $-kx_1$. Si x_1 était négatif, le ressort serait comprimé et repousserait la masse vers la droite, ce qui est encore vérifié pour la projection de la force $-kx_1$, puisque x_1 est négatif.

- Le ressort à droite de la masse exerce également une force de rappel proportionnelle à son allongement $x_2 - x_1$. Si $x_2 - x_1$ est positif (cas du schéma), le ressort est allongé et ramènera la 1ère masse vers la droite. La projection de la force est donc bien $+k(x_2 - x_1)$. Si $x_2 - x_1$ est négatif, le ressort est comprimé et repoussera la 1ère masse vers la gauche, ce qui est à nouveau compatible avec l'expression $+k(x_2 - x_1)$

puisque $x_2 - x_1 < 0$.

Le même raisonnement s'applique à la 2ème masse.

En posant $\omega_0^2 = k/m$, les équations s'écrivent également :

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -2\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2, \\ \ddot{x}_2 &= +\omega_0^2 x_1 - 2\omega_0^2 x_2,\end{aligned}$$

qui correspond à un système de 2 équations différentielles couplées. Cependant, on peut remarquer par addition et différence que :

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 &= -\omega_0^2 (x_1 + x_2), \\ \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 &= -3\omega_0^2 (x_1 - x_2)\end{aligned}$$

On en déduit donc que le changement de variables $y_1 = x_1 + x_2$ et $y_2 = x_1 - x_2$, conduit au système d'équations différentielles :

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= -\omega_0^2 y_1, \\ \ddot{y}_2 &= -3\omega_0^2 y_2\end{aligned}$$

On constate donc qu'un bon changement de variables permet de découpler les 2 équations différentielles, dont les solutions sont bien entendu :

$$\begin{aligned}y_1(t) &= a_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \\ y_2(t) &= a_2 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \varphi_2)\end{aligned}$$

Enfin, comme $2x_1 = y_1 + y_2$ et $2x_2 = y_1 - y_2$, on obtient la solution du problème initial sous la forme :

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \frac{a_1}{2} \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + \frac{a_2}{2} \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \varphi_2), \\ x_2(t) &= \frac{a_1}{2} \cos(\omega_0 t + \varphi_1) - \frac{a_2}{2} \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \varphi_2),\end{aligned}$$

Dans ces expressions, $a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2$ sont déterminés par les conditions initiales.

Les solutions générales du mouvement des 2 oscillateurs couplés sont donc des combinaisons linéaires de 2 mouvement harmoniques simples à 2 fréquences caractéristiques (ici ω_0 et $\sqrt{3}\omega_0$) que l'on appelle *les fréquences propres* du système.

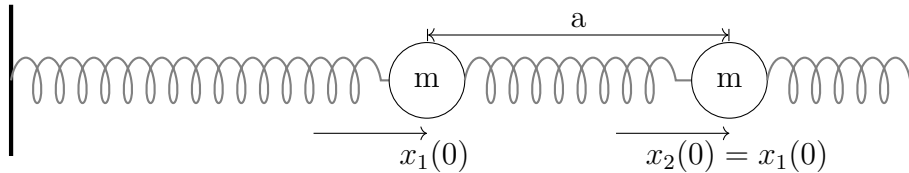
On dit aussi que le mouvement général de vibration des oscillateurs est une superposition de *modes normaux (ou propres)*. Les variables (y_1, y_2) qui découpent le système sont appelées *les coordonnées normales*.

2.2.3 Interprétation physique des modes

Supposons que les 2 masses soient déplacées de la même quantité à $t = 0$: $x_1(0) = x_2(0)$ sans vitesses initiales. Il est facile de vérifier à partir de la solution générale que $a_2 = 0$, de sorte que l'on a également $x_1(t) = x_2(t)$ à tous les instants ultérieurs :

$$x_1(0) = x_2(0) \implies x_1(t) = x_2(t) = \frac{a_1}{2} \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$

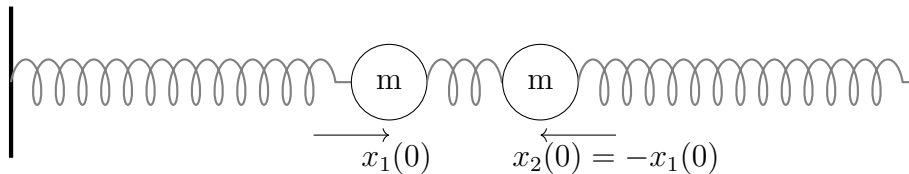
Puisque dans cette situation, les 2 masses ont le même mouvement, à la même pulsation ω_0 , chacune d'elles ressent la même force de rappel. Ce point est facile à comprendre si on représente les masses à l'instant origine :



Puisque le déplacement des 2 masses est identique, le ressort central n'est ni allongé, ni raccourci. Il n'exerce aucune force de rappel : les 2 masses ne sont donc pas couplées. Chacune d'elle ressent la même force, $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 = -k \mathbf{x}_1$, et donc à la même fréquence caractéristique des ressorts, à savoir ω_0 . Il s'agit donc d'un mouvement d'oscillation d'ensemble des 2 masses. Ce mode est appelé *le mode de fréquence basse ou mode symétrique*.

En suivant la même démarche, on peut se demander s'il existe une configuration initiale des masses qui conduise à une force de rappel avec la 2ème fréquence propre, $\sqrt{3}\omega_0$, c'est-à-dire une force sur la 1ère masse telle que $\mathbf{f}_1 = -3k \mathbf{x}_1$.

Le ressort de gauche ramenant la masse avec une force $\mathbf{f}_1 = -k \mathbf{x}_1$, on en déduit qu'il faut que le ressort central soit comprimé de $2x_1$ pour conduire à la force de rappel recherchée (notez que si le ressort central était allongé de $2x_1$, il exercerait une force de rappel de sens opposé à la force de rappel du ressort de gauche). La situation physique serait donc la suivante :



Dans cette configuration initiale, la masse de droite ressent une force égale et opposée à celle de gauche : $\mathbf{f}_2 = -\mathbf{f}_1$ qui se poursuit dans le temps. Il s'agit donc d'un

mouvement d'oscillation en sens opposé des 2 masses. On pourra vérifier facilement l'implication suivante à partir de la solution générale :

$$x_2(0) = -x_1(0) \implies x_1(t) = -x_2(t) = \frac{a_2}{2} \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \varphi_2)$$

Ce mode est *le mode de fréquence haute ou mode antisymétrique*.

Dans certains cas simples, l'analyse des symétries du problème permet de trouver les modes normaux du système étudié en recherchant les configurations où une même force (en module) s'applique sur les masses.

2.2.4 Solutions des équations du mouvement : méthode modale

Puisqu'on se limite aux oscillateurs et au couplage linéaires, dans le cas général, le système différentiel à résoudre aura la forme suivante :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -a_{11} x_1 - a_{12} x_2, \\ \ddot{x}_2 &= -a_{21} x_1 - a_{22} x_2, \end{aligned}$$

où on pourra noter que les a_{ij} sont homogènes à des fréquences (ou pulsations) au carré.

Posons

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Le système différentiel peut alors s'écrire sous la forme compacte suivante :

$$\ddot{\mathbf{x}} = -A \mathbf{x}$$

Trouver les modes propres qui découplent les 2 équations différentielles revient à diagonaliser la matrice A . Notons, ω_1^2 et ω_2^2 les 2 valeurs propres de A telle que :

$$D = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix}$$

Puisque $D = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage, on a :

$$\ddot{\mathbf{y}} = -PDP^{-1} \mathbf{x}$$

de sorte que le changement de variable $\mathbf{y} = P^{-1} \mathbf{x}$ conduit à :

$$\ddot{\mathbf{y}} = -D \mathbf{y} \iff \begin{cases} \ddot{y}_1 = -\omega_1^2 y_1 \\ \ddot{y}_2 = -\omega_2^2 y_2 \end{cases}$$

(y_1, y_2) sont donc les coordonnées normales et (ω_1, ω_2) les fréquences propres.

La solution du problème initial est donné par :

$$\mathbf{x} = P \mathbf{y}$$

où P est la matrice de passage dont les colonnes sont formées des composantes des vecteurs propres exprimés dans la base initiale.

Application

Utilisez la méthode modale pour retrouver les résultats obtenus dans le cas particulier des oscillations longitudinales des 2 masses couplées élastiquement.

2.2.5 Solutions des équations du mouvement : méthode directe

Alternativement à la méthode modale, on peut chercher les solutions du système différentiel $\ddot{\mathbf{x}} = -A \mathbf{x}$ sous la forme de 2 exponentielles de même pulsation, mais d'amplitudes différentes :

$$x_1(t) = A e^{i\omega t} \quad \text{et} \quad x_2(t) = B e^{i\omega t}$$

En substituant dans le système différentiel, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \omega^2 - a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les solutions non nulles de ce système algébrique sont telles que le déterminant soit nul², i.e. :

$$(\omega^2 - a_{11})(\omega^2 - a_{22}) - a_{12}a_{21} = 0$$

Les 2 solutions positives ω_1 et ω_2 , nécessairement réelles puisque le système est sans amortissement, sont les pulsations propres du système étudié.

Les amplitudes A et B sont obtenues en remplaçant ω_1 et ω_2 dans le système algébrique. On trouve, respectivement pour chacun des modes :

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{\omega_1^2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\omega_1^2 - a_{22}} \quad \text{et} \quad \frac{B_2}{A_2} = \frac{\omega_2^2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\omega_2^2 - a_{22}}$$

La solution générale du système différentiel est une combinaison linéaire des 2 modes :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ x_2(t) &= B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned}$$

²Il s'agit bien sûr du polynôme caractéristique de la matrice A dont les racines sont les valeurs propres obtenues par la méthode modale.

Notez que les rapports B_1/A_1 et B_2/A_2 étant fixés, on peut encore écrire pour $x_2(t)$:

$$x_2(t) = \frac{B_1}{A_1} A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{B_2}{A_2} A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

de sorte que, comme il se doit, le système ne dépend des conditions initiales que via les 4 paramètres, A_1, A_2, φ_1 et φ_2 ³.

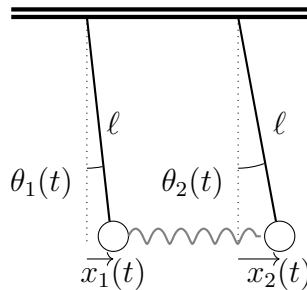
Application

Déterminer les rapports B_1/A_1 et B_2/A_2 dans le cas des oscillations longitudinales de 2 masses couplées élastiquement, et comparer avec les résultats obtenus précédemment.

2.2.6 Rôle de la dissipation

L'ajout d'une force de dissipation visqueuse ne modifie pas le caractère linéaire du problème qui peut donc être traité par les mêmes approches.

A titre d'illustration, considérons 2 pendules couplés élastiquement, dont les masses sont immergées dans un milieu de coefficient d'amortissement α freinant leur mouvement.



Aux petits angles, l'équation du mouvement de la 1ère masse s'écrit selon la direction horizontale :

$$m\ddot{x}_1 = -\alpha \dot{x}_1 + f_{1x}$$

³Notez toutefois que si une des fréquences propre est nulle (cf. l'exercice sur le mode du corps solide), la coordonnée normale associée, disons y_1 , vérifie l'équation différentielle $\ddot{y}_1 = 0$, avec pour conséquence que la solution générale s'écrit dans ce cas :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 t + B_1 + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ x_2(t) &= A_1 t + B_1 + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned}$$

où $f_{1x} = -\frac{\partial E_p}{\partial x_1}$ est la force totale qui s'exerce sur la masse. Celle-ci ressent la force de rappel du ressort, l'attraction de la pesanteur et la tension du fil qui ne travaille pas. L'énergie potentielle correspondante est :

$$E_p = \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 + mgl(1 - \cos \theta_1)$$

Dans la limite des petits déplacements, $1 - \cos \theta_1 \approx \theta_1^2/2$ avec $\theta_1 \approx \sin \theta_1 = x_1/\ell$, l'expression de E_p se simplifie et on obtient :

$$f_{1x} = -k(x_1 - x_2) - \frac{mg}{\ell} x_1$$

On en déduit donc que les équations du mouvement peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -2\lambda \dot{x}_1 + \frac{k}{m}(x_2 - x_1) - \frac{g}{\ell} x_1, \\ \ddot{x}_2 &= -2\lambda \dot{x}_2 - \frac{k}{m}(x_2 - x_1) - \frac{g}{\ell} x_2 \end{aligned}$$

ce que l'on peut encore écrire sous la forme compacte :

$$\ddot{\mathbf{x}} = -A \mathbf{x} - 2\lambda I \dot{\mathbf{x}}$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{g}{\ell} + \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{\ell} + \frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

où I est la matrice identité. Les 2 valeurs propres de A sont :

$$\omega_-^2 = \frac{g}{\ell} \quad \text{et} \quad \omega_+^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}$$

D étant la matrice diagonale formée à partir de ces 2 fréquences propres, les coordonnées normales vérifient l'équation :

$$\ddot{\mathbf{y}} = -D \mathbf{y} - 2\lambda I \dot{\mathbf{y}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ddot{y}_1 = -\omega_-^2 y_1 - 2\lambda \dot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 = -\omega_+^2 y_2 - 2\lambda \dot{y}_2 \end{cases}$$

Le problème initial se ramène donc à l'étude de 2 oscillateurs amortis découplés de pulsations ω_- et ω_+ .

Comme $\mathbf{x} = P \mathbf{y}$, la solution du problème initial sera une combinaison linéaire des coordonnées normales. Le détail de la solution dépend des ratios λ/ω_{\pm} . Par exemple, dans le cas où $\lambda < \omega_- < \omega_+$, la solution sera une combinaison linéaire de mouvements harmoniques d'amplitudes décroissantes de fréquences $\sqrt{\omega_-^2 - \lambda^2}$ et $\sqrt{\omega_+^2 - \lambda^2}$. Mais si, $\omega_- < \lambda < \omega_+$, la solution sera une combinaison linéaire d'un mouvement harmonique et d'une exponentielle décroissante.

Application

Interpréter physiquement la nature des oscillations de chacun des modes propres. Faire un schéma.

2.2.7 Battements

Le phénomène de battements de 2 ondes est un phénomène général qui s'observe lors de la superposition de 2 signaux périodiques de fréquences proches. Dans le cadre de ce cours, cela peut se produire lorsque les fréquences propres de 2 oscillateurs couplés sont du même ordre de grandeur.

Considérons donc 2 oscillateurs couplés, non amortis pour simplifier, de fréquences propres ω_1 et ω_2 . Pour dégager l'essence du phénomène, considérons des conditions initiales telles que les déplacements des 2 oscillateurs vérifient les équations :

$$\begin{aligned}x_1(t) &= a \cos(\omega_1 t) + a \cos(\omega_2 t), \\x_2(t) &= a \cos(\omega_1 t) - a \cos(\omega_2 t)\end{aligned}$$

(les conditions initiales sont donc telles que $x_1(0) = 2a$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$).

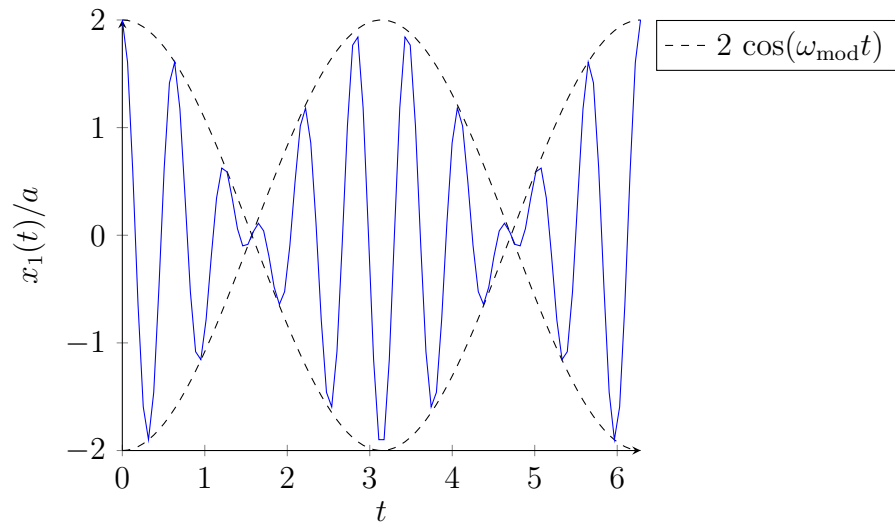
En utilisant les relations de somme et différence de 2 cosinus, on trouve aussitôt :

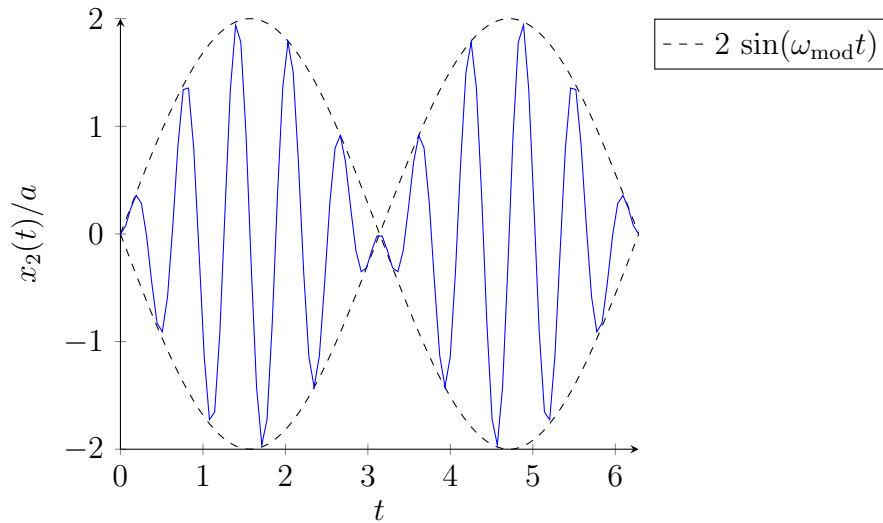
$$\begin{aligned}x_1(t) &= 2a \cos(\omega_{\text{mod}} t) \cos(\omega_M t), \\x_2(t) &= 2a \sin(\omega_{\text{mod}} t) \sin(\omega_M t)\end{aligned}$$

où les fréquences angulaires moyenne, ω_M et de modulation, ω_{mod} , sont définies par :

$$\omega_M \equiv \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{et} \quad \omega_{\text{mod}} \equiv \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$$

Si les 2 fréquences propres, ω_1 et ω_2 sont proches, $\omega_M \approx \omega_1$ et $\omega_{\text{mod}} \approx 0$: les amplitudes des déplacements sont modulés avec des amplitudes $2a \cos(\omega_{\text{mod}} t)$ et $2a \sin(\omega_{\text{mod}} t)$, de période $2\pi/\omega_{\text{mod}}$ très grande devant la période de $2\pi/\omega_M$.





Dans le cas étudié, les conditions initiales sont telles que le 1er oscillateur est écarté de la distance $2a$ de sa position d'équilibre sans vitesse initiale, tandis que le 2ème oscillateur est au repos à sa position d'équilibre.

L'observation de ces courbes montre alors que tandis que l'amplitude du 1er oscillateur diminue jusqu'à s'arrêter, dans le même temps, l'amplitude du 2ème oscillateur croît jusqu'à une valeur maximale, puis l'amplitude du 2ème oscillateur décroît à son tour tandis que celle du 1er oscillateur croît ...

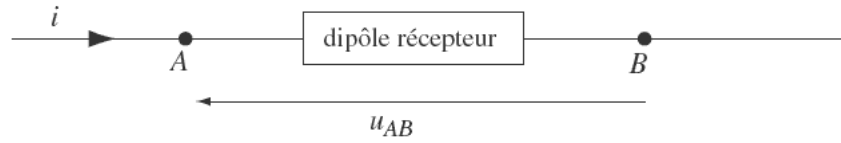
L'énergie totale du système est constante au cours du temps (il n'y a pas de dissipation par hypothèse), mais passe alternativement d'un oscillateur à l'autre au cours du temps.

Application

On considère le cas des 2 pendules couplés élastiquement discuté dans la section précédente. Quelles conditions les paramètres physiques, k, ℓ, m , qui caractérisent les pendules doivent-ils vérifier pour observer des battements ?

2.3 Analogies électro-mécaniques

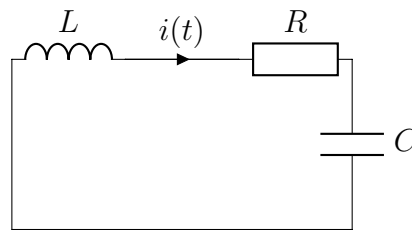
Les 3 principaux éléments passifs des circuits électriques sont les résistances, les condensateurs et les inductances. Chacun de ces éléments constitue une idéalisation pour lesquels on peut écrire une relation entre intensité du courant, I , et tension électrique, V , sous la forme suivante (en convention récepteur où I et V sont de sens opposés) :



- Résistance : $V = R I$
- Inductance : $V = L \frac{dI}{dt}$
- Condensateur : $V = \frac{1}{C} \int^t I dt$

R , L et C correspondent respectivement à la résistance, au coefficient d'auto-induction et à la capacité.

En assemblant ces éléments au sein d'un circuit, comme par exemple dans le cas d'un circuit RLC en régime libre (sans source de tension extérieure) :



et en écrivant la loi des mailles qui dit que la somme des tensions aux bornes des éléments doit être nulle, on obtient l'équation intégro-différentielle :

$$L \frac{dI}{dt} + R I + \frac{1}{C} \int^t I dt = 0$$

En utilisant le fait que l'intensité du courant, I , est reliée à la charge, q , traversant le circuit par la relation :

$$I = \frac{dq}{dt},$$

on obtient l'équation différentielle :

$$L \ddot{q}(t) + R \dot{q}(t) + \frac{1}{C} q(t) = 0$$

Cette équation est formellement analogue à l'équation de l'oscillateur mécanique :

$$m \ddot{x}(t) + \alpha \dot{x}(t) + k x(t) = 0$$

Les effets d'inertie, de dissipation et d'élasticité de l'oscillateur mécanique apparaissent donc respectivement dans l'inductance, la résistance et la capacité de l'oscillateur

électrique. Du point de vue énergétique, l'énergie mécanique correspond à l'énergie emmagasinée dans l'inductance et dans la capacité, tandis que l'énergie dissipée par frottements a pour analogue électrique l'énergie dissipée dans la résistance.

Les tableaux suivants résument les différentes correspondances :

$x(t)$	$\dot{x}(t)$	m	α	k
$q(t)$	$I(t)$	L	R	$\frac{1}{C}$

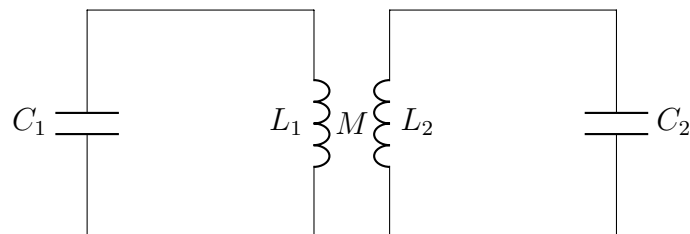
 \implies

2λ	ω_0^2	E_c	E_p	Q
$\frac{R}{L}$	$\frac{1}{LC}$	$\frac{1}{2}LI^2$	$\frac{q^2}{2C}$	$\frac{L\omega_0}{R}$

Tout ce qui a été dit sur les solutions des oscillateurs mécaniques en régime libre peut-être repris, mot pour mot, pour l'oscillateur électrique en se servant des grandeurs équivalentes.

De la même façon que l'on peut coupler des oscillateurs mécaniques, on peut coupler des oscillateurs électriques et obtenir ainsi des systèmes à plusieurs degrés de liberté.

L'analogie électrique des oscillateurs mécaniques couplés par des ressorts, c'est à dire par élasticité, est un couplage par capacité (cf. Td). Disons un mot sur un couplage, peut-être plus naturel dans le cas électrique que dans le cas mécanique, à savoir le couplage par inductance mutuelle. Le schéma suivant en présente un exemple simple :



Rappelons que du fait de sa topologie (enroulement de spires), le courant I qui circule dans une inductance isolée est à l'origine d'un flux magnétique ϕ dont une partie traverse l'inductance. Si le courant varie dans le temps, la variation temporelle du flux induit à son tour une différence de potentiel aux bornes de l'inductance : c'est le phénomène d'auto-induction. En résumé :

$$\phi(t) = LI(t) \implies V = L \frac{dI}{dt}$$

Lorsque 2 inductances de coefficients L_1 et L_2 sont à proximité, une partie du flux créé par le courant I_1 circulant dans la 1ère inductance se retrouve dans la 2ème

inductance et contribue ainsi à la différence de potentiel V_2 apparaissant dans celle-ci :

$$\phi_2(t) = L_2 I_2 + M I_1 \quad \Longrightarrow \quad V_2 = L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}$$

et réversiblement :

$$\phi_1(t) = L_1 I_1 + M I_2 \quad \Longrightarrow \quad V_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}$$

Dans ces expressions, M désigne le coefficient de mutuelle inductance. Le terme de couplage est clairement proportionnel à la dérivée première du courant, c'est-à-dire à la dérivée seconde de la charge. Il s'agirait donc d'un couplage par inertie pour un oscillateur mécanique.

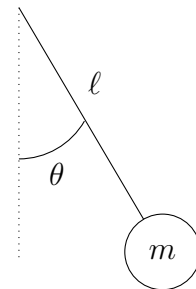
Application

Imaginez un dispositif de couplage par masse dans le cas d'oscillateurs mécaniques.

2.4 Exercices

Pendule simple

On considère le dispositif classique du pendule simple : fil rigide de masse négligeable et de longueur ℓ , angle θ , masse m placée dans le champ de pesanteur, frottements négligeables.



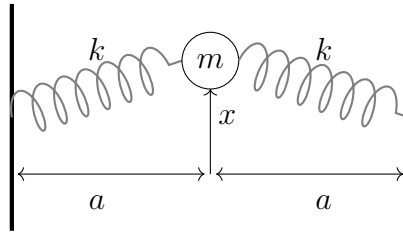
1. Pour décrire le mouvement de la masse m , on introduit la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Déterminer la position $\vec{r}(t)$, la vitesse $\vec{v}(t)$ et l'accélération $\vec{a}(t)$ dans cette base.
2. Etablir l'équation différentielle satisfaite par l'angle θ en utilisant la conservation de l'énergie mécanique.
3. Retrouvez ce résultat en utilisant le théorème du moment cinétique.
4. Déterminer la tension du fil par application du principe fondamental de la dynamique.

Exprimer le résultat en fonction de θ et de l'angle maximal θ_0 atteint par la masse.

- La masse est lâchée sans vitesse initiale à 90 degrés de la verticale.
Quelle doit être la résistance du fil ?
- Déterminer la période des oscillations dans l'approximation linéaire.

Oscillations transversales d'une masse

On considère une masse m placée entre 2 ressorts identiques de constante de raideur k . La longueur des ressorts au repos (non accrochés à la masse) est a_0 . On négligera l'effet de la pesanteur et les éventuels frottements.



- A l'équilibre les ressorts sont horizontaux (la pesanteur est négligée) et ont une longueur a .
Quelle est la tension T_0 de chaque ressort dans cette situation d'équilibre ?
- On écarte vers le haut la masse d'une distance x .
Quelle est la nouvelle tension T des ressorts ?
Établir l'équation du mouvement de la masse.
- Justifiez que l'oscillateur est non-linéaire.
- Sous quelle approximation peut-on considérer que l'oscillateur est linéaire ?
En déduire l'expression de la pulsation propre de l'oscillateur en fonction de T_0 , m et a .

Energie moyenne d'un oscillateur

On considère un oscillateur de masse m décrit par l'équation différentielle :

$$\ddot{x}(t) + 2\lambda \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

où $2\lambda = \alpha/m$ et $\omega_0^2 = k/m$ avec α et k qui représentent respectivement le coefficient d'amortissement visqueux et la constante de raideur de l'oscillateur.

- Préciser la nature de l'oscillateur.

2. Quelle est la solution générale de cette équation différentielle ?
3. On considère désormais que le système est tel que $\lambda < \omega_0$.
Déterminer la fréquence angulaire ω des oscillations et écrire la solution de l'équation différentielle en fonction d'une amplitude notée a et d'une phase à $t = 0$ notée α .
4. Calculer l'énergie mécanique de l'oscillateur que l'on notera $E(t)$.
5. On se propose de calculer l'énergie moyenne $\overline{E(t)}$ calculée sur une période d'oscillation $T \equiv 2\pi/\omega$ lorsque $\lambda \ll \omega_0$:

$$\overline{E(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt$$

- (a) En utilisant la même définition de la valeur moyenne que ci-dessus, montrer que :

$$\overline{\cos^2(\omega t + \alpha)} = \overline{\sin^2(\omega t + \alpha)} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \overline{\cos(\omega t + \alpha) \sin(\omega t + \alpha)} = 0$$

- (b) Pour quelle raison peut-on considérer que l'amplitude de l'oscillateur varie très peu au cours d'une seule période T ?
- (c) Montrer que les énergies moyennes cinétique et potentielle $\overline{E_c}$ et $\overline{E_p}$ sont égales, et déduire l'expression approchée de $\overline{E(t)}$.
- (d) Montrer que la puissance moyenne $P(t)$ dissipée par l'oscillateur peut être calculée indifféremment par les 2 expressions :

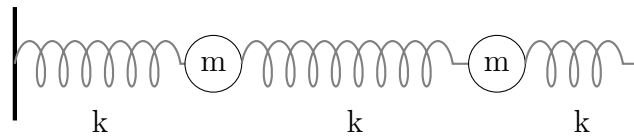
$$P(t) = -\frac{d\overline{E(t)}}{dt} \quad \text{ou} \quad \overline{F_f(t)\dot{x}(t)}$$

où $F_f(t)$ est le module de la force de frottement s'appliquant à l'oscillateur.

- (e) Comment peut-on interpréter l'égalité obtenue dans la question précédente ?

Oscillations longitudinales de 2 masses couplées élastiquement

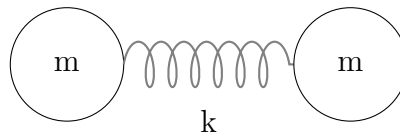
Le système représenté sur la figure a été étudié en cours par une méthode de combinaison linéaire des équations différentielles décrivant le mouvement des masses (l'influence de la pesanteur et d'une éventuelle dissipation sont négligées dans ce problème).



1. Etudier à nouveau ce problème en diagonalisant la matrice sous-jacente au système différentiel décrivant le système (méthode modale).
2. Retrouver ces résultats en cherchant a priori des solutions du système différentiel de mêmes pulsations mais d'amplitudes différentes (méthode directe).

Mode du corps solide

On considère une molécule diatomique schématisée sur la figure suivante :



On négligera l'influence de la pesanteur et d'une éventuelle dissipation.

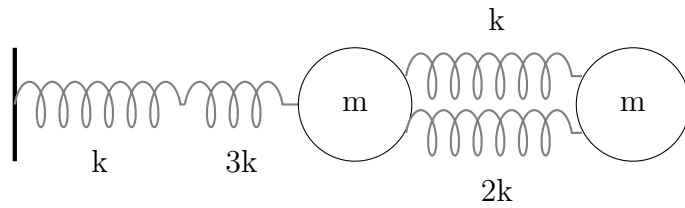
1. Déterminer les équations du mouvement de chaque masse.
2. Calculer les fréquences propres du système.
3. Donner une interprétation physique du mouvement associé à ces 2 modes.
4. Déterminer $x_1(t)$ et $x_2(t)$ lorsque les conditions initiales sont $x_1 = x_2 = 0$ et $\dot{x}_1 = v_0 > 0$, $\dot{x}_2 = 0$.

Couplage d'oscillateurs en série et en parallèle

1. On considère 2 ressorts de même longueur à vide, de constantes de raideur k_1 et k_2 placés, soit en série, soit en parallèle.

En justifiant votre réponse, rappelez pour chaque situation, l'expression de la constante de raideur du ressort équivalent.

2. On considère le système représenté sur la figure suivante (pesanteur et frottements négligés).



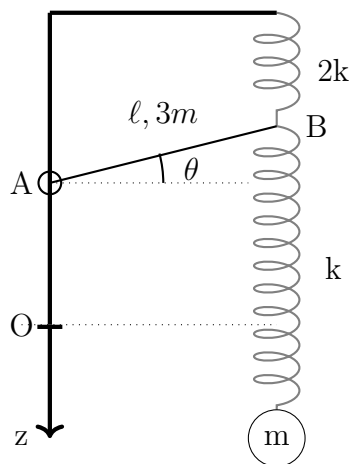
Déterminer les fréquences propres et la solution des équations du mouvement de chacune des masses par la méthode de votre choix.

Barre et ressorts couplés

Une tige homogène, AB , de longueur ℓ , de masse $3m$, pivote sans frottement autour du point A . Deux ressorts sont fixés à l'extrémité de cette tige : le premier, de raideur $2k$ est relié à un support fixe, le second, de raideur k est relié à une masse m .

Le poids de la barre peut-être négligé par rapport aux forces de rappel des ressorts, et le système est à l'équilibre lorsque $\theta = 0$ et $z = 0$.

On se limite à l'étude des petites oscillations si bien que dans cette approximation les ressorts sont supposés rester verticaux.



1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la masse m pour déterminer l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.
2. Appliquer le théorème du moment cinétique à la barre pour déterminer l'équation d'évolution dans le temps de l'angle θ .

3. En déduire que le système obéit au système différentiel :

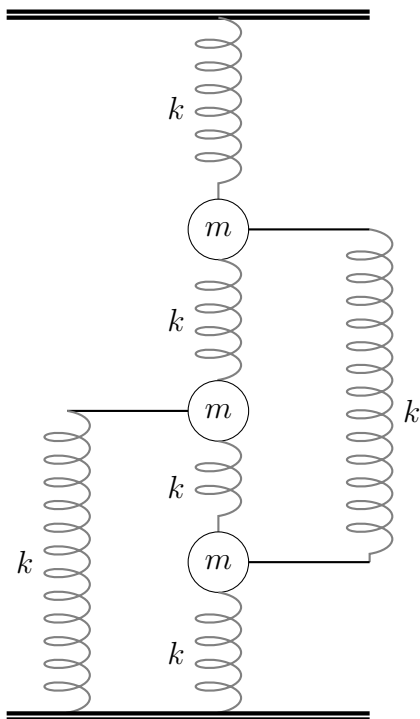
$$\begin{pmatrix} \ddot{z}/\ell \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z/\ell \\ \theta \end{pmatrix}$$

où $\omega_0^2 = k/m$.

4. Déterminer les solutions $z(t)$ et $\theta(t)$ du système.

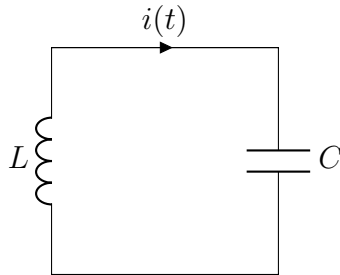
Fréquences propres d'un système à 3 degrés de liberté

Déterminez les fréquences propres du système (sans dissipation) représenté sur la figure suivante.



Analogie électro-mécanique

On considère le circuit électrique LC série représenté sur la figure.



1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ qui circule dans le circuit.
2. Déterminer la solution de l'équation différentielle décrivant le circuit LC lorsque la charge initiale dans le circuit vaut q_0 , et lorsque le courant est nul à l'instant initial.

Mettre en évidence la fréquence caractéristique du circuit.

3. Utilisez le fait que le déplacement $x(t)$ des oscillateurs mécaniques libres sans dissipation vérifie la même équation différentielle pour déterminer les analogues électriques de $x(t)$, $\dot{x}(t)$, m , k et ω_0^2 .
4. Utilisez cette analogie pour déterminer l'énergie instantanée emmagasinée dans l'inductance et la capacité, et les représenter sur un même schéma.
5. Quelle est la valeur de l'énergie totale ?

Chapter 3

Oscillations forcées à 1 et 2 degrés de liberté

On considère maintenant des oscillateurs sous forçage, c'est-à-dire soumis à une force extérieure en plus de la force de rappel vers la position d'équilibre et des éventuelles forces de frottements.

Si la force extérieure, $f(t)$, dépend du temps, un temps caractéristique supplémentaire peut entrer en jeu. Un des buts de ce chapitre est de discuter comment s'opère la compétition entre ce nouveau temps caractéristique et les autres temps caractéristiques déjà mis en évidence, le temps associé à la dissipation λ^{-1} ainsi que les temps associés aux fréquences propres.

3.1 Oscillations forcées à 1 degré de liberté

L'équation différentielle générique s'écrit maintenant sous la forme :

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} + f(t)$$

Dans le cas où $f(t)$ peut être développée en série de Fourier (cas des fonctions périodiques), ou représentée par une transformation de Fourier, l'équation différentielle étant linéaire, la solution générale peut être obtenue en considérant la somme des solutions pour chaque harmonique (cf. cours sur l'analyse de Fourier).

L'origine des temps pouvant être choisie de telle sorte que la phase soit nulle, le forçage harmonique $f(t) = F_0 \cos(\omega t)$ (ou $F_0 \sin(\omega t)$) est donc un cas assez générique. Avec les mêmes notations que dans le chapitre précédent, l'équation à traiter pour les systèmes à un degré de liberté est :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad (3.1)$$

D'un point de vue mathématique, la solution de cette équation est la somme de la solution générale sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

La solution sans second membre (régime des oscillations libres) a déjà été étudiée en détail dans le chapitre précédent. Lorsque $\lambda \neq 0$, rappelons que cette solution tend vers 0 avec un ou plusieurs temps caractéristiques associés à la dissipation. Pour cette raison, on parle également de *solution transitoire* pour cette partie de la solution. Au bout d'un temps suffisamment long, seule subsiste la solution particulière de l'équation avec second membre, que l'on appelle la *solution permanente*, et que nous allons étudier en détail.

3.1.1 Analyse fréquentielle du régime permanent

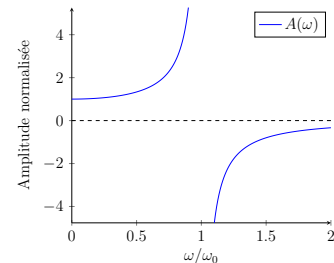
3.1.2 Le cas sans frottements ($\lambda = 0$)

Puisque l'équation différentielle (3.1) ne contient dans ce cas que des termes en $\ddot{x}(t)$ ou $x(t)$, une solution particulière évidente est donnée par l'expression,

$$x(t) = A(\omega) \cos(\omega t)$$

c'est-à-dire une solution de même fréquence mais d'amplitude différente de la force extérieure¹. En remplaçant dans l'équation différentielle, on trouve aussitôt que l'amplitude vaut :

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{1 - \omega^2/\omega_0^2}$$



Cette amplitude diverge lorsque $\omega = \omega_0$. Cette singularité non physique, due à l'absence de dissipation, est caractéristique du phénomène de résonance sur lequel nous reviendrons.

L'amplitude étant généralement définie positive, on écrit généralement la solution permanente de ce système non dissipatif à 1 degré de liberté sous la forme :

$$x(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t) & \text{si } \omega < \omega_0 \\ \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega t - \pi) & \text{si } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

On notera que la réponse de l'oscillateur est en opposition de phase avec la force extérieure pour les fréquences d'excitation supérieures à la fréquence propre ω_0 .

¹Bien entendu, si la force extérieure est $F_0 \sin(\omega t)$, il faut chercher la solution particulière sous la forme $x(t) = A(\omega) \sin(\omega t)$.

3.1.3 Le cas avec frottements ($\lambda \neq 0$)

Dans ce cas, la présence du terme en \dot{x} dans l'équation différentielle du mouvement fait que $A(\omega) \cos(\omega t)$ ne peut plus être une solution particulière, $\forall t$. Clairement, la solution recherchée doit comprendre une contribution en $\sin(\omega t)$. On cherchera donc la solution permanente sous la forme :

$$x(t) = A(\omega) \cos(\omega t) + B(\omega) \sin(\omega t)$$

La substitution dans l'équation différentielle (3.1) conduit, par identification des termes en sinus et cosinus, au système algébrique de 2 équations :

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2) A + 2\lambda\omega B &= \frac{F_0}{m}, \\ -2\lambda\omega A + (\omega_0^2 - \omega^2) B &= 0 \end{aligned}$$

Posons,

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} (\omega_0^2 - \omega^2) & +2\lambda\omega \\ -2\lambda\omega & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2$$

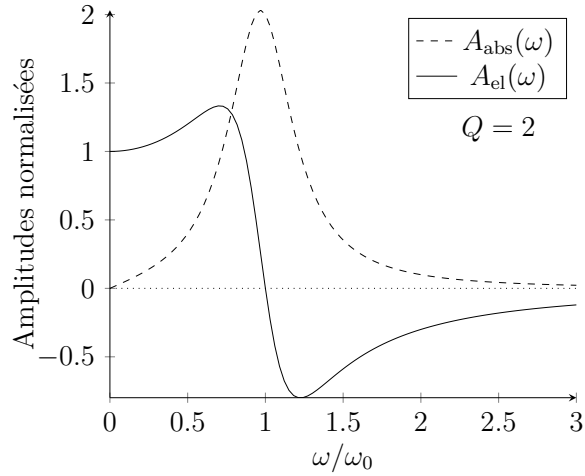
En utilisant la méthode de Cramer, on trouve aussitôt,

$$\begin{aligned} A &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{F_0}{m} & +2\lambda\omega \\ 0 & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{vmatrix}}{\Delta(\omega)} = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\Delta(\omega)} \\ B &= \frac{\begin{vmatrix} (\omega_0^2 - \omega^2) & \frac{F_0}{m} \\ -2\lambda\omega & 0 \end{vmatrix}}{\Delta(\omega)} = \frac{F_0}{m} \frac{2\lambda\omega}{\Delta(\omega)} \end{aligned}$$

Notons que la contribution en quadrature de phase avec la force extérieure (c'est-à-dire la contribution $B(\omega) \sin(\omega t)$ dans le cas traité) est nulle en absence de frottement lorsque $\lambda = 0$. Les frottements étant associés à une absorption d'énergie par le milieu extérieur, au lieu des notation A et B , on utilise parfois les notations plus explicites, $A = A_{\text{el}}$ et $B = A_{\text{abs}}$ qui désignent respectivement les amplitudes dites élastiques et d'absorption. En introduisant le facteur de qualité $Q \equiv \omega_0/(2\lambda)$ de l'oscillateur, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} A_{\text{abs}}(\omega) &= \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{Q^{-1} \omega/\omega_0}{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + (Q^{-1} \omega/\omega_0)^2}, \\ A_{\text{el}}(\omega) &= \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{1 - (\omega/\omega_0)^2}{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + (Q^{-1} \omega/\omega_0)^2} \end{aligned}$$

Ces 2 amplitudes sont représentées sur la figure suivante :



On pourra remarquer que toutes les amplitudes tendent vers 0 aux hautes fréquences, et que $A_{\text{abs}}(\omega)$ est maximale pour $\omega = \omega_0$ et vaut $A_{\text{abs}}(\omega_0) = (F_0/m\omega_0^2)Q$ tandis que $A_{\text{el}}(\omega_0) = 0$.

On peut bien sûr chercher la solution permanente sous la forme mathématiquement équivalente amplitude-phase :

$$x(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

Le plus simple est alors de considérer l'équation complexe associée à l'équation du mouvement :

$$\ddot{z} + 2\lambda \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

dont on cherche une solution sous la forme $z(t) = Z(\omega) e^{i\omega t}$. On trouve aussitôt que Z vérifie à son tour l'équation algébrique :

$$Z(\omega) = H(\omega) \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

où

$$H(\omega) \equiv \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\lambda\omega} = \omega_0^2 \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\Delta(\omega)} - i \frac{2\lambda\omega}{\Delta(\omega)} \right)$$

est la *fonction de transfert* qui caractérise la réponse en fréquence de l'oscillateur étudié.

En représentation géométrique

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{i\varphi(\omega)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} |H(\omega)| &= \omega_0^2 / \sqrt{\Delta(\omega)} \\ \tan \varphi(\omega) &= -2\lambda\omega / (\omega_0^2 - \omega^2) \end{cases}$$

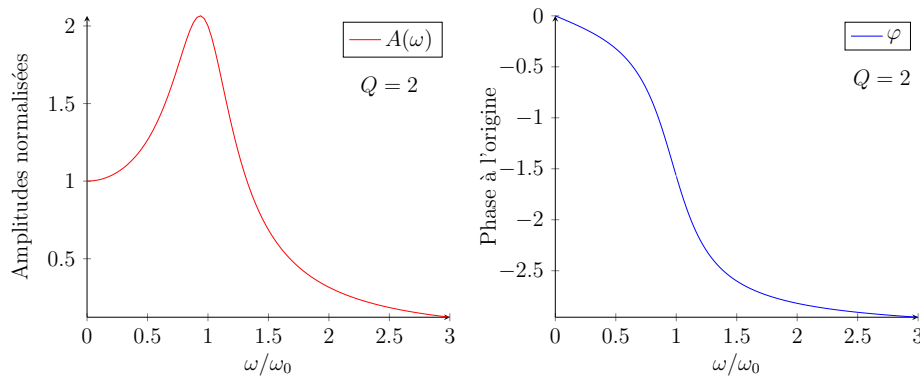
Comme $x(t) = \Re z(t)$, on peut finalement écrire :

$$x(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

où l'amplitude et la phase vérifient :

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_0)^2]^2 + [Q^{-1}(\omega/\omega_0)]^2}},$$

$$\tan \varphi(\omega) = -\frac{Q^{-1}(\omega/\omega_0)}{1 - (\omega/\omega_0)^2}$$



Le comportement de $A(\omega)$ est comparable à celui de l'amplitude d'absorption. En outre $A(\omega_0) = A_{\text{abs}}(\omega_0)$. Notez que la phase à l'origine varie entre 0 et $-\pi$, ce qui traduit un retard de la réponse de l'oscillateur à la force extérieure.

Il est également remarquable, que la solution permanente, à la différence de la solution transitoire, ne dépende pas des conditions initiales, mais uniquement de l'amplitude de la force extérieure et des caractéristiques de l'oscillateur.

Applications : sismographe et accéléromètre

Dans ce qui précède, nous avons considéré l'amplitude de la force, F_0 , comme indépendante de la pulsation excitatrice, ω . Cela ne correspond pas à la situation générale puisque dans le cadre d'une analyse de Fourier, les coefficients de Fourier doivent être des fonctions suffisamment décroissantes de la variable ω pour assurer la convergence de la série.

Un cas intéressant pour les applications est celui où un pendule élastique est fixé à un cadre qui subit lui-même un déplacement sinusoïdal $d \cos(\omega t)$ par rapport au sol. C'est le cas des *sismographes* (instrument enregistrant les mouvements du sol), des dispositifs d'amortissements, ou des *accéléromètres*.

Dans ce cas, on peut montrer que la prise en compte de la force d'inertie d'entraînement² conduit à l'équation du mouvement suivante, exprimée dans le repère non-galiléen du cadre en mouvement (notations avec des ' dans ce repère) :

$$\ddot{x}' + 2\lambda \dot{x}' + \omega_0^2 x' = d\omega^2 \cos(\omega t)$$

Par rapport à l'analyse effectuée ci-dessus il convient donc de remplacer F_0/m par $d\omega^2$. Pour un oscillateur avec un grand facteur de qualité, la réponse permanente du système peut donc s'écrire sous la forme :

$$x'(t) = d \frac{(\omega/\omega_0)^2}{|1 - (\omega/\omega_0)^2|} \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

avec $\varphi = 0$ pour $\omega < \omega_0$ et $\varphi = -\pi$ pour $\omega > \omega_0$.

L'amplitude de la réponse présente 2 comportements limites (cf. figure) :

- à grande fréquences, l'amplitude de la réponse est égale à la sollicitation extérieure : c'est l'effet recherché avec les sismographes. Les sismographes sont donc limités par la réalisation de pendules de grandes périodes (puisque qu'il faut $\omega \gg \omega_0$ dans cette situation).
- aux basses fréquences, la réponse est beaucoup plus faible que l'excitation : c'est l'effet recherché dans les amortisseurs. Dans ce régime, l'amplitude de la réponse est $d\omega^2/\omega_0^2 = a'_e/\omega_0^2$ où a'_e est l'accélération du cadre qui supporte le pendule (accélération d'entraînement) : la mesure de l'amplitude de la réponse est proportionnelle à l'accélération, ce qui permet de la mesurer : c'est le principe des accéléromètres.

3.1.4 Aspects énergétiques et résonance

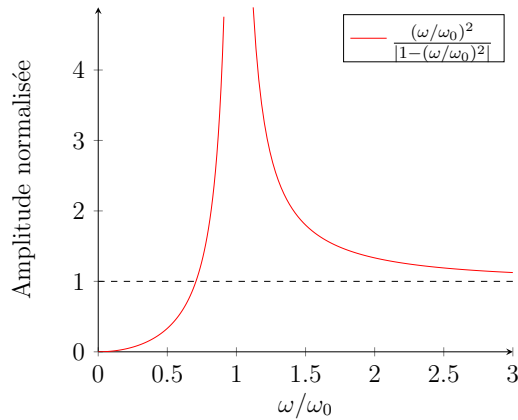
Calculons la puissance instantanée fournie par la force extérieure :

$$P_f(t) \equiv F_0 \cos(\omega t) \cdot \dot{x}(t) = m (\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x) \cdot \dot{x}(t)$$

où nous avons utilisé l'équation (3.1) pour obtenir l'expression du membre de droite. Or, de façon évidente :

$$m (\ddot{x} + \omega_0^2 x) \cdot \dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right)$$

²On rappelle que dans un repère non galiléen en translation par rapport au repère galiléen (le sol), le principe fondamental de la dynamique : $ma = \sum \text{forces}$ doit être réécrit sous la forme $m(a + a_e) = \sum \text{forces}$ où $a_e = -d\omega^2 \cos(\omega t)$ est l'accélération d'entraînement. La force d'inertie de Coriolis est nulle car le cadre n'a pas de mouvement de rotation.



On reconnaît l'énergie mécanique E qui, en régime permanent où $x(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$ vaut :

$$E(t) = \frac{mA^2(\omega)}{2} (\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi))$$

La dérivée de cette expression étant proportionnelle au produit $\sin(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \varphi)$, la valeur moyenne de dE/dt sur une période $2\pi/\omega$ s'annule. Il en résulte donc que :

$$\overline{P_f(t)} = F_0 \overline{\cos(\omega t) \cdot \dot{x}(t)} = 2\lambda m \overline{\dot{x}^2}$$

ce qui traduit simplement le fait qu'en moyenne, la puissance fournie par la force extérieure est égale à la puissance absorbée par la force de frottement visqueux.

On peut calculer explicitement la puissance instantanée :

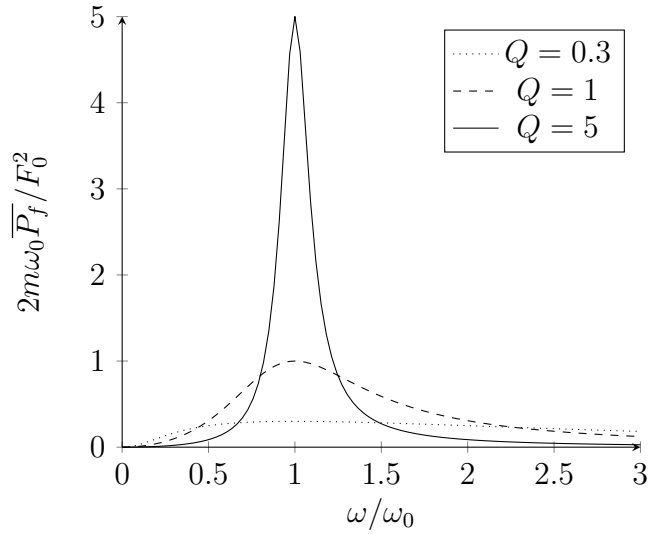
$$P_f(t) \equiv F_0 \cos(\omega t) \cdot \dot{x}(t) = F_0 \omega (A_{\text{abs}}(\omega) \cos^2(\omega t) - A_{\text{el}}(\omega) \sin(\omega t) \cos(\omega t))$$

et en déduire la puissance moyenne fournie par la force extérieure :

$$\overline{P_f} = \frac{F_0 \omega}{2} A_{\text{abs}}(\omega) = \frac{F_0^2}{2m\omega_0} \frac{Q}{1 + Q^2 (\omega_0/\omega - \omega/\omega_0)^2}$$

La puissance moyenne ne dépend donc pas de l'amplitude élastique A_{el} , c'est-à-dire de la contribution en phase (ou en opposition de phase) avec la force extérieure. Seule l'amplitude d'absorption en quadrature de phase avec la force extérieure, A_{abs} , contribue. C'est là l'origine de son nom.

La figure montre clairement que la puissance absorbée est d'autant moins étalée autour de la fréquence propre ω_0 de l'oscillateur que Q est grand. On retrouve le fait déjà noté, que l'amplitude de l'oscillateur tend à diverger lorsque la fréquence de la force extérieure s'approche de ω_0 : c'est le phénomène de *résonance*.



Précisons ce point. La largeur à mi-hauteur de $\overline{P}_f(\omega)$ correspond à des fréquences vérifiant l'égalité :

$$\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{1}{Q^2}$$

Un peu de calcul pour déterminer les 2 racines positives ω_{\pm} de l'équation du second degré montre que *la largeur de la résonance* (en fréquences), $\Delta\omega$, est telle que :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \equiv \frac{\omega_+ - \omega_-}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \Leftrightarrow \Delta\omega = 2\lambda$$

Ce qu'on peut formuler en disant que la largeur de résonance des oscillations entretenues est égale à l'inverse du temps d'amortissement des oscillations libres. Autrement dit, les oscillateurs les moins amortis sont les plus sélectifs en fréquence. On dit également que la largeur de la résonance est *la bande passante* de l'oscillateur. Notons enfin que la mesure de la bande passante offre un moyen expérimental de déterminer le temps d'amortissement $(2\lambda)^{-1}$.

Pour terminer comparons l'énergie moyenne mécanique emmagasinée dans l'oscillateur et l'énergie moyenne dissipée par frottement sur une période. On a aussitôt :

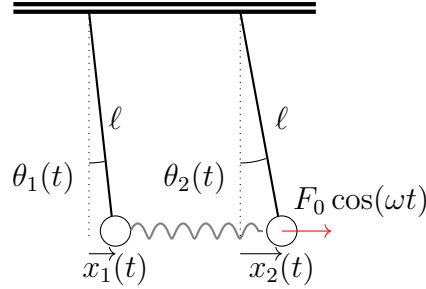
$$\frac{\overline{E}}{E_{\text{diss}}} = \frac{\overline{E}}{\overline{P}_f(2\pi/\omega_0)} = \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{2\omega^2} \frac{Q}{2\pi}$$

qui tend vers $Q/2\pi$ à la résonance.

Ce résultat donne un autre éclairage sur le facteur de qualité : plus Q est grand, plus un oscillateur emmagasine de l'énergie par rapport à l'énergie dissipée.

3.2 Oscillations forcées à 2 degrés de liberté

Reprenons à titre d'exemple le cas de 2 pendules couplés élastiquement traité dans le chapitre précédent, lorsqu'on force harmoniquement un des 2 pendules.



Dans la limite des petits déplacements, les équations du mouvement s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -2\lambda \dot{x}_1 + \frac{k}{m}(x_2 - x_1) - \frac{g}{\ell} x_1, \\ \ddot{x}_2 &= -2\lambda \dot{x}_2 - \frac{k}{m}(x_2 - x_1) - \frac{g}{\ell} x_2 + \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)\end{aligned}$$

Dans le cas non forcé, nous avons mis en évidence les 2 fréquences propres :

$$\omega_1^2 = \frac{g}{\ell} \quad \text{et} \quad \omega_2^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}$$

En introduisant les coordonnées normales données par les combinaisons linéaires, $y_1 = x_1 + x_2$ et $y_2 = x_1 - x_2$, on obtient les 2 équations différentielles découplées :

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= -\omega_1^2 y_1 - 2\lambda \dot{y}_1 + \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \\ \ddot{y}_2 &= -\omega_2^2 y_2 - 2\lambda \dot{y}_2 - \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)\end{aligned}$$

Chaque mode se comporte donc comme un oscillateur 1 degré de liberté soumis à la force extérieure ou à son opposée.

En utilisant les résultats obtenus plus haut pour les amplitudes d'absorption et les amplitudes élastiques des oscillateurs à 1 degrés de liberté, on en déduit aussitôt les amplitudes de déplacement des 2 masses en régime permanent :

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \frac{y_1 + y_2}{2} = A_{\text{abs}}^{(1)}(\omega) \sin(\omega t) + A_{\text{el}}^{(1)}(\omega) \cos(\omega t), \\ x_2(t) &= \frac{y_1 - y_2}{2} = A_{\text{abs}}^{(2)}(\omega) \sin(\omega t) + A_{\text{el}}^{(2)}(\omega) \cos(\omega t)\end{aligned}$$

où les amplitudes sont les demi-sommes ou demi-différences des amplitudes correspondant à chacun des modes.

Les amplitudes élastiques et d'absorption sont représentées sur la figure en fonction de la fréquence excitatrice ω . On remarque :

1. l'absorption reste maximum au voisinage des fréquences propres et négligeable pour les autres fréquences.
2. les amplitudes élastiques changent de signe à chaque fois que l'on passe une résonance
3. les 2 oscillateurs sont en phase aux basses fréquences et en opposition de phase aux hautes fréquences.

Discutons plus en détail la réponse de l'oscillateur qui n'est pas directement forcé (pendule 1) lorsque on excite le second avec une fréquence ω variable :

- lorsque $\omega < \omega_1$, la plus basse des fréquences propres, le 1er oscillateur est en phase avec l'oscillateur directement forcé mais son amplitude est plus faible.
- lorsque $\omega > \omega_2$, la plus haute des fréquences propres, l'oscillateur non directement forcé est en opposition de phase avec l'oscillateur directement forcé et son amplitude est également plus faible.
- dans la zone de fréquences intermédiaires, l'amplitude du pendule non directement forcé est plus importante que celle du pendule directement forcé.

En résumé, l'excitation extérieure est transmise dans la bande de fréquences comprises entre les 2 fréquences propres mais est atténuée en dehors. Il y a donc un *filtrage* des fréquences par ce dispositif mécanique. Les fréquences propres basse et haute apparaissent respectivement comme des *fréquences de coupure inférieure et supérieure*, tandis que la bande de fréquences comprises entre ces 2 fréquences constitue *la bande passante* du filtre.

3.3 Analogies électro-mécaniques dans le cas des oscillateurs forcés

3.3.1 Oscillateur électrique forcé

L'analogie électrique de l'oscillateur mécanique forcé est le circuit RLC alimenté par une tension électrique périodique. Dans ce cas, la loi des mailles s'écrit simplement sous la forme :

$$L \ddot{q}(t) + R \dot{q}(t) + \frac{1}{C} q(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

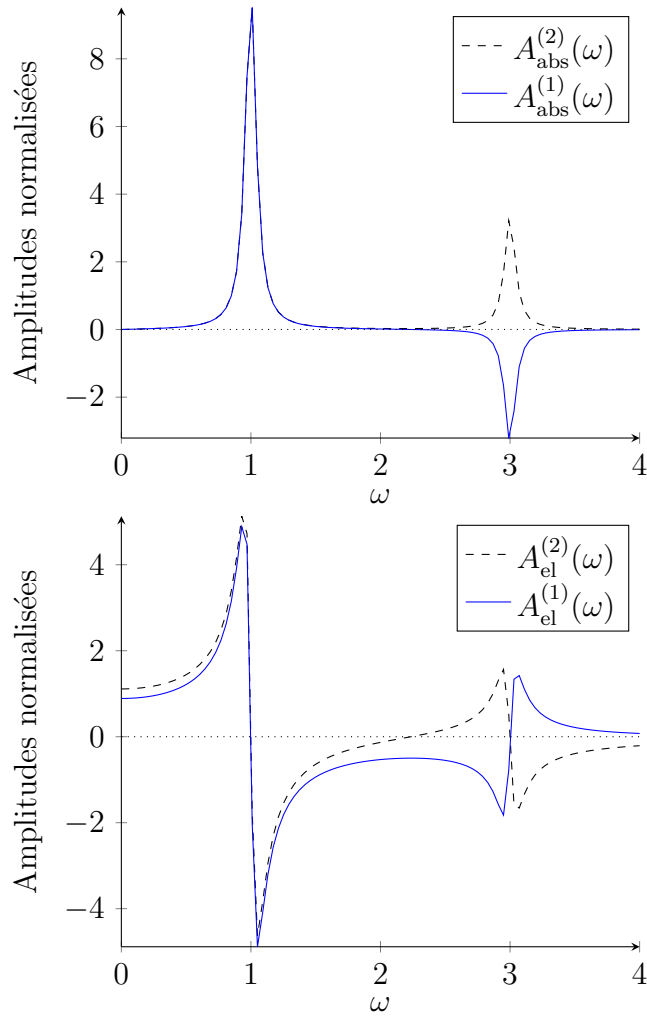


Figure 3.1: Amplitudes d'absorption et élastique de 2 oscillateurs couplés élastiquement lorsque $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$, et $2\lambda = 0.1$.

Comme vu précédemment, cette équation différentielle peut bien entendu être résolue par la méthode de la représentation complexe où on cherche la solution permanente sous la forme $q(t) = \hat{q}(\omega) e^{i\omega t}$. L'équation algébrique correspondante est simplement :

$$\left(L(i\omega)^2 + R(i\omega) + \frac{1}{C} \right) \hat{q}(\omega) = V_0,$$

soit encore :

$$\hat{q}(\omega) = \frac{V_0}{L(i\omega)^2 + R(i\omega) + 1/C} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i 2\lambda \omega} C V_0$$

où on a introduit la fréquence de résonance $\omega_0 \equiv 1/\sqrt{LC}$ et $2\lambda \equiv R/L$. On reconnaît dans cette expression la définition de la fonction de transfert, $H(\omega)$, telle que

$$\hat{q}(\omega) = H(\omega) CV_0$$

et on en déduit que l'analyse faite pour l'oscillateur mécanique peut être refaite telle quelle pour l'oscillateur électrique.

Remarquons que les électriciens préfèrent généralement utiliser comme variable l'intensité du courant $I(t)$ plutôt que la charge $q(t)$, de sorte que la loi des mailles écrites en fonction de I (cf chapitre précédent) s'écrit :

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int^t I dt = V_0 \cos(\omega t)$$

En représentation complexe, on obtient aussitôt :

$$V_0 = Z \hat{I} \quad \text{avec} \quad Z = R + i \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

où Z est l'impédance complexe du circuit. Cette relation $V_0 = Z\hat{I}$ généralise la loi d'Ohm $V = RI$.

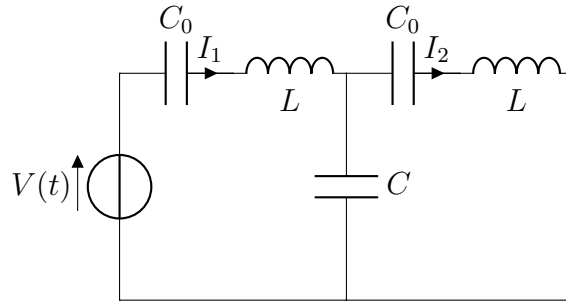
Application

On rappelle que les impédances en série s'ajoutent tandis que ce sont les admittances ($1/Z$) qui s'ajoutent dans les montages en parallèle. Utilisez l'analogie électromécanique pour retrouver la constante de raideur d'un ressort équivalent à 2 ressorts en série ou en parallèle.

3.3.2 Exemple d'oscillateurs électriques couplés

Cherchons quel serait l'analogie électrique du système mécanique à 2 degrés de libertés étudié plus haut.

On a déjà vu que le couplage des masses par élasticité correspondait au couplage des inductances par capacité. Notre cas est plus compliqué, puisque en plus d'un couplage élastique, les masses sont ramenées vers leur position d'équilibre par gravité. Il faut donc introduire 2 capacités différentes, pour traduire l'effet des 2 forces de rappel linéaires : une capacité C_0 associée à chaque inductance pour traduire l'effet d'une force de rappel équivalente à la gravité, et une capacité C pour l'analogie du couplage élastique entre les 2 oscillateurs.



On notera que l'on n'a pas introduit d'éléments dissipatifs (résistances) pour simplifier les expressions. Les équations dans chaque maille s'écrivent :

$$V(t) = \frac{1}{C_0} \int^t I_1(t) dt + L \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C} \int^t (I_1(t) - I_2(t)) dt,$$

$$\frac{1}{C} \int^t (I_1(t) - I_2(t)) dt = \frac{1}{C_0} \int^t I_2(t) dt + L \frac{dI_2}{dt}$$

Le courant étant la dérivée de la charge électrique, on a encore :

$$V(t) = \frac{q_1}{C_0} + L \ddot{q}_1 + \frac{q_1 - q_2}{C},$$

$$\frac{q_1 - q_2}{C} = \frac{q_2}{C_0} + L \ddot{q}_2$$

L'identification avec les exemples du système mécanique est évidente. On peut montrer facilement que les fréquences propres de ce système sont données par $\omega_1^2 = 1/LC_0$ et $\omega_2^2 = 1/LC_0 + 2/LC$. Ce système constitue un exemple de filtre passe-bande électrique.

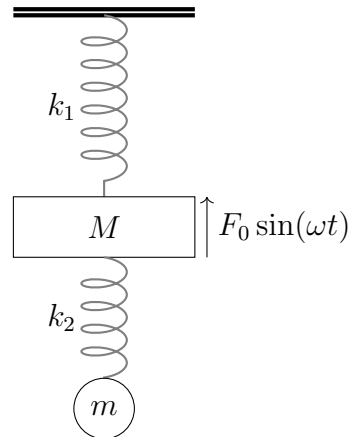
3.4 Exercices

Etouffeur de vibrations

Une masse M est reliée à un support fixe par 1 ressort de constante de raideur k_1 et subie en outre une force extérieure d'intensité $F_0 \sin(\omega t) \vec{e}_z$.

On suspend à la masse M un autre oscillateur (k_2, m).

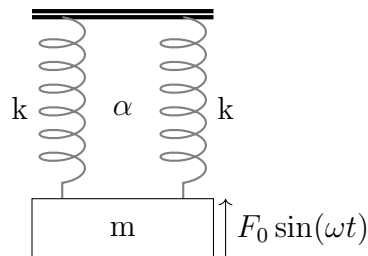
Dans tout le problème les effets dissipatifs seront négligés.



1. Ecrire les équations du mouvement de chacune des masses.
2. Pour quelle raison peut-on affirmer sans calcul que le mouvement permanent des 2 masses ne contient pas de composante en quadrature de phase avec la force extérieure ?
3. Déterminer les amplitudes du mouvement permanent des 2 masses en fonction des données du problème.
4. Quelles doivent être les caractéristiques de l'oscillateur (k_2, m) pour minimiser les vibrations de la masse M ?

Mouvement forcé dissipatif

Une masse m est reliée à un support fixe par 2 ressorts identiques de constante de raideur k . La masse subit en outre une force de frottement visqueuse de coefficient α ainsi qu'une force harmonique extérieure d'intensité $F_0 \sin(\omega t) \vec{e}_z$ (cf. figure).

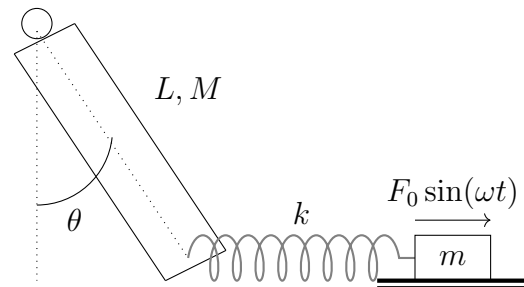


1. Quelle est l'équation du mouvement de la masse ?
2. Déterminer la solution permanente et en déduire les amplitudes d'absorption et élastique.
3. Dans le cas particulier où la dissipation est négligeable :
 - que vaut l'amplitude d'absorption ?
 - discuter la phase relative du mouvement de la masse et de la force extérieure en fonction de la pulsation ω .

Oscillateur forcé couplé à une barre en rotation

Une masse m qui peut glisser sans frottements sur un plan horizontal est soumise à un forçage harmonique $F_0 \sin(\omega t) \vec{e}_x$. La masse est connectée, via un ressort, à une barre homogène en rotation de longueur L et de masse M .

On se limite à l'étude des petites oscillations de la barre.

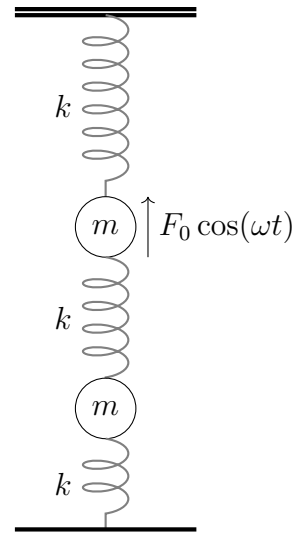


Déterminer le mouvement permanent de la masse.

Vibrations de 2 masses couplées élastiquement avec et sans forçage

On considère d'abord le système représenté sur la figure sans forçage et en négligeant un éventuel frottement visqueux.

1. Ecrire les équations du mouvement des 2 masses.
2. Déterminer les fréquences propres d'oscillations et les coordonnées normales du système.
3. Déterminer les déplacements à tout instant t de chacune des 2 masses.



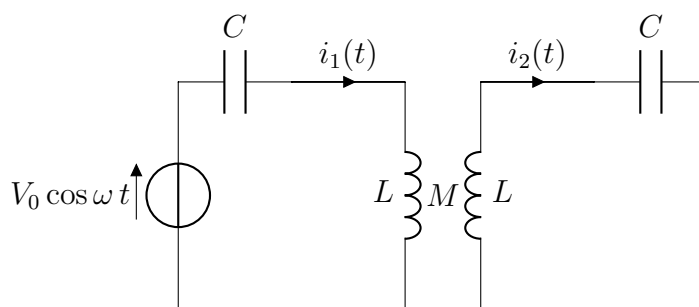
En fait, la dissipation conduit malgré tout au bout d'un certain temps à l'extinction de la solution transitoire.

4. Ecrire les équations du mouvement des 2 masses en présence de la force extérieure (les forces de frottements étant toujours négligées par rapport aux autres forces).
4. En déduire les solutions permanentes.
5. Dans quels domaines de pulsations ω , les oscillations des 2 masses sont-elles en phase ou en opposition de phase ?

6. Montrer que les amplitudes des oscillations divergent pour des fréquences ω que l'on précisera. Commentez.
7. Quelles sont les solutions générales valables à un instant quelconque ?

Couplage de 2 circuits LC

On considère le couplage de 2 circuits LC identiques par une inductance mutuelle M .



1. Déterminer les 2 équations différentielles satisfaites par les charges $q_1(t)$ et $q_2(t)$.
2. Déterminer le courant $i_1(t)$ circulant dans le premier circuit.
3. En déduire la fréquence pour laquelle $i_1(t)$ est nul et celles pour lesquelles $i_1(t)$ est maximum.

Chapter 4

Oscillations des systèmes à n degrés de liberté et limite continue

Dans ce chapitre, on généralise les cas traités dans les 2 premiers chapitres aux cas des systèmes à un grand nombre de degrés de liberté. L'analyse de la dynamique d'un système à n degrés de liberté passe alors par la résolution d'un système différentiel de n équations différentielles couplées du 2ème ordre. La méthode modale ou la méthode directe peuvent être mise en œuvre comme dans les cas à un plus petit nombre de degrés de liberté. Un système à n degrés de liberté possède n modes propres, certains d'entre eux étant éventuellement dégénérés.

Si l'on fait tendre le nombre de degrés vers l'infini, la variable de position, $x(t)$ devient elle-même continue, le déplacement par rapport à la position d'équilibre doit alors être écrit par une fonction $u(x, t)$ des 2 variables x et t . La relation entre les dérivées partielles de $u(x, t)$ conduit alors à une équation aux dérivées partielles qui joue le rôle des équations différentielles ordinaires couplées.

Comme exemples caractéristiques de systèmes à grand nombre de degrés de liberté, on peut considérer le cas d'une corde élastique lestée de plombs régulièrement espacés dont on étudie les oscillations transversales ou longitudinales, et dont la limite continue est une corde vibrante. De même en électricité, un ensemble de bobines couplées par des condensateurs nous conduira à une ligne de transmission électrique dans la limite continue. Les équations aux dérivées partielles correspondant à ces 2 exemples sont respectivement, l'équation des cordes vibrantes et l'équation des télégraphistes.

4.1 Equations de Lagrange

Le formalisme newtonien de la mécanique n'est pas toujours le plus adapté pour obtenir les équations du mouvement, en particulier lorsqu'il existe des contraintes entre les variables de positions ou de vitesses, c'est-à-dire des relations entre les variables qui doivent être vérifiées à tout instant. Une alternative consiste à utiliser le formalisme lagrangien qui sert également dans d'autres domaines de la physique, en particulier en physique statistique ou en électrodynamique.

La formulation des équations du mouvement dans le cadre du formalisme lagrangien relève d'un cours de mécanique analytique qui dépasse le cadre de ce cours. On se contentera ici de donner les équations de Lagrange sans démonstration. Considérons un système de N particules en mouvement, éventuellement soumis à des contraintes. Dans le cadre de ce formalisme, il est nécessaire d'introduire :

- *les coordonnées généralisées*, traditionnellement notées, q_α , $\alpha = 1, \dots, n$, qui sont les grandeurs qui déterminent de façon univoque l'état mécanique du système étudié lorsque les contraintes sont prises en compte¹. Dans les cas les plus simples, ce sont les variables de positions, mais elles peuvent aussi correspondre à des angles comme dans le cas des pendules ...
- *le Lagrangien*, $\mathcal{L}(\dot{q}_\alpha, q_\alpha)$, qui correspond à la différence entre l'énergie cinétique, $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2$, et l'énergie potentielle, V :

$$\mathcal{L} \equiv T - V$$

- *la fonction de dissipation de Rayleigh*, \mathcal{F} , associée aux forces de frottement visqueux, telles que $\mathbf{F}_i = -\alpha_i \mathbf{v}_i$, définie par la relation :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{v}_i^2$$

où α_i est le coefficient de frottement s'appliquant sur la particule i .

Par une approche variationnelle comparable à celle où l'on dérive les lois de l'optique à partir du principe de Fermat², il est possible d'obtenir *les équations de Lagrange* qui s'écrivent de la façon suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, n \quad (4.1)$$

¹Pour un système à 1 dimension sans contraintes, $n = N$. Pour un système à 3 dimensions sans contraintes, $n = 3N$, etc

²Le temps de parcours des rayons lumineux est un extremum.

Le 1er terme du membre de droite prend en compte les forces qui dérivent d'une énergie potentielle, tandis que le deuxième prend en compte les forces de frottements visqueux.

1er exemple

Pour illustrer ce formalisme, considérons d'abord le cas le plus simple, celui de l'oscillateur harmonique forcé et dissipatif à une dimension. Il y a une seule coordonnée généralisée la position x de la masse. Alors :

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad V = \frac{1}{2}kx^2 - F_0 \cos(\omega t)x, \quad \mathcal{F} = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

L'application des équations de Lagrange conduit aussitôt au résultat :

$$m\ddot{x} = -kx + F_0 \cos(\omega t) - \alpha\dot{x}$$

2ème exemple

Considérons maintenant le cas déjà traité en formalisme newtonien : celui du mouvement longitudinal de 2 masses couplées par 3 ressort identiques, sans dissipation. Dans cette situation, les coordonnées généralisées sont les positions x_1 et x_2 des 2 masses et le Lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{F} = 0$$

d'où on déduit aussitôt les équations du mouvement :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + kx_1 + k(x_1 - x_2) &= 0, \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 - k(x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned}$$

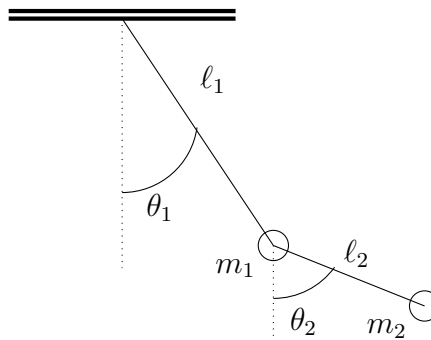
qui correspond bien aux équations déjà trouvées au chapitre 2.

3ème exemple

Traisons enfin le cas potentiellement plus difficile du pendule double non dissipatif. Le repérage de la position des 2 masses dans l'espace requiert 6 coordonnées, mais il existe 4 contraintes : les longueurs fixes, ℓ_1 et ℓ_2 des 2 pendules, ainsi que le fait que le mouvement a lieu dans un plan, ce qui fixe 2 autres contraintes. Les angles θ_1 et θ_2 peuvent être pris comme les coordonnées généralisées de ce problème.

A partir des positions des masses, $\mathbf{r}_1(t) = (\ell_1 \sin \theta_1, \ell_1 \cos \theta_1)$ et $\mathbf{r}_2(t) = (\ell_1 \sin \theta_1 + \ell_2 \sin \theta_2, \ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos \theta_2)$, on trouve facilement l'expression des énergies cinétiques :

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1\ell_1^2\dot{\theta}_1^2 \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{1}{2}m_2 \left(\ell_1^2\dot{\theta}_1^2 + \ell_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right)$$



La force de rappel est due à la gravité, les énergies potentielles de chaque masse s'écrivent :

$$V_1 = -m_1 g l_1 (1 - \cos \theta_1) \quad \text{et} \quad V_2 = -m_2 g l_1 (1 - \cos \theta_1) - m_2 g l_2 (1 - \cos \theta_2)$$

On peut ensuite obtenir les équations du mouvement par de simples dérivations en utilisant les équations de Lagrange. Ces équations sont compliquées et non-linéaires. En les linéarisant, c'est-à-dire en se limitant aux oscillations de faibles amplitudes, vous pourrez vérifier que les équations d'évolutions des angles s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2) g \theta_1 &= 0, \\ l_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 \ddot{\theta}_1 + g \theta_2 &= 0 \end{aligned}$$

Applications

Déterminer les modes propres du pendule double linéarisé.

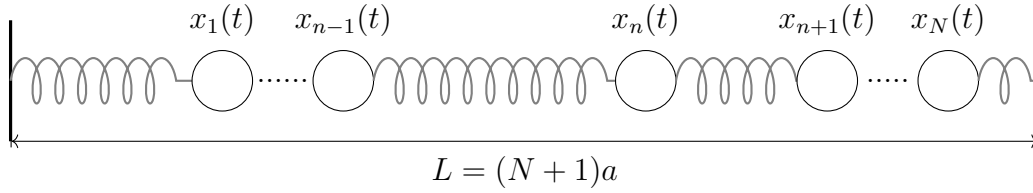
4.2 Modes des systèmes à N degrés de liberté

Dans cette section, nous allons étudier en détail une chaîne de N oscillateurs mécaniques couplés élastiquement. Nous soulignerons le rôle des conditions aux limites appliquées aux extrémités. Dans une 2ème section, nous donnerons l'essentiel des résultats pour des systèmes analogues électriques.

4.2.1 Chaîne de N oscillateurs mécaniques couplés élastiquement

Avec les notations du schéma, on trouve aussitôt que le Lagrangien s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{L} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} m \dot{x}_n^2 - \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2} k (x_{n+1} - x_n)^2 + \frac{1}{2} k (x_n - x_{n-1})^2 \right)$$



où on peut convenir de poser $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 0$ pour rendre compte du fait que les extrémités du système sont fixes. Les équations de Lagrange permettent d'obtenir les N équations du mouvement. On trouve :

$$m \ddot{x}_n = k(x_{n+1} - x_n) - k(x_n - x_{n-1}), \quad n = 1, \dots, N$$

ce qu'on peut encore écrire sous la forme plus compacte :

$$\ddot{x}_n = -\omega_0^2(2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}), \quad n = 1, \dots, N$$

où on a posé $\omega_0^2 = k/m$. On pourra remarquer que les atomes aux extrémités vérifient des relations spécifiques avec seulement 2 termes dans le membre de droite, à savoir $\ddot{x}_1 = -\omega_0^2(2x_1 - x_2)$ et $\ddot{x}_N = -\omega_0^2(2x_N - x_{N-1})$

Oublions un instant cette particularité et cherchons la solution du système différentiel sous la forme habituelle (même pulsation, amplitudes différentes) :

$$x_n(t) = A_n e^{i\omega t}$$

Les fréquences compatibles avec les équations doivent vérifier l'équation aux différences :

$$\omega^2 A_n = \omega_0^2(2A_n - A_{n+1} - A_{n-1})$$

Le choix particulier d'une amplitude sous la forme, $A_n \propto e^{ikna}$, conduit à la relation :

$$\omega^2 = \omega_0^2(2 - 2\cos(ka)) = 4\omega_0^2 \sin^2(ka/2)$$

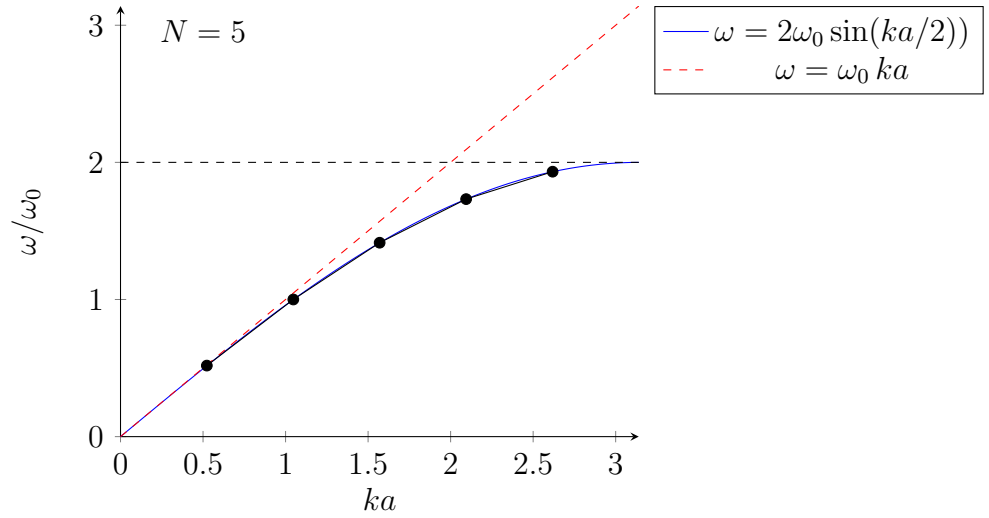
Cette relation est *la relation de dispersion* du système. En suivant cette approche, on vient donc de trouver que toutes les fréquences vérifiant la relation $\omega = 2\omega_0 |\sin(ka/2)|$ seraient acceptables pour ce système. Pourtant, le système étant constitué d'un nombre fini, N , de masses, on s'attend plutôt à trouver seulement N modes et pas une infinité. En fait, ce résultat ne serait correct que pour un système non limité spatialement.

Précisons ce point. La forme utilisée plus haut pour l'amplitude de déplacement de la N -ème masse : $A_n \propto e^{ikna}$ ne satisfait pas les conditions aux limites $A_0 = 0$

et $A_{N+1} = 0$. Pour prendre en compte les conditions aux limites, cherchons les amplitudes sous la forme plus explicite :

$$A_n = C \sin(kna) + D \cos(kna)$$

La condition $A_0 = 0$ impose que $D = 0$, tandis que la condition $A_{N+1} = 0$ impose le fait que $\sin(k(N+1)a) = 0$. Or $L = (N+1)a$, on doit donc avoir : $k = \alpha\pi/L$ avec α entier. Les valeurs du vecteur d'onde sont donc discrètes, les N premières valeurs distinctes correspondent aux N modes propres du système³.



Résumons la situation, les modes et amplitudes du système de longueur $L = (N+1)a$ vérifient les relations :

$$\begin{cases} \omega_\alpha = 2\omega_0 \sin(k_\alpha a/2) \\ A_n^{(\alpha)} = C_\alpha \sin(nk_\alpha a) \end{cases} \quad \text{avec} \quad k_\alpha a = \frac{\alpha\pi}{N+1} \quad \text{et} \quad \alpha = 1, \dots, N$$

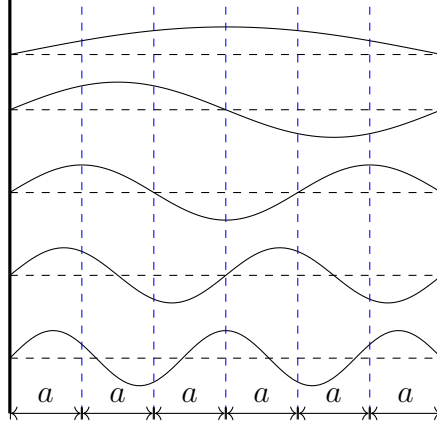
Remarquons que les N fréquences propres se placent sur la courbe continue, $\omega = 2\omega_0 \sin(ka/2)$, et sont toutes situées pour $0 < ka < \pi$, qui constitue, de fait, la seule partie utile de la courbe⁴. La position précise des fréquences propres sur la

³Alternativement on peut chercher les racines du polynôme défini par la relation :

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - 2\omega_0^2 & \omega_0^2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \omega_0^2 & \omega^2 - 2\omega_0^2 & \omega_0^2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \omega_0^2 & \omega^2 - 2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \omega_0^2 & \omega^2 - 2\omega_0^2 \end{vmatrix} = 0$$

⁴En physique des solides, le domaine de vecteurs d'onde tels que $-\pi < ka < \pi$ s'appelle *la 1ère zone de Brillouin*.

courbe dépend des conditions appliquées aux extrémités. La fréquence maximale que l'on peut observer dans le système est voisine de $2\omega_0$ qui apparaît ainsi comme une fréquence de coupure.



Pour mieux visualiser les déplacements, on les a représentés sur la figure par des déplacements verticaux (ce qui pourrait être le cas dans le cas d'oscillations transversales des masses). On notera que 2 masses voisines oscillent quasiment en phase pour le 1er mode, mais en opposition de phase dans le 5ème mode. En effet :

$$A_{n+1} = \sin((n+1)ka) = \sin(nka) \cos(ka) + \sin(ka) \cos(nka)$$

de sorte que pour $ka \approx 0$, $A_{n+1} \approx \sin(nka) \times 1 = A_n$ tandis que pour $ka \approx \pi$, $A_{n+1} \approx \sin(nka) \times (-1) = -A_n$. Le déplacement des masses s'effectue donc comme une onde progressive dans les premiers modes jusqu'à se dégénérer progressivement en une onde quasi-stationnaire lorsque $ka \rightarrow \pi$.

Dans le mode α , le déplacement $x_n^{(\alpha)}$ de la n-ème masse est donc :

$$x_n^{(\alpha)}(t) = C_\alpha \sin(nk_\alpha a) \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha)$$

Le mouvement général est obtenu par la combinaison linéaire de tous les modes, soit :

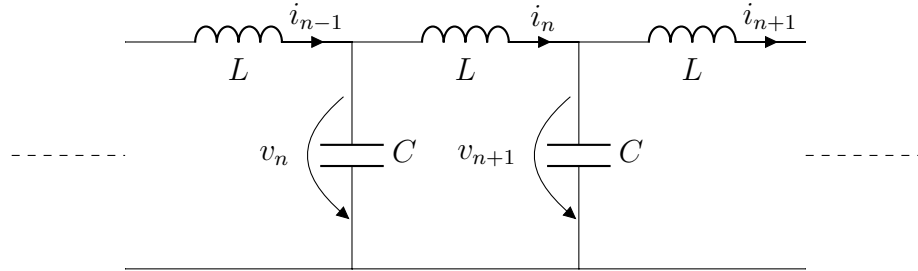
$$x_n(t) = \sum_{\alpha=1}^N C_\alpha \sin(nk_\alpha a) \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha)$$

où les $2N$ constantes C_α et φ_α sont fixées par les conditions initiales de positions et vitesses appliquées aux N masses.

4.2.2 Analogie électro-mécanique

Nous avons montré précédemment que les analogues électriques des masses et des ressorts étaient respectivement des inductances et des capacités. Le système électrique

correspondant au système mécanique étudié dans la section précédente est représenté sur la figure suivante où les inductances (les masses) sont couplées par des capacités (des ressorts) :



La loi des mailles dans la boucle centrale s'écrit :

$$v_n = L \frac{di_n}{dt} + v_{n+1}$$

Par ailleurs, puisque l'intensité du courant passant dans la capacité de gauche vaut $i_{n-1} - i_n$, on en déduit que :

$$\frac{dv_n}{dt} = \frac{i_{n-1} - i_n}{C} \quad \text{et, de même} \quad \frac{dv_{n+1}}{dt} = \frac{i_n - i_{n+1}}{C}$$

En combinant ces équations, on trouve la relation différentielle entre les courants :

$$L \frac{d^2 i_n}{dt^2} = \frac{i_{n-1} - i_n}{C} - \frac{i_n - i_{n+1}}{C}$$

soit encore :

$$L \frac{d^2 i_n}{dt^2} = -\frac{1}{C} (2i_n - i_{n-1} - i_{n+1})$$

Cette équation a rigoureusement la même forme mathématique que celle obtenue dans la section précédente pour les masses couplées, avec $\omega_0^2 = 1/LC$.

On en déduit donc que, dans un mode α particulier, la solution générale s'écrit sous la forme :

$$i_n(t) = [C \sin(k_\alpha n a) + D \cos(k_\alpha n a)] \cos(\omega(k_\alpha) t + \varphi_\alpha)$$

avec

$$\omega(k_\alpha) = \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin(k_\alpha a/2)$$

où les valeurs prises par k_α dépendent des conditions aux limites appliquées aux extrémités du système.

4.3 Limite continue

Nous allons maintenant considérer le cas où l'on fait tendre le nombre de degrés de liberté vers l'infini. Le système de N équation différentielles décrivant le mouvement se transforme alors en une équation aux dérivées partielles dépendant de 2 paramètres : le temps et la position.

4.3.1 Corde vibrante

On reprend l'étude du système mécanique précédent lorsqu'il existe un nombre infini de masses dans le domaine fini de longueur L . Alors, la distance a entre les masses doit tendre vers 0. Cela revient à dire que la masse n'est plus localisée à certaines positions x_1, \dots, x_n, \dots mais est distribuée de façon *continue* dans tout le domaine. On dit aussi qu'on est passé d'un système à *paramètres localisés* (la masse, les inductances ...) à un système à *paramètres distribués*. Mathématiquement, dans la limite a tendant vers 0, on devra procéder aux changements de variables suivants :

$$\begin{aligned} x_n(t) &\implies u(x, t) \\ x_{n+1}(t) &\implies u(x + a, t) \approx u(x, t) + a \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} + \frac{a^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=a} \\ x_{n-1}(t) &\implies u(x - a, t) \approx u(x, t) - a \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} + \frac{a^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=a} \end{aligned}$$

de sorte qu'on trouve aussitôt que :

$$(x_{n+1} - x_n) - (x_n - x_{n-1}) \approx a^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=a}$$

On en déduit que le système différentiel du système à paramètres localisés se transforme en une équation aux dérivées partielles :

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ka^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Il s'agit là de *l'équation des cordes vibrantes* (plus généralement de l'équation d'ondes), dont la vitesse de propagation⁵ est telle que : $v = \sqrt{\frac{k}{m}} a = a\omega_0$. La relation de dispersion des ondes dans cette limite continue est linéaire. En effet :

$$\omega = 2\omega_0 \sin(ka/2) \approx \omega_0 ka \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{\omega}{k}$$

⁵Dans la dérivation macroscopique de cette équation, $v^2 = T/\rho$ où T et ρ désignent respectivement la tension de la corde à l'équilibre et la masse par unité de longueur. Par identification avec notre modèle dérivé des masses couplées, on vérifiera que $T = ka$ et $\rho = m/a$.

Rappelons que le système est dit sans dispersion dans cette situation où ω est proportionnel au vecteur d'ondes k . On notera que de façon opposée, la situation à paramètres localisés est dispersive pour les grandes valeurs de k (cf figure représentant la fonction $\omega(k)$ dans la section précédente).

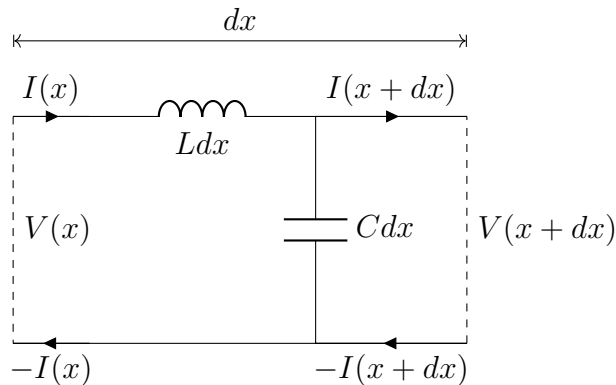
Il est bien connu que la solution générale de l'équation des ondes, soumise aux conditions aux limites, $u(0, t) = u(L, t) = 0$, peut être obtenue à partir d'un développement en série de Fourier qui s'écrira sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \sin(n\pi vt/L) + D_n \cos(n\pi vt/L)] \sin(n\pi x/L)$$

où les coefficients C_n et D_n sont reliés au développement en série de Fourier des positions et vitesses initiales, $u(x, 0)$ et $\partial_t u(x, 0)$. Comme on pouvait s'y attendre, la solution s'écrit comme une somme infinie de modes propres de fréquences $(n\pi/L)v, n \in N$.

4.3.2 Ligne de transmission

L'analogie continue du système d'inductances et de capacités localisées correspond aux lignes de transmissions électriques, c'est-à-dire aux systèmes constitués de 2 conducteurs en vis à vis parcourus par des courants variables dans le temps circulant en sens opposé dans les 2 conducteurs. Un câble co-axial en est un exemple.



Dans cette approche, on assimile un morceau dx de ligne avec un circuit élémentaire constitué d'une capacité Cdx et d'une inductance Ldx (L et C désignent ici des inductances et capacités par unité de longueur). Dans la limite $dx \rightarrow 0$, et en utilisant un développement de Taylor au 1er ordre pour les expressions de $I(x+dx)$ et

$V(x + dx)$, la loi des mailles et la loi des nœuds s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= -L \frac{\partial I}{\partial t}, \\ \frac{\partial I}{\partial x} &= -C \frac{\partial V}{\partial t}\end{aligned}$$

Ces 2 équations sont connues comme les *équations des télégraphistes*. En éliminant V (ou I), entre ces 2 équations, on obtient l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$$

La vitesse de propagation est donc donnée par $v = 1/\sqrt{LC}$. Il est facile de se convaincre par un argument dimensionnel que le rapport V/I , défini comme *l'impédance caractéristique de la ligne*, Z_0 , est telle que $Z_0 = Lv = \sqrt{L/C}$.

Chapter 5

Sujets d'examens

EXAMEN DE 1ÈRE SESSION 2016-2017

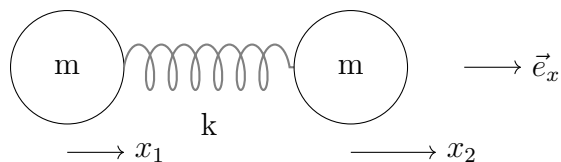
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

Les 3 exercices sont indépendants

Durée : 3 h

Exercice 1

On considère une molécule diatomique schématisée sur la figure suivante par 2 masses identiques m reliées par un ressort de constante de raideur k :



On note x_1 et x_2 les déplacements des masses par rapport à leurs positions lorsque le ressort est sans tension. On ne considère que les mouvements selon l'axe \vec{e}_x et on négligera les effets de toute source de frottements.

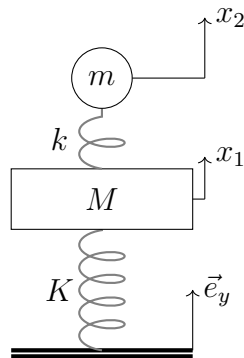
1. Déterminer les équations du mouvement de chaque masse. On introduira la notation $\omega_0^2 = k/m$.
2. Calculer les fréquences propres du système.
3. Donner une interprétation physique du mouvement associé à chacun des 2 modes de vibrations.
4. Déterminer la solution de l'équation du mouvement de chacune des 2 masses lorsque les conditions initiales sont $x_1 = x_2 = 0$, $\dot{x}_1 = v_0 > 0$ et $\dot{x}_2 = 0$.

Exercice 2

Afin de limiter les amplitudes de vibration de certaines machines, on leur adjoint un système masse-ressort de petite dimension.

On modélise ici la machine par une masse M posée sur un ressort de raideur K . Le système rajouté est une masse ponctuelle m , reliée à la machine par un ressort de raideur k .

On note x_1 et x_2 les déplacements des 2 masses par rapport à leurs positions d'équilibre. On ne considère que les mouvements selon l'axe \vec{e}_y et on négligera les effets de toute source de frottements.

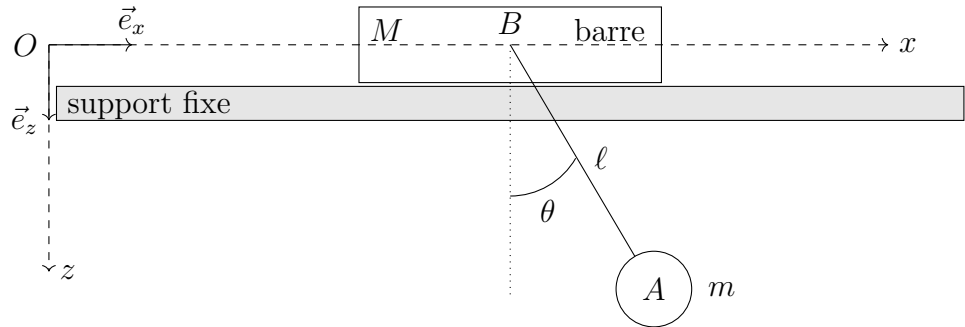


1. On exerce sur la masse M une force harmonique verticale à la pulsation Ω , soit $\vec{F} = F_0 \sin(\Omega t) \vec{e}_y$.
 - (a) Ecrire les équations du mouvement des 2 masses en introduisant la pulsation $\Omega = \sqrt{K/M}$ et les paramètres $\epsilon = k/K$ et $\mu = m/M$.
 - (b) On suppose que le déplacement x_1 est nul.
Simplifier les équations du mouvement et en déduire $x_2(t)$ et une condition reliant ϵ et μ .
 - (c) Quelle interprétation physique peut-on donner de la condition sur ϵ et μ obtenue à la question précédente ?

2. On se place maintenant dans le cas particulier où $\epsilon = \mu$ en supposant en outre $\epsilon \ll 1$ (et donc également $\mu \ll 1$).
 - (a) Calculer les fréquences propres du système (en absence de force extérieure sur M).
 - (b) On exerce sur la masse M une force harmonique verticale à la pulsation ω , avec a priori $\omega \neq \Omega$, soit $\vec{F} = F_0 \sin(\omega t) \vec{e}_y$.
Déterminer l'amplitude des mouvements des masses en régime permanent et retrouver les résultats de la question (1b) lorsque $\omega = \Omega$.

Exercice 3

Un pendule simple, de longueur, ℓ , portant à son extrémité A une masse m est fixé au centre de gravité B d'une barre de masse M , posée sur un support fixe, et libre de se translater sans frottements le long de l'axe Ox .



On repère le mouvement du système par l'abscisse x de B et par l'angle θ que fait le pendule avec la verticale. Dans tout le problème, on procédera à une linéarisation pour la variable θ , et on se limitera donc à des calculs à l'ordre 1 en θ .

1. Exprimer les vecteurs \overrightarrow{OA} , $\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}$ et $\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2}$ dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_z) , en fonction de $\ell, x(t)$ et $\theta(t)$.
2. En déduire les projections de l'équation du mouvement de la masse m selon \vec{e}_x et selon \vec{e}_z .
3. En déduire une première équation différentielle entre $x(t)$ et $\theta(t)$:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \theta - \frac{\ddot{x}}{\ell} \quad (5.1)$$

4. On rappelle que le centre de gravité G du système, défini par la relation $(M + m)\overrightarrow{OG} = M\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OA}$, vérifie l'équation du mouvement :

$$(M + m) \frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} = M\vec{g} + m\vec{g} + \vec{R}$$

où \vec{g} désigne l'accélération de la pesanteur, et \vec{R} la réaction du support sur la barre.

Projetez cette équation selon l'axe Ox , et en déduire une deuxième équation différentielle reliant entre $x(t)$ et $\theta(t)$:

$$\frac{\ddot{x}}{\ell} = -\frac{m}{M + m} \ddot{\theta} \quad (5.2)$$

5. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la seule variable $\theta(t)$?
6. Résoudre cette équation différentielle lorsque $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

7. En déduire l'expression de $x(t)$ lorsque $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$.
8. Représenter schématiquement le pendule BA dans le plan $0xz$ aux instants correspondant à chaque quart de période de son mouvement, depuis $t = 0$ jusqu'à ce que le pendule ait parcouru une période entière (5 schémas).

Oscillations linéaires

L3 Physique - Chimie – Université Paris - Sud

EXAMEN DE 1ÈRE SESSION 2017-2018

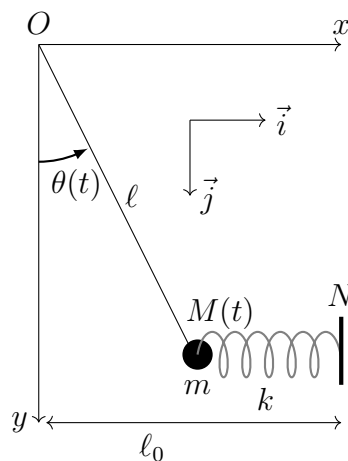
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

Durée : 3 h

Merci de rédiger chaque exercice sur une copie distincte

Exercice 1

On considère le système représenté sur la figure suivante :



Dans tout le problème, le point d'attache du ressort, N, est fixe. La longueur du ressort à vide, c'est-à-dire lorsqu'il n'est ni comprimé ni étiré est ℓ_0 , et dans cette situation le pendule est vertical (cf. schéma). On supposera que l'écart angulaire du pendule est suffisamment faible pour que le ressort reste quasiment horizontal, et pour qu'on puisse linéariser les équations mettant en jeu θ ($\sin \theta \approx \theta$ et $\cos \theta \approx 1$).

1. Dans un premier temps, le point d'attache du pendule est fixe et se confond avec l'origine du repère Oxy . Le point $M(t)$ repère la position de la masse m à l'instant t .

(a) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

En déduire la vitesse et l'accélération de la masse.

- (b) Par application du principe fondamental de la dynamique, déterminer l'équation du mouvement de la masse m , c'est-à-dire l'équation différentielle satisfaite par la fonction $\theta(t)$.
- (c) Quelle est la pulsation propre ω_0 de cet oscillateur ?
Discuter succinctement l'origine physique des termes qui composent ω_0 .
2. On impose au point d'attache du pendule des petites oscillations horizontales, telles que $\overrightarrow{OA}(t) = x_0 \sin(\omega t) \vec{i}$ où A est le point d'attache du pendule à l'instant t .

(a) Faire un schéma représentant le système à un instant quelconque.

(b) Montrer que $\theta(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta}(t) + \omega_0^2 \theta(t) = \frac{x_0}{\ell} (\omega^2 - \omega_1^2) \sin(\omega t) \quad (5.3)$$

où on donnera les expressions des pulsations ω_0 et ω_1 (vous devez trouver que $\omega_0 > \omega_1$).

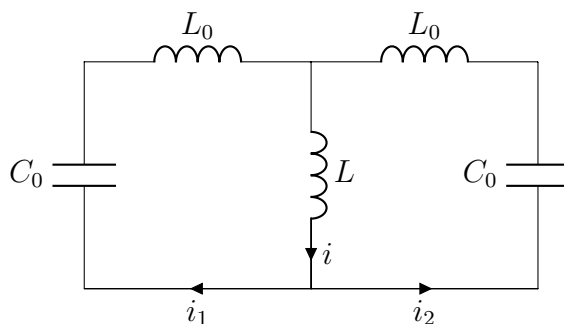
- (c) On étudie le mouvement de la masse en régime permanent (cela suppose quelques frottements que nous avons en fait négligés).
- i. Déterminer l'expression de la fonction $\theta(t)$ dans ce régime.
 - ii. Que se passe-t-il lorsque $\omega = \omega_1$ et lorsque $\omega = \omega_0$?
 - iii. Comparer les déplacements du point A et du point M selon que $\omega < \omega_0$ ou que $\omega > \omega_0$.
- (d) Quelle est la solution générale de l'équation différentielle (5.3) ?

Exercice 2

Les 2 parties de l'exercice sont indépendantes

1ère partie

Dans cette première partie, on étudie les oscillations libres de 2 circuits identiques (L_0, C_0) , constitués chacun d'un condensateur et d'une inductance, couplés par une inductance de coefficient d'auto-induction L .

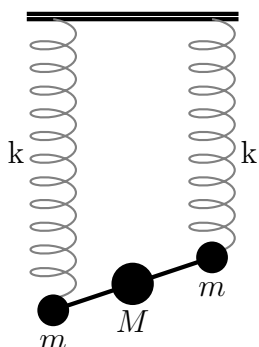


1. En appliquant la loi des mailles et la loi des nœuds au circuit étudié, montrer que la charge électrique totale $Q(t) = q_1(t) + q_2(t)$ et la différence de charges $\delta Q(t) = q_1(t) - q_2(t)$ vérifient les équations différentielles :

$$\begin{aligned}\ddot{Q}(t) &= -\omega_1^2 Q(t), \\ \ddot{\delta Q}(t) &= -\omega_2^2 \delta Q(t)\end{aligned}$$

On donnera les expressions de ω_1 et ω_2 en fonction des paramètres, L_0, C_0, L .

2. Quelles sont les solutions générales de ces 2 équations différentielles ?
3. En déduire les expressions générales des charges $q_1(t)$ et $q_2(t)$ circulant dans chacune des mailles.
4. On considère un système mécanique constitué de 2 ressorts identiques, de constante de raideur k , supportant chacun une masse m . Les 2 masses sont reliées par une barre de masse négligeable portant en son centre une masse M .



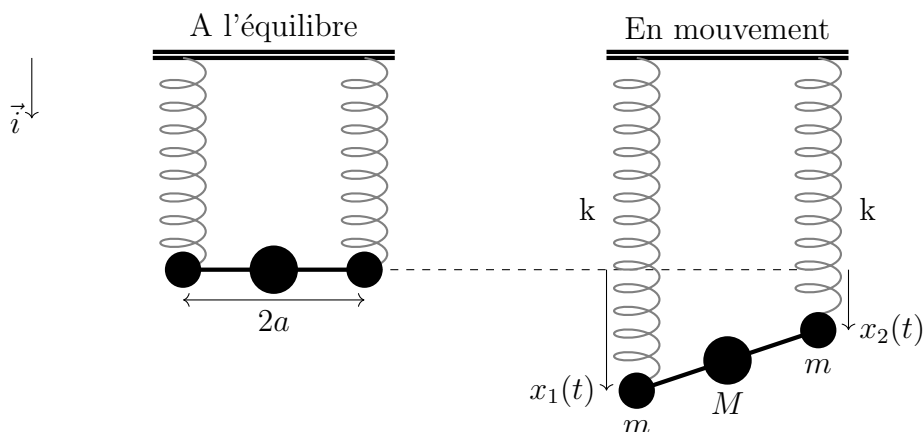
Justifier pour quelles raisons ce système peut être considéré comme un analogue mécanique du circuit électrique étudié plus haut.

2ème partie

On étudie maintenant le système mécanique représenté ci-dessus.

Dans tout le problème, on supposera que la barre est suffisamment peu inclinée au cours de son mouvement pour que les ressorts restent quasiment verticaux.

Dans la situation d'équilibre, les forces de rappel des 2 ressorts compensent les poids des 3 masses. Les seules forces extérieures s'exerçant sur la barre à prendre en compte dans l'étude du mouvement sont donc les forces de rappel des ressorts exprimées sous la forme $-kx_1(t)\vec{i}$ et $-kx_2(t)\vec{i}$, où $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont les écarts aux positions d'équilibre des 2 masses m (cf. schéma).



1. Application du théorème du centre de gravité

- (a) Déterminer l'abscisse $x_G(t)$ du centre de gravité G de la barre en fonction de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
- (b) Par application du théorème du centre de gravité, en déduire le résultat :

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\frac{2k}{2m + M} (x_1 + x_2)$$

2. Application du théorème du moment cinétique

- (a) Calculez le moment cinétique de la barre chargée des 3 masses (supposées ponctuelles) par rapport au centre de gravité G de la barre.
- (b) Calculez les moments des forces extérieures appliquées à la barre par rapport à G.
- (c) Par application du théorème du moment cinétique, en déduire le résultat :

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\frac{k}{m} (x_1 - x_2)$$

3. Déterminez les fréquences propres et les modes propres de la barre.
4. Déterminer les solutions générales $x_1(t)$ et $x_2(t)$, valables à tout instant t , qui représentent les oscillations libres de la barre.
5. Préciser les conditions qui conduisent à chacun des modes propres d'oscillations et décrire le mouvement de la barre dans chacun de ces 2 modes.

Rappels

Théorème du centre de gravité

Le mouvement du centre de gravité d'un système est celui d'un point matériel où serait concentrée toute la masse du système et auquel serait appliquée la résultante des forces extérieures au système.

Théorème du moment cinétique

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un système matériel pris par rapport à un point est égale au moment résultant par rapport à ce point des seules forces extérieures appliquées au système.

Oscillations linéaires

L3 Physique - Chimie – Université Paris - Sud

EXAMEN DE 1ÈRE SESSION 2018-2019

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

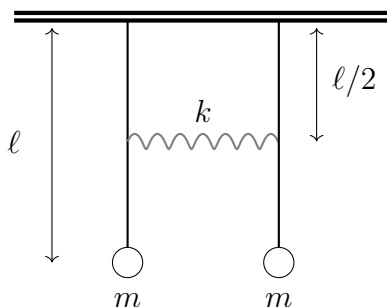
Durée : 2h30

Merci de rédiger chaque exercice sur une copie distincte

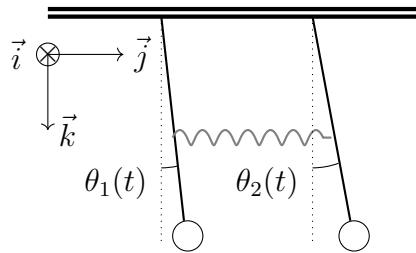
Exercice 1

On considère 2 pendules identiques de longueurs ℓ dont les tiges sont de masses négligeables. Les pendules sont accrochés à un même support fixe et portent à leurs extrémités des petites sphères de masses m . En outre, les 2 pendules sont liés par 1 ressort de constante de raideur k fixé à mi-hauteur des tiges (cf. figure).

A l'équilibre les pendules sont verticaux et le ressort est sans tension.



A l'équilibre



En mouvement

Dans tout le problème, on considèrera que les mouvements se font sans frottements. Les amplitudes des pendules sont supposées suffisamment faibles pour pouvoir linéariser les expressions comportant les angles θ_1 et θ_2 ($\sin \theta_i \approx \theta_i$ et $\cos \theta_i \approx 1$), et pour considérer que le ressort est quasi-horizontale.

1. Etude du système non forcé

- Quelles sont les forces extérieures qui s'exercent sur le pendule de gauche ?
- Déterminer les moments de ces forces par rapport au point d'attache du pendule.
- Par application du théorème du moment cinétique, en déduire l'équation d'évolution de la variable $\theta_1(t)$.
- Après avoir écrit l'équation d'évolution de la variable $\theta_2(t)$ (sans refaire les calculs), justifier que les équations du mouvement peuvent s'écrire sous la forme :

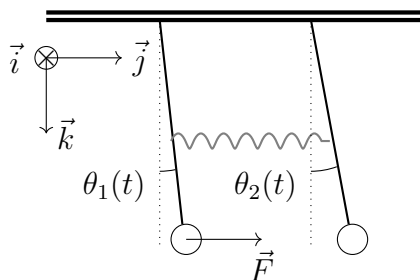
$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \omega_0^2 + \omega_1^2 & -\omega_1^2 \\ -\omega_1^2 & \omega_0^2 + \omega_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

où ω_0 et ω_1 sont des fréquences caractéristiques du système que l'on précisera.

- Déterminer les 2 fréquences propres, notées ω_- et ω_+ (avec $\omega_- < \omega_+$), et les 2 coordonnées normales du système.
- En vous justifiant, préciser quelles seraient les conditions initiales qui conduiraient à des oscillations des pendules soit à la fréquence ω_- , soit à la fréquence ω_+ .
- Déterminer la solution générale des équations du mouvement.

2. Etude du système forcé

Le pendule de gauche est soumis à une force additionnelle $\vec{F} = F_0 \sin(\omega t) \vec{j}$ (cf figure). On suppose toujours que les amplitudes des pendules sont suffisamment faibles pour retenir l'hypothèse de linéarisation des équations du mouvement.



- (a) Comment le système différentiel (1) est-il modifié ?
 (b) En déduire que les variables $\eta_+ = \theta_1 + \theta_2$ et $\eta_- = \theta_1 - \theta_2$ vérifient les équations différentielles :

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}_+ &= -\omega_-^2 \eta_+ + \frac{F_0}{m\ell} \sin(\omega t) \\ \ddot{\eta}_- &= -\omega_+^2 \eta_- + \frac{F_0}{m\ell} \sin(\omega t)\end{aligned}$$

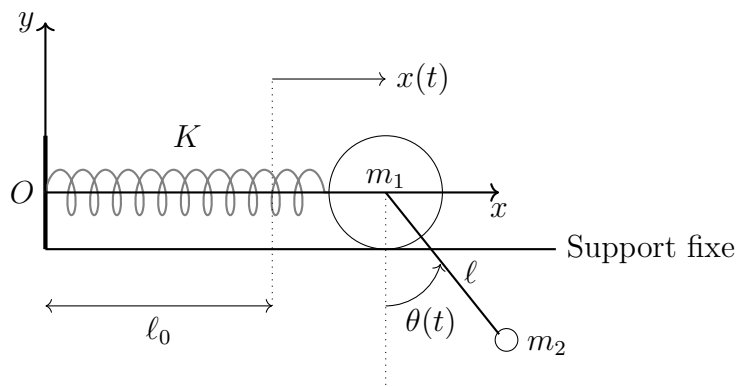
- (c) Bien que les frottements soient faibles et négligés, ils sont toujours présents et conduisent à l'extinction des solutions transitoires au bout d'un temps suffisamment long.

Quelles sont les solutions des 2 équations différentielles précédentes en régime permanent ?

- (d) En déduire les expressions des variables $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ en régime permanent.
 (e) En déduire que les amplitudes des pendules divergent pour des fréquences de forçage ω que l'on précisera, et déterminer la fréquence ω pour laquelle l'amplitude $\theta_1(t)$ du pendule forcé s'annule.
 (f) Représenter schématiquement les amplitudes des 2 pendules en régime permanent en fonction de ω .

Exercice 2

Une masse m_1 accrochée à un ressort de constante de raideur K , de longueur à vide ℓ_0 , peut glisser sans frottement le long de l'axe Ox sur un support fixe. Un pendule simple de masse m_2 et de longueur ℓ est accroché à la masse m_1 (cf. figure).



Dans tout le problème, on suppose l'amplitude du pendule suffisamment faible pour pouvoir linéariser les expressions impliquant $\theta(t)$, et on négligera toute source de frottements.

1. Les positions des 2 masses dans le plan seront repérées par rapport à la position d'équilibre du système, c'est-à-dire lorsque le ressort est non tendu et que le pendule est vertical ($\theta = 0$).

A l'instant t , les coordonnées de la masse m_1 sont donc telles que :

$$x_1(t) = x(t) \quad \text{et} \quad y_1(t) = 0$$

Exprimer les coordonnées $(x_2(t), y_2(t))$ de la masse m_2 à l'instant t en fonction de $x(t)$, ℓ et $\theta(t)$ (ne pas oublier de linéariser).

2. En déduire les vitesses de chaque masse ainsi que l'énergie cinétique totale du système, $E_c(\dot{x}, \dot{\theta})$.
3. Justifier que l'énergie potentielle totale du système, E_P s'écrit sous la forme :

$$E_P(x, \theta) = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}m_2g\ell\theta^2$$

4. On rappelle que les équations du mouvement peuvent être obtenues par les équations de Lagrange qui s'écrivent ici sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta},$$

où $\mathcal{L} = E_c - E_p$ est le lagrangien du système.

Utilisez ce formalisme pour montrer que les équations différentielles du mouvement sont données par les 2 équations :

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{x} &= -m_2\ell\ddot{\theta} - Kx, \\ \ell\ddot{\theta} &= -\ddot{x} - g\theta \end{aligned}$$

5. On se place dans le cas où $m_1 = 3m$, $m_2 = m$ et où $K = 4m\omega_0^2$ où on a posé $\omega_0^2 = g/\ell$.

Montrez que le système d'équations obtenues dans la question précédente peut s'écrire sous la forme plus conventionnelle :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ell\ddot{\theta} \end{pmatrix} = -\frac{\omega_0^2}{3} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \ell\theta \end{pmatrix}$$

6. Déterminer les solutions générales de ce système.
7. On considère le cas particulier où le système est abandonné sans vitesses initiales avec $x(0) = 0$ et $\theta(0) = \theta_0$.

Etablir les expressions de $x(t)$ et $\theta(t)$ à tout instant $t > 0$.