Physique des Plasmas & de la Fusion

Rappels sur l'opérateur ∇ (nabla)

roch smets — 2015

Table des matières

— 1 —

Notes sur les équations tensorielles

Dans ces notes, j'adopte la convention anglo-saxonne pour noter les vecteurs : les caractères gras. Il s'impose donc aussi aux symboles, comme le nabla. Dans la section suivante qui traite des tenseurs, on utilisera aussi ce formalisme pour les tenseurs de tous ordres. Ce choix peut étonner car cette convention ne permet pas *a priori* de déterminer l'ordre des tenseurs. mais le contexte le permet souvent, et il permet de ne pas surcharger l'écriture des tenseurs d'ordres élevés, avec des collections de flèches.

1.1 Les symboles de Kronecker et de Levi-Civita

Le symbole de Kronecker. Il se note $\boldsymbol{\delta}$ ou δ_{ij} en notation indicée. C'est un tenseur d'ordre 2 et de dimension 3 (mais on peut aussi le définir à 2 dimensions) donné par

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

on l'appelle aussi tenseur unité. Ainsi, $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Le symbole de Levi-Civita. Il se note $\boldsymbol{\varepsilon}$ ou ε_{ijk} en notation indicée. C'est un tenseur d'ordre 3 et de dimension 3. Il peut s'exprimer à l'aide du déterminant

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \delta i1 & \delta i2 & \delta i3 \\ \delta j1 & \delta j2 & \delta j3 \\ \delta k1 & \delta k2 & \delta k3 \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

Les élements de ce tenseur ne peuvent donc valoir que -1, 0 ou +1. Ainsi, $\varepsilon_{ijk} = +1$ si $(i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$, $\varepsilon_{ijk} = -1$ si $(i, j, k) \in \{(3, 2, 1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}$, $\varepsilon_{ijk} = 0$ autrement (si 2 indices sont égaux).

Le symbole de Levi-Civita est utile dans l'écriture sous forme indicée d'un produit vectoriel. Ainsi, $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ s'écrit sous forme indicée $A_i = \varepsilon_{ijk} B_j C_k$. Cette écriture n'est pas unique, on peut faire ce que l'on veut comme permutation directe sur les indices de ε, ou même indirecte en ajoutant un signe moins. Ainsi, $A_i = C_k \varepsilon_{ijk} B_j$ ou encore $-B_j \varepsilon_{jik} C_k$. Sous forme vectorielle, cela s'écrit donc $\mathbf{A} = \mathbf{C} \,.\, \boldsymbol{\varepsilon} \,.\, \mathbf{B}$ ou encore $\mathbf{A} = -\mathbf{B} \,.\, \boldsymbol{\varepsilon} \,.\, \mathbf{C}$

1.2 Formules vectorielles

Soit $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux vecteurs.

Propriété 1. *Le produit scalaire est commutatif*

$$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B} = \mathbf{B} \,.\, \mathbf{A} \tag{1.3}$$

Propriété 2. *Le produit vectoriel est anti-commutatif*

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \tag{1.4}$$

Par contre, les produits scalaires ou vectoriels avec des tenseurs, ne satisfont pas à ces règles *a priori*. Pour que cela soit le cas, il faut que le ou les tenseurs soient symétriques.

Propriété 3. *(Produit mixte)*

$$\mathbf{A} \,.\, (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \,.\, (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \,.\, (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \tag{1.5}$$

C'est une permutation que l'on utilise souvent. Attention a garder une permutation des vecteurs $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ dans le bon ordre.

Propriété 4. *(Double produit vectoriel)*

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \,.(\mathbf{CB} - \mathbf{BC}) \tag{1.6}$$

C'est une forme que l'on rencontre assez peu, mais qui me semble moins dangereuse que le moyen mnémotéchnique “bac moins cab”... car dans cette expression, rien ne vous dit où doivent se trouver les paranthèses, qui sont indispensables. La notation ci-dessus implique une écriture tensorielle, mais elle n'a rien de compliqué, et facilite même souvent les calculs.

Propriété 5. *(Produit mixte, bis repetita)*

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \,.\, (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \,.\, \mathbf{C})(\mathbf{B} \,.\, \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \,.\, \mathbf{D})(\mathbf{B} \,.\, \mathbf{C}) \tag{1.7}$$

On peut utiliser le symbole de Levi-Civita pour développer le membre de gauche afin de redémontrer cette expression.

1.3 De Vlasov à la hiérarchie des équations fluides

Pour traiter un sujet relatif à la physique des plasmas, Nous allons travailler sur les équations fluides pour décrire un plasma. Il s'agit en fait d'une hiérarchie infinie d'équations. Ainsi, la première est la plus importante, la seconde permet de mieux préciser l'état du plasma, mais en contenant moins d'informations, *et caetera*. En fait, la définition des moments fluides (eq. 1.9 à 1.13) montre que plus un moment est d'ordre élevé, plus il renseigne sur la “queue” de la fonction de distribution du plasma. Une fonction de distribution devant être tempérée, on en déduit que plus on est loin dans la “queue”, moins il y a d'informations.

Vous verrez en théorie fluide que les équations fluides s'obtiennent à partir de l'équation cinétique de Vlasov [1] qui gouverne l'évolution de la fonction de distribution f :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{w} \, . \, \boldsymbol{\nabla} f + \frac{q}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B}) \, . \, \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{w}} f = 0 \tag{1.8}$$

pour les particules de vitesse individuelle $\mathbf{w}$.

1.4 Les moments de la fonction de distribution

On définit les moments d'ordre 0, 1, 2 et 3 de la fonction de distribution par les intégrales suivantes :

$$n = \int f \, d\mathbf{v} \tag{1.9}$$

$$\mathbf{V} = n^{-1} \int f \mathbf{w} \, d\mathbf{w} \tag{1.10}$$

$$\mathbf{P} = m \int f(\mathbf{w} - \mathbf{V})(\mathbf{w} - \mathbf{V}) \, d\mathbf{w} \tag{1.11}$$

$$\mathbf{Q} = m \int f(\mathbf{w} - \mathbf{V})(\mathbf{w} - \mathbf{V})(\mathbf{w} - \mathbf{V}) \, d\mathbf{w} \tag{1.12}$$

$$\mathbf{R} = m \int f(\mathbf{w} - \mathbf{V})(\mathbf{w} - \mathbf{V})(\mathbf{w} - \mathbf{V})(\mathbf{w} - \mathbf{V}) \, d\mathbf{w} \tag{1.13}$$

On obtient alors la densité, la vitesse fluide, le tenseur de pression, le flux de chaleur généralisé et le cumulant d'ordre 4. En hydrodynamique, on sépare souvent pour le moment d'ordre 2 un tenseur de la forme $p \, \boldsymbol{\delta}$ que l'on appelle la pression (scalaire) et un tenseur que l'on note souvent $\boldsymbol{\sigma}$ et que l'on appelle le tenseur des contraintes. De même, on rencontre souvent le vecteur flux de chaleur $\mathbf{q}$ qui est une contraction du flux de chaleur généralisé défini par $\mathbf{q} = \mathbf{Q} \, . \, \boldsymbol{\delta}$. Le moment d'ordre 4 s'appelle le cumulant d'ordre 4.

Notez que les produits qui interviennent sont des produits dyadiques (ou tensorielles). n, $\mathbf{V}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ sont donc des tenseurs d'ordre 0, 1, 2, 3 et 4, respectivement. On obtient alors l'équation d'évolution de ces moments en intégrant l'équation de Vlasov que l'on

1. *i.e.* l'équation de Boltzmann sans terme de collision

multiplie par 1, $m\mathbf{w}$, $m(\mathbf{w}-\mathbf{V})(\mathbf{w}-\mathbf{V})$ et $m(\mathbf{w}-\mathbf{V})(\mathbf{w}-\mathbf{V})(\mathbf{w}-\mathbf{V})$. On obtient ainsi les équations fluides d'ordre 0, 1, 2 et 3, respectivement.

Bien évidemment, cette liste n'est en rien exhaustive, et l'on peut calculer les moments d'ordre supérieur [2].

1.5 Les équations fluides

Nous allons donner les quatre premières équations, même si la plupart du temps, on utilise que les trois premières. Mais libre à vous, de calculer les suivantes... si par exemple vous êtes un jour coincé sur une île deserte.

Equation d'ordre 0

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}.(n\mathbf{V}) = 0 \tag{1.14}$$

Sous forme indicée, cette équation s'écrit

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_i(nV_i) = 0 \tag{1.15}$$

où ∇_i est la composante i de l'opérateur $\boldsymbol{\nabla}$. Cette forme s'obtient immédiatement, car il n'y a qu'un produit scalaire à développer. Dans cette équation, comme dans les autres, on adopte la convention de Einstein, ou encore convention de sommation sur l'indice répété.

Equation d'ordre 1

$$\frac{\partial nm\mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}.(nm\mathbf{V}\mathbf{V} + \mathbf{P}) = nq(\mathbf{E} + \mathbf{V}\times\mathbf{B}) \tag{1.16}$$

Sous forme indicée, cette équation s'écrit

$$\frac{\partial nmV_i}{\partial t} + mV_iV_j\nabla_j n + nmV_i\nabla_j V_j + nmV_j\nabla_j V_i + \nabla_j P_{ji}) = nq(E_i + \varepsilon_{ijk}V_jB_k) \tag{1.17}$$

Dans cette équation, la forme indicée nécessite d'introduire le symbole de Levi-Civita. Faites alors attention à l'ordre des indices, car le produit vectoriel est anti-symétrique. De même, bien que le tenseur $\mathbf{VV}$ soit symétrique, dans le développement du second terme de l'eq. (1.16), il faut prendre garde à la manière dont $\boldsymbol{\nabla}$ agit sur $\mathbf{V}$. Par contre, la définition de $\mathbf{P}$ donnée par l'eq. (1.11) montre que le tenseur de pression est symétrique ; l'ordre des indices n'importe donc pas.

Equation d'ordre 2

2. Je n'ai jamais lu de travaux scientifiques traitant d'un moment d'ordre strictement supérieur à 4

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}.(\mathbf{VP} + \mathbf{Q}) + [\mathbf{P}\ .\boldsymbol{\nabla}\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P}]^S = 0 \tag{1.18}$$

où $\boldsymbol{\Omega} = q\mathbf{B}/m$ est la gyrofréquence (vectorielle) et où on a introduit l'opérateur de symétrisation du tenseur d'ordre 2, qui s'écrit en notation indicée $[T_{ij}]^S = T_{ij} + T_{ji}$.

Dans cette expression, il y a le produit vectoriel d'un vecteur par un tenseur d'ordre 2. Vous pouvez retrouver son expression simplement. Un vecteur est un ensemble de scalaires, *i.e.* un tenseur d'ordre 1 est une famille de tenseurs d'ordre 0. De même, un tenseur d'ordre 2 est une famille de tenseurs d'ordre 1. Ainsi, le tenseur $\mathbf{AB}$ de terme A_iB_j peut se voir comme un vecteur dont chaque composante est elle-même un vecteur. D'ailleurs, en langage C, un tableau à deux dimensions se représente souvent en utilisant un pointeur de pointeur.

Fort de cette remarque, on peut calculer la forme du produit vectoriel d'un vecteur par un tenseur d'ordre 2. Vous conviendrez pour cela que le résultat est un tenseur d'ordre 2. Si $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ où $\mathbf{B}$ est un tenseur d'ordre 1 et $\mathbf{C}$ un tenseur d'ordre 2, alors $\mathbf{A}$ est aussi d'ordre 2, et

$$A_{il} = \varepsilon_{ijk} B_j C_{kl} \tag{1.19}$$

Dans cette expression, $\mathbf{C}$ n'est pas forcément symétrique. Il faut dans l'équation ci-dessus écrire le terme C_{kl} et non pas C_{lk}.

Equation d'ordre 3

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}.(\mathbf{VQ} + \mathbf{R}) + [\mathbf{Q}\ .\boldsymbol{\nabla}\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q} - \frac{1}{nm}\mathbf{P}\boldsymbol{\nabla}.\ \mathbf{P}]^S = 0 \tag{1.20}$$

où on a introduit l'opérateur de symétrisation du tenseur d'ordre 3, qui s'écrit en notation indicée $[T_{ijk}]^S = T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij}$. Tous les termes sont-ils bien d'ordre 3 ? On obtient sous forme indicée

$$\frac{\partial Q_{ijk}}{\partial t} + \nabla_l(V_l Q_{ijk} + V_i Q_{ljk} + R_{lijk}) + [Q_{ijl}\nabla_l V_k + \varepsilon_{ilm}\Omega_l Q_{mjk} - \frac{1}{nm} P_{ij}\nabla_l P_{lk}]^S = 0 \tag{1.21}$$

car dans le développement de $\boldsymbol{\nabla}.(\mathbf{VQ})$, $\boldsymbol{\nabla}$ agit sur $\mathbf{V}$ mais aussi sur $\mathbf{Q}$.

1.6 Exercices

Exercice 1. *En utilisant le développement avec le symbole de Levi-Civita, démontrez la propriété*

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) . (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} . \mathbf{C})(\mathbf{B} . \mathbf{D}) - (\mathbf{A} . \mathbf{D})(\mathbf{B} . \mathbf{C}) \tag{1.22}$$

Exercice 2. *Vérifiez que l'eq. (1.16) peut aussi s'écrire*

$$nm\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V}.\boldsymbol{\nabla}\mathbf{V}\right) = nq(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \boldsymbol{\nabla}\,.\,\mathbf{P} \tag{1.23}$$

Exercice 3. *Réécrire l'eq. (1.18) en notation indicée.*

Exercice 4. *Ecrire en notation indicée* $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ *où* $\mathbf{C}$ *est un tenseur d'ordre 1 et* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *sont des tenseurs d'ordre 2.*

— 2 —

L'opérateur $\boldsymbol{\nabla}$

L'opérateur $\boldsymbol{\nabla}$ ("nabla" en français) est très utilisé en physique. On le rencontre notamment en électromagnétisme, en hydrodynamique... et donc beaucoup en physique des plasmas. L'utilisation de l'opérateur nabla rebutte souvent les étudiants car c'est un être mathématique bivalent :

— C'est un vecteur. Il satisfait donc aux règles des vecteurs, pour le calcul de produit scalaire, vectoriel, dyadique.

— C'est un opérateur differentiel. A ce titre, il satisfait à toutes les règles qui s'imposent à la dérivation de fonctions.

De plus l'expression de l'opérateur $\boldsymbol{\nabla}$ dépend du système de coordonnées. Usuellement, il peut-être cartésien, cylindrique, ou sphérique. Il convient d'être à l'aise avec les trois car la géométrie des problèmes impose souvent son choix.

2.1 $\boldsymbol{\nabla}$ dans les 3 systèmes de coordonnées

En coordonnées cartésiennes on note $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ les vecteurs unitaires dans les directions x, y et z. De plus on définit le rayon vecteur $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + Z\hat{\mathbf{z}}$, ainsi que le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{r}/r$.
La première des propriété se vérifie simplement, quelque soit le système de coordonnées.

Propriété 6.

$$\boldsymbol{\nabla} r = \frac{\mathbf{r}}{r} \equiv \hat{\mathbf{n}} \tag{2.1}$$

Vous pourez aussi vérifier les quatre relations suivantes.

Propriété 7.

$$\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{r} = 3 \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{r} = 0 \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{\nabla}.\hat{\mathbf{n}} = \frac{2}{r} \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \tag{2.3}$$

Ces relations n'ayant aucune raison de dépendre du système de coordonnées, elles sont aussi vraies dans n'importe quelle base. Il faut noter qu'elles sont vraies dans une géométrie à 3 dimensions. Si vous raisonnez dans un plan, il faut alors les modifier [1]. On peut aussi montrer la relation

Propriété 8.

$$(\mathbf{A}\,.\boldsymbol{\nabla})\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{r}[\mathbf{A} - \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{A}\,.\,\hat{\mathbf{n}})] \equiv \frac{\mathbf{A}_\perp}{r} \tag{2.4}$$

qui se démontre plus facilement en se plaçant en coordonnées sphériques [2]. Pour retrouver les expressions de l'opérateur $\boldsymbol{\nabla}$ dans les différents systèmes de coordonnées, il faut partir de la relation entre l'opérateur $\boldsymbol{\nabla}$ et la différentielle totale d'une fonction ψ.

Définition 1. *La différentielle totale d'une fonction ψ est reliée à son gradient par la relation*

$$d\psi = \boldsymbol{\nabla}\psi\,.\,d\mathbf{r} \tag{2.5}$$

Il ne reste plus alors qu'à exprimer les formes de $d\mathbf{r}$ dans les différents systèmes de coordonnées.

Coordonnées cartésiennes. Les vecteurs unitaires de la base cartésienne sont $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$. L'expression de l'élément différentiel est $d\mathbf{r} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$ dont on déduit l'expression du gradient de ψ

$$\boldsymbol{\nabla}\psi = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{2.6}$$

et donc de l'opérateur $\boldsymbol{\nabla}$

$$\boldsymbol{\nabla} = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.7}$$

On en déduit aussi la forme du Laplacien d'une fonction

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{2.8}$$

Les vecteurs unitaires de la base cartésienne étant constants, les expressions de la divergence et du rotationnel sont alors simples

$$\boldsymbol{\nabla}.\,\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \tag{2.10}$$

1. Par exemple, dans le plan, $\boldsymbol{\nabla}.\hat{\mathbf{n}} = 1/r$.
2. Nous allons introduire dans ce qui suit la forme de l'opérateur $\boldsymbol{\nabla}$ dans ce système de coordonnées.

Coordonnées cylindriques. Les vecteurs unitaires de la base cylindrique sont $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\mathbf{z}})$. Le vecteur $\hat{\mathbf{r}}$ est alors le vecteur radial dans le plan (x, y). On a donc $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{r}/r$, et $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ étant défini comme en cartésien. L'expression de l'élément différentiel est $d\mathbf{r} = dr\hat{\mathbf{r}} + rd\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\hat{\mathbf{z}}$ dont on déduit l'expression du gradient de ψ

$$\boldsymbol{\nabla}\psi = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{2.11}$$

et donc de l'opérateur $\boldsymbol{\nabla}$

$$\boldsymbol{\nabla} = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r}\frac{\partial}{\partial\phi} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.12}$$

On en déduit pas directement la forme du Laplacien d'une fonction, car les vecteurs de la base ne sont pas constants. $\hat{\mathbf{z}}$ est un vecteur unitaire constant, mais pas $\hat{\mathbf{r}}$ ni $\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Vous pourrez montrer la forme du Laplacien

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{2.13}$$

Pour illustrer la manière de procéder, calculons la forme de la divergence. On décompose $\mathbf{A} = A_r\hat{\mathbf{r}} + A_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$. Alors

$$\boldsymbol{\nabla}.\,\mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla}.\,(A_r\hat{\mathbf{r}} + A_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + A_z\hat{\mathbf{z}}) \tag{2.14}$$

$$= \hat{\mathbf{r}}.\boldsymbol{\nabla}A_r + A_r\boldsymbol{\nabla}.\,\hat{\mathbf{r}} + \hat{\boldsymbol{\phi}}.\boldsymbol{\nabla}A_\phi + A_\phi\boldsymbol{\nabla}.\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + \hat{\mathbf{z}}.\boldsymbol{\nabla}A_z + A_z\boldsymbol{\nabla}.\,\hat{\mathbf{z}} \tag{2.15}$$

Avec la forme du gradient, on développe facilement les trois termes $\boldsymbol{\nabla}A_r$, $\boldsymbol{\nabla}A_\phi$ et $\boldsymbol{\nabla}A_z$, et donc leur projection sur les vecteurs unitaires de la base cylindrique. De plus, $\hat{\mathbf{z}}$ est un vecteur unitaire constant donc sa divergence est nulle. Il reste à expliciter $\boldsymbol{\nabla}.\,\hat{\mathbf{r}}$ et $\boldsymbol{\nabla}.\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$. On admettra pour ce calcul les expressions (2.30) et (2.33), que l'on va démontrer par la suite. Alors,

$$\boldsymbol{\nabla}.\,\hat{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\nabla}.\,\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{1}{r}\boldsymbol{\nabla}.\,\mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}\,.\boldsymbol{\nabla}r}{r^2} = \frac{2}{r} - \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \tag{2.16}$$

Pour la forme de $\boldsymbol{\nabla}.\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$ on l'écrit

$$\boldsymbol{\nabla}.\,\left(\hat{\mathbf{z}} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{\mathbf{r}}{r}\,.\,(\boldsymbol{\nabla} \times \hat{\mathbf{z}}) - \hat{\mathbf{z}}\,.\left(\boldsymbol{\nabla} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right) = 0 \tag{2.17}$$

En effet, le premier terme est nul car $\hat{\mathbf{z}}$ est constant et le second aussi car le rotationnel de $\mathbf{r}/r$ est dans le plan normal à la direction $\hat{\mathbf{z}}$ (faites le calcul en coordonnnnnes cartésiennes pour vous en convaincre). On peut alors en déduire la forme de la divergence

$$\boldsymbol{\nabla}.\,\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{2.18}$$

pour laquelle le premier terme a été factorisé. En procédant de même pour le rotationel, on montre

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \hat{\mathbf{z}}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right) \tag{2.19}$$

Coordonnées sphériques. Le vecteur $\hat{\mathbf{r}}$ est le vecteur unitaire dans la direction radiale. $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ étant dans le plan $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{z}})$ et $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ étant normale aux deux autres vecteurs de la base, $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ est aussi normale à $\hat{\mathbf{z}}$. Attention, la définition $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}}$ ne peux pas être correcte ; ces deux vecteurs n'étant pas normaux, leur produit vectoriel n'est pas toujours unitaire. Il faut alors considérer la valeur de l'angle θ, soit $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}})/\sin\theta$. La base étant directe, on a aussi $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \hat{\mathbf{r}}$, ces deux vecteurs étant normaux.

L'expression de l'élément différentiel est $d\mathbf{r} = dr\hat{\mathbf{r}} + rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ dont on déduit l'expression du gradient de ψ

$$\boldsymbol{\nabla}\psi = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \tag{2.20}$$

et donc de l'opérateur $\boldsymbol{\nabla}$

$$\boldsymbol{\nabla} = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{2.21}$$

Comme en coordonnées cylindriques, les vecteurs de la base sphérique ne sont pas constants [3]. Donc les expressions du Laplacien, de la divergence et du rotationel nécessitent de calculer la divergence de ces vecteurs.

Ces expressions permettent de calculer la divergence des trois vecteurs de la base, et donc la forme du laplacien, de la divergence et du rotationel.
On obtient pour le laplacien

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \tag{2.22}$$

Pour la divergence

$$\boldsymbol{\nabla}.\ \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \tag{2.23}$$

Pour le rotationel

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}}\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right] + \hat{\boldsymbol{\theta}}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right] + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right] \tag{2.24}$$

3. et d'ailleurs, dans cette géométrie, aucun ne l'est.

2.2 Formules vectorielles avec $\boldsymbol{\nabla}$

Vous pouvez les apprendre par coeur, même si dans votre existence scientifique, vous aurez bien souvent la possibilité d'avoir une table les résumant sous les yeux. Néanmoins, vous allez voir qu'avec quelques règles de bases, et les formules vectorielles sans $\boldsymbol{\nabla}$, vous pouvez retrouver rapidement celles avec $\boldsymbol{\nabla}$.

Les deux premières propriétés, peut-être les plus importantes sont que le rotationel d'un gradient ainsi que la divergence d'un rotationel sont nuls,

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\psi) = 0 \tag{2.25}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \,.\, (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = 0 \tag{2.26}$$

Dans la première expression, il n'y a pas besoin de paranthèses car les deux manières de lire cette équation sont justes. Dans la seconde expression, elles ne sont pas non plus nécessaires, car l'opérateur $\boldsymbol{\nabla} \,.\, \boldsymbol{\nabla}$ est scalaire ; son produit vectoriel avec $\mathbf{A}$ n'a donc pas de sens.

Pour démontrer les autres expressions, on va utiliser une convention qui n'a rien d'universel. $\boldsymbol{\nabla}$ étant un être mathématique, vectoriel et différentiel, il faudra intégrer dans son développement les règles propres aux vecteurs et celles propres aux dérivées. Utilisons les paranthèses pour les opérations relatives aux dérivées et les crochets pour les opérations relatives aux vecteurs. Un premier exemple pour l'illustrer, le développement de $\boldsymbol{\nabla} \,.\, (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \,.\, [(\mathbf{A} \times \mathbf{B})] &= \boldsymbol{\nabla} \,.\, [(\mathbf{A}) \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times (\mathbf{B})] && (2.27)\\
&= \boldsymbol{\nabla} \,.\, [(\mathbf{A}) \times \mathbf{B} - (\mathbf{B}) \times \mathbf{A}] && (2.28)\\
&= \mathbf{B} \,.\, [\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A})] - [\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{B})] \,.\, \mathbf{A} && (2.29)
\end{aligned}$$

Et l'on obtient la relation

$$\boldsymbol{\nabla} \,.\, (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \,.\, (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \,.\, (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) \tag{2.30}$$

On peut démontrer de même toutes les autres relations, souvent en au plus 2 lignes de calcul ! Il en est ainsi de $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})$ que l'on développe en utilisant l'eq. (1.6) du double produit vectoriel

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla} \,.\, [\mathbf{A}\boldsymbol{\nabla} - \boldsymbol{\nabla}\mathbf{A}] \tag{2.31}$$

Dans cette forme, les paranthèses ne sont pas nécessaires, car tous les opérateurs $\boldsymbol{\nabla}$ se rapportent au vecteur $\mathbf{A}$. Avec cette écriture, le premier terme du membre de droite n'est pas très joli : le premier $\boldsymbol{\nabla}$ est multiplié scalairement par $\mathbf{A}$, c'est donc la divergence de $\mathbf{A}$. Le second se rapporte à cette divergence, c'en est donc le gradient. Pour ce qui est du second terme, le produit scalaire de $\boldsymbol{\nabla}$ par $\boldsymbol{\nabla}$ donne le Laplacien ∇^2. Ainsi,

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}.\,\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} \tag{2.32}$$

Les deux expressions qui suivent ne nécessitent qu'une ligne de calcul (distribuer les paranthèses), que vous pouvez écrire seul,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}.\,(\psi\mathbf{A}) &= \mathbf{A}\,.\boldsymbol{\nabla}\psi + \psi\boldsymbol{\nabla}.\,\mathbf{A} \qquad (2.33) \\ \boldsymbol{\nabla} \times (\psi\mathbf{A}) &= \boldsymbol{\nabla}\psi \times \mathbf{A} + \psi\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \qquad (2.34) \end{aligned}$$

Les deux dernières expressions nécessitent un peu plus de travail, aussi elles seront traitées en exercice :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}) &= \mathbf{A}\,.\boldsymbol{\nabla}\mathbf{B} + \mathbf{B}\,.\boldsymbol{\nabla}\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \qquad (2.35) \\ \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\nabla}.\,\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\boldsymbol{\nabla}.\,\mathbf{A}) + (\mathbf{B}\,.\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} - (\mathbf{A}\,.\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} \qquad (2.36) \end{aligned}$$

2.3 Théorèmes du calcul vectoriel

Les théorèmes du calcul vectoriel peuvent se comprendre à la lumière d'une formulation générale très simple.

Théorème 1. *Soit ω une n-forme differentielle définie sur une n-surface orientée Ω. On note $d\omega$ la dérivée extérieur de ω et $\partial\Omega$ la frontière de Ω. Alors,*

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega \tag{2.37}$$

L'analogie avec les 1-formes que vous connaissez (*i.e.* une forme differentielle de degré 1) s'écrit en effet

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \tag{2.38}$$

où F est une primitive de f.

Pour démontrer les théorèmes qui suivent, il faudrait entrer dans le détail d'une n-forme ainsi que de sa dérivée extérieure, ce que nous ne ferons pas. Le théorème de

Kelvin-Stokes traite le cas des 2-formes (intégrales de surface) et le théorème de Gauss-Ostrogradsky celui des 3-formes (intégrales de volume). Ils peuvent s'écrire de plusieurs façons, suivant la nature scalaire ou vectorielle de la n-forme associée.

2.4 Théorèmes de Gauss-Ostrogradsky

On note pour la suite ψ une fonction scalaire, $\mathbf{A}$ une fonction vectorielle, V un volume associé à la forme différentielle du volume élementaire $d\mathbf{r}$, S la surface fermée de V associée à la forme différentielle de la surface élementaire $d\boldsymbol{\sigma}$ et de normale extérieure $\mathbf{n}$.

Remarque 1. *Faites bien attention à ce que le vecteur unitaire* $\mathbf{n}$ *n'a pas la même définition que le vecteur* $\hat{\mathbf{n}}$ *que l'on a défini en début de paragraphe.*

La première forme est la plus connue, pour laquelle la 3-forme est la divergence d'une fonction vectorielle.

Théorème 2. *(théorème de la divergence)*

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}.\mathbf{A}\ d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{A}.\mathbf{n}\ d\boldsymbol{\sigma} \tag{2.39}$$

Pour la deuxième forme, la 3-forme est le gradient d'une fonction scalaire,

Théorème 3.

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\psi\ d\mathbf{r} = \int_S \psi\mathbf{n}\ d\boldsymbol{\sigma} \tag{2.40}$$

Pour la troisième forme, la 3-forme est le rotationnel d'une fonction vectorielle,

Théorème 4.

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\ d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{n}\times\mathbf{A}\ d\boldsymbol{\sigma} \tag{2.41}$$

Ces trois expressions permettent ainsi de transformer une intégrale de volume en une intégrale de surface. Cela signifie d'un point de vue physique que ces intégrales ne dépendent que des conditions aux limites du domaine d'intégration. Pour la première forme, un vecteur admet une divergence si les flux entrant et sortant du domaine ne sont pas les mêmes.

2.5 Théorème de Kelvin-Stokes

On l'appelle aussi théorème de la divergence. On note pour la suite ψ une fonction scalaire, $\mathbf{A}$ une fonction vectorielle, S une surface ouverte de normale extérieure $\mathbf{n}$ associée

à la forme différentielle du volume élementaire $d\boldsymbol{\sigma}$, C le contour de la surface ouverte de S associé à la forme différentielle du chemin élementaire $d\mathbf{l}$.
La première forme est la plus connue ; la 2-forme est le rotationnel d'une fonction vectorielle.

Théorème 5.

$$\int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, d\boldsymbol{\sigma} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \tag{2.42}$$

Pour la deuxième forme, la 2-forme est un peu plus que le gradient d'une fonction scalaire.

Théorème 6.

$$\int_S \mathbf{n} \times \boldsymbol{\nabla}\psi\, d\boldsymbol{\sigma} = \oint_C \psi\, d\mathbf{l} \tag{2.43}$$

Là encore, la valeur de ces intégrales de surface ne dépend que de la valeur de l'intégrand aux frontières du domaine. Pour la première forme, on peut en donner une interprétation géométrique en notant que la superposition de plusieurs boucles de courant donne un grande boucle sur le contour du domaine extérieur. On pourrait presque dire “pour que ca tourne dedans, il faut que ça circule autour”.

2.6 Identités de Green

On note pour la suite ϕ et ψ deux fonctions scalaires (les autres notations étant les mêmes que précédemment). Il existe trois identités de Green ; nous ne verrons que les deux premières qui sont les plus souvent rencontrées. On notera ∇^2 l'opérateur scalaire $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}$, que l'on appelle aussi le laplacien, et qui se note parfois Δ.

Identité 1. *(Première identité de Green). Elle s'écrit*

$$\int_V (\phi\nabla^2\psi + \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi)\, d\mathbf{r} = \int_S \phi\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi\, d\boldsymbol{\sigma} \tag{2.44}$$

Identité 2. *(Seconde identité de Green). Elle s'écrit*

$$\int_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\, d\mathbf{r} = \int_S (\phi\, \boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\, \boldsymbol{\nabla}\phi) \cdot \mathbf{n}\, d\boldsymbol{\sigma} \tag{2.45}$$

Soyez bien attentif dans la manière de lire l'ensemble de ces relations à utiliser le bon mot : gradient, divergence ou rotationnel. Le gradient est un opérateur à valeur vectorielle agissant sur une fonction scalaire ; la divergence est un opérateur à valeur scalaire agissant sur une fonction vectorielle ; le rotationel est un opérateur à valeur vectorielle agissant sur une fonction vectorielle.

2.7 Exercices

Exercice 5. *Calculez dans la base sphérique la divergence des trois vecteurs de la base,* $\boldsymbol{\nabla}.\,\hat{\mathbf{r}}$, $\boldsymbol{\nabla}.\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$ *et* $\boldsymbol{\nabla}.\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$. *En déduire l'expression de* $\boldsymbol{\nabla}.\,\mathbf{A}$ *dans une base sphérique.*

Exercice 6. *Démontrez l'eq. (2.35)*

Exercice 7. *Démontrez l'eq. (2.36)*

Exercice 8. *En appliquant le théorème de la divergence à* $\psi\boldsymbol{\nabla}\phi$, *démontrez la première identité de Green pour laquelle le second membre peut aussi s'écrire*

$$\int_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\boldsymbol{\sigma} \tag{2.46}$$

Exercice 9. *En appliquant le théorème de la divergence à* $\phi\boldsymbol{\nabla}\psi$ *et en combinant avec la première identité de Green, démontrez la seconde identité de Green pour laquelle le second membre peut aussi s'écrire*

$$\int_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}\right)\, d\boldsymbol{\sigma} \tag{2.47}$$

Exercice 10. *Explicitez la densité de travail élementaire* δw *pour déplacer une densité de charge élementaire* $\delta\rho$ *dans un potentiel* ϕ. *En déduire par intégration le travail élementaire* δW. *Identifiez alors la forme de l'énergie électrostatique* W *puis l'expression de la densité d'énergie électrostatique* u_E.

Bibliographie

[1] Jackson J. D., Classical electrodynamics, second Edition, *John Wiley & sons*, 1975

[2] Melia F., Electrodynamics, *The University of Chicago Press*, 1992

[3] Straton J. D., Electromagnetic theory, *Mac Graw Hill Book*, 1941