
Introduction à la théorie cinétique des plasmas faiblement ionisés

Année 2020-2021

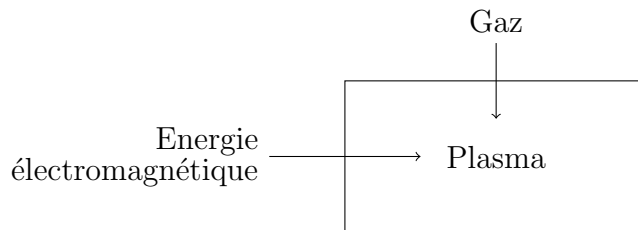


Irving Langmuir, Schenectady Museum.

M2 Physique des Plasmas et de la Fusion
jean-luc.raimbault@lpp.polytechnique.fr

Présentation du cours

Les plasmas dont il est question dans ce cours - plasmas froids ou plasmas de décharges - sont des plasmas faiblement ionisés (la densité des espèces chargées est très faible devant celle du gaz : $n_e, n_i \ll n_g$), généralement hors équilibre ($T_e \gg T_i \approx T_g$), et confinés au sein des réacteurs où il sont produits.



Le gaz choisi (atomique ou moléculaire, plus ou moins complexe dans sa réactivité), le domaine de pressions explorées (typiquement du mTorr à la pression atmosphérique), et le mode de couplage de l'énergie électromagnétique au plasmas (capacitifs, inductifs, hélicons, à résonance cyclotron,..) dépendent des applications visées.

D'une façon générale, l'essentiel de la puissance électrique apportée au plasma est absorbée par les électrons qui dissipent cette énergie par collisions élastiques et inélastiques entre électrons et neutres. Du fait des faibles taux d'ionisation observés dans les plasmas froids, les collisions électrons-électrons sont rares et il en résulte généralement que la fonction de distribution des électrons s'écarte significativement d'une distribution d'équilibre maxwellienne.

Ce caractère hors-équilibre des électrons est la raison principale motivant une description cinétique du chauffage et du transport des électrons au sein des plasmas froids que nous allons présenter dans ce cours.

Notez qu'à la différence des électrons, les ions sont fortement couplés aux espèces neutres du plasma ($m_i \approx m_g$ et $T_i \approx T_g$). Ils n'absorbent qu'une faible part de l'énergie électrique extérieure de sorte qu'une description fluide est le plus souvent suffisante pour les ions.

1er chapitre : Généralités sur les équations cinétiques

La grandeur centrale dans une description cinétique des électrons est la fonction de distribution des électrons, $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, qui correspond à la densité dans l'espace des phases usuel positions-vitesses. Il est bien connu que la fonction de distribution est solution de l'équation cinétique de Boltzmann (équation formellement exacte) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c$$

Après avoir rappelé quelques généralités sur les équations cinétiques, nous présenterons dans ce chapitre une méthode approchée de solution de l'équation de Boltzmann, connue sous le terme d'“approximation à 2 termes”.

Le point central de cette approximation consiste à remarquer que la fonction de distribution des électrons est quasi-isotrope dans l'espace des vitesses. En effet, les collisions dominantes pour les électrons dans un plasma faiblement ionisé sont les collisions électrons-neutres et, du fait du rapport des masses $m_e/m_g \ll 1$, on peut se convaincre facilement que les vecteurs vitesses des électrons peuvent varier de façon significative au cours de ces collisions, mais que les variations de l'énergie cinétique des électrons (et donc du *module* de la vitesse des électrons), sont au contraire toujours très faibles¹. *L'approximation à 2 termes* consiste à faire l'hypothèse suivante :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \approx f_0(\mathbf{r}, v, t) + \frac{\mathbf{v}}{v} \cdot \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, v, t)$$

où $v = \|\mathbf{v}\|$ et où $f_0(\mathbf{r}, v, t)$ représente la partie isotrope et dominante de la fonction de distribution, et $\mathbf{f}_1(\mathbf{r}, v, t)$ la contribution anisotrope, a priori de moindre importance. Les fonctions f_0 et \mathbf{f}_1 ne dépendent plus que du module, v , du vecteur vitesse, toute la dépendance angulaire (dans l'espace des vitesses), étant contenu dans le vecteur unitaire \mathbf{v}/v . Cette approximation correspond aux 2 premiers termes d'un développement systématique en harmoniques sphériques.

En substituant cette approximation de f dans l'équation cinétique de Boltzmann, et en procédant à une intégration sur les angles dans l'espace des vitesses, nous montrerons que les 2 composantes f_0 et \mathbf{f}_1 de la fonction de distribution des électrons, sont solutions de 2 équations aux dérivées partielles couplées² :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left(\frac{v}{3} \mathbf{f}_1 \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^2 \frac{e\mathbf{E}}{3m} \cdot \mathbf{f}_1 \right) &= \left(\frac{\delta f_0}{\delta t} \right)_c, \\ \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} (v f_0) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{e\mathbf{E}}{m} f_0 \right) &= \left(\frac{\delta \mathbf{f}_1}{\delta t} \right)_c \end{aligned}$$

1. A la limite, au cours d'un choc élastique frontal entre un électron et un neutre supposé infiniment lourd, la variation du vecteur vitesse de l'électron au cours du choc est telle que $\Delta \mathbf{v}_e = -2\mathbf{v}_e$ mais $\Delta E_e = \Delta v_e = 0$.

2. Les 2 équations couplées données dans cette introduction correspondent au cas d'un plasma non magnétisé ($\mathbf{B} \equiv \mathbf{0}$).

2ème chapitre : Collisions dans les plasmas faiblement ionisés

Les seconds membres de ces équations sont les termes dits de collisions, pour lesquels il nous faut une expression explicite mettant en jeu les fonctions de distribution.

Les interactions électrons-neutres étant essentiellement des interactions de contact ou d'assez courtes portées, il est possible d'utiliser l'expression du terme de collision établie par Boltzmann dans le cas des collisions élastiques dans un gaz non chargé :

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c = \int_{v_n} \int_{\Omega} (f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_e, t) f_n(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_n, t) - f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}_e, t) f_n(\mathbf{r}, \mathbf{v}_n, t)) v_{en} \sigma_{en}(v_{en}, \Omega) d\Omega d^3\mathbf{v}_n$$

où \mathbf{v}'_e et \mathbf{v}'_n (respectivement \mathbf{v}_e et \mathbf{v}_n) sont les vitesses des électrons après (respectivement avant) les collisions. v_{en} désigne le module de la vitesse relative $\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_n$ et σ_{en} la section efficace différentielle de collision.

Cette expression du terme de collisions sera établie dans ce 2ème chapitre où nous obtiendrons des expressions simplifiées de cette intégrale dans le cadre des modèles dits de Lorentz où la masse des neutres est considérée comme infiniment grande devant celle des électrons (*modèles de Lorentz parfait*) ou simplement grande devant celle des électrons (*modèles de Lorentz imparfait*).

Des expressions approchées du terme de collisions dans le cas des collisions inélastiques seront également obtenues. Enfin, pour illustrer ce formalisme, nous calculerons les termes de collisions intervenant dans les équations fluides (bilans de masse, quantité de mouvement et énergie), ce qui nous permettra d'établir le domaine de validité des expressions empiriques couramment utilisées dans les approches fluides.

3ème chapitre : Coefficients de transport électronique

Dans ce chapitre, on utilisera l'approche cinétique développée dans le cadre de l'approximation à 2 termes pour obtenir des expressions générales des coefficients de transport des électrons dans des plasmas faiblement ionisés, magnétisés ou pas, dans des situations stationnaires ou dépendant du temps.

Ainsi, par exemple, nous montrerons que les densités de flux d'électrons, $\mathbf{\Gamma}$ et d'énergie électronique \mathbf{H} , s'écrivent, de façon très générale pour un plasma non magnétisé, sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma} &= n\mu\nabla\varphi - n\frac{\partial D}{\partial T_e}\nabla T_e - D\nabla n, \\ \mathbf{H} &= n\beta\nabla\varphi - n\frac{\partial G}{\partial T_e}\nabla T_e - G\nabla n \end{aligned}$$

où μ, D, β, G sont des *coefficients de transport* dont les expressions dépendent de la fréquence de transfert de quantité de mouvement $\nu_m(v)$ et de la partie isotrope

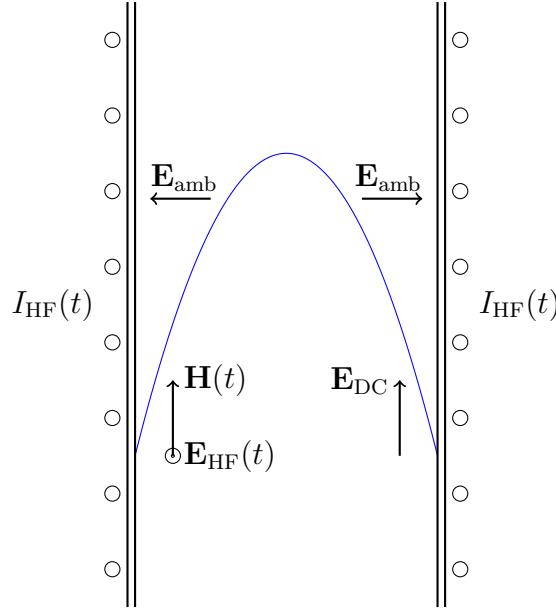
$f_0(\mathbf{r}, v)$ de la fonction de distribution :

$$\begin{aligned} \mu &\equiv \frac{4\pi e}{3m} \int_0^\infty \frac{d}{dv} \left(\frac{v^3}{\nu_m(v)} \right) \frac{f_0}{n} dv & \text{et} & \quad D \equiv \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{v^4}{\nu_m(v)} \frac{f_0}{n} dv, \\ \beta &\equiv \frac{2\pi e}{3} \int_0^\infty \frac{d}{dv} \left(\frac{v^5}{\nu_m(v)} \right) \frac{f_0}{n} dv, & \text{et} & \quad G \equiv \frac{2\pi m}{3} \int_0^\infty \frac{v^6}{\nu_m(v)} \frac{f_0}{n} dv \end{aligned}$$

4ème chapitre : Equations de l'EEDF

Dans ce chapitre, on combine les équations d'évolution des parties isotropes et anisotropes de la fonction de distribution des électrons établies au 1er chapitre, de façon à obtenir une seule équation qui permet de déterminer la fonction de distribution en énergie f_0 des électrons. Cette équation, connue sous le nom d'équation de l'EEDF (pour "electron energy distribution function"), peut prendre différentes formes selon l'espace des paramètres utilisés pour sa représentation.

Nous considèrerons en particulier l'équation de l'EEDF dans l'espace position-énergie totale (\mathbf{r}, ϵ) obtenue dans le cas assez général de la décharge inductive représentée schématiquement sur la figure suivante :



Dans cette situation, nous montrerons que la fonction de distribution exprimée dans l'espace position-énergie, $h_0(\mathbf{r}, \epsilon)$, prend la forme d'une équation de diffusion à 2 dimensions :

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot (-D_r v \nabla_{\mathbf{r}} h_0) + \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[-D_\epsilon v \frac{\partial h_0}{\partial \epsilon} \right] = v C_0(h_0)$$

où $D_r \propto \langle \delta \mathbf{r} \delta \mathbf{r} \rangle / \delta t = v^2 / (3\nu_m(v))$ et $D_\epsilon \propto \langle \delta \epsilon \delta \epsilon \rangle / \delta t = D_r (e\mathbf{E}_{\text{heat}})^2$ représentent respectivement un coefficient de diffusion dans l'espace des positions et des énergies. \mathbf{E}_{heat} désigne le champ de chauffage qui dépend des champs électriques extérieurs DC et RF, et C_0 est un terme de collisions dont la forme précise dépend des collisions retenues pour la modélisation,

A partir de cette équation, nous discuterons 2 approximations, valables respectivement à hautes et basses pressions, les *approximations dites locales et non-locales de l'EEDF*. Des solutions explicites de l'EEDF sous ces 2 approximations seront données dans le cas de collisions élastiques électrons-neutres dominantes, qui conduiront à la fonction de distribution de Druyvesteyn en champ local et aux relations de Boltzmann généralisées dans le cas de l'approximation non locale.

Indications bibliographiques

Cette bibliographie est volontairement limitée et n'est en rien exhaustive. Elle correspond aux ouvrages et articles que j'ai plus spécifiquement consultés pour écrire ce cours.

1. Ouvrages généraux

Presque tous les livres généraux de physique des plasmas contiennent un ou plusieurs chapitres relevant de la théorie cinétique et des phénomènes de transport. Pour autant, bien peu donnent une description spécifique de la théorie cinétique des plasmas faiblement ionisés.

Parmi ces ouvrages, celui de Bittencourt est d'une remarquable clarté pédagogique (voir en particulier les chapitres 5, 20, 21 et 22). Il contient également de nombreux exercices intéressants.

Celui de Golant et al. est plus difficile d'abord mais très complet et constitue également une bonne référence (en particulier les chapitres 2, 3, 5 et 7).

— *Fundamentals of plasmas physics*,
J.A. Bittencourt,
Springer, 2004.

— *Fundamentals of plasmas physics*,
V.E. Golant, A.P. Zhilinsky, I.E. Sakharov,
John Wiley and sons, 1980.

Le livre de Noëlle Pottier issu d'un cours dispensé au M2 de matière condensée de la région parisienne, n'est pas un livre de physique des plasmas, mais décrit de façon très claire les différents concepts de base de la physique des systèmes hors-équilibre.

— *Physique statistique hors d'équilibre*,
N. Pottier,
CNRS Editions, 2007.

2. Ouvrages spécialisés en théorie cinétique

Il existe de très nombreux ouvrages de théorie cinétique des plasmas qui peuvent apparaître très différents selon le point de vue choisi par les auteurs. L'ouvrage un peu ancien de Shkarofsky et al. détaille soigneusement dans les premiers chapitres la théorie des collisions dans le cadre cinétique (il traite également l'interaction coulombienne non prise en compte dans ce cours).

Celui, beaucoup plus récent, de Robson, offre une vision synthétique complémentaire, et donne également une idée du traitement numérique mis en oeuvre lorsqu'on va au-delà de l'approximation à 2 termes.

- *The particle kinetics of plasmas*,
I.P. Shkarofsky, T.W. Johnston, M.P. Bachynski,
Addison-Wesley, 1966.
- *Introductory transport theory for charged particles in gases*,
R.E. Robson,
World Scientific, 2006.

3. Ouvrages orientés plasmas froids

La plupart des ouvrages de physique des plasmas orientés vers les plasmas froids s'appuient sur des approches théoriques phénoménologiques à hautes pressions ou sur des approches fluides à plus basses pressions.

A titre d'illustration, c'est seulement dans la 2ème édition (en 2005) de l'ouvrage de référence de Lieberman et Lichtenberg, qu'est apparu un chapitre (le dernier de l'ouvrage) traitant de la théorie cinétique des décharges.

On trouvera néanmoins une première approche cinétique assez physique dans le livre plus ancien de Cherrington, où une place importante est faite aux différents types d'excitations présentes dans les plasmas.

- *Gaseous electronics and gas lasers*,
B.E. Cherrington,
Pergamon Press, 1980.
- *Principles of plasma discharges and material processing*,
M.A. Lieberman, A.J. Lichtenberg,
Wiley, 2005.

4. Publications dans des journaux spécialisés

L'idée du développement en harmoniques sphériques de la fonction de distribution des électrons a été introduit par Lorentz au début du siècle dans sa théorie des électrons.

Allis et ses collègues du M.I.T. furent semble-t-il les premiers à reprendre cette idée dans les années 30 pour discuter la distribution en vitesses des électrons en présence de collisions élastiques.

- *Velocity distributions for elastically colliding electrons*,
P.M. Morse, W.P. Allis, E.S. Lamar,
Phys. Rev., **48**, 412, 1935.
(voir également l'article de revue "Plasma theory" de W.P. Allis and S.J. Buschbaum, présenté dans *Electrons, ions and waves, Selected works of W.P. Allis*, The MIT Press, 1967.)

Cette étude a été développée par Holstein après la guerre en incluant les collisions inélastiques. Puis, dans le milieu des années 50, Holstein à nouveau et Bernstein, allaient proposer une méthode approximative pour prendre en compte les effets de charges d'espace importants dans les décharges de basses pressions.

- *Energy distribution of electrons in high frequencies gas discharges in stationary discharges*,
T. Holstein,
Phys. Rev., **70**, 367, 1946.
- *Electron energy distributions in stationary discharges*,
I.B. Bernstein, T. Holstein,
Phys. Rev., **94**, 1475, 1954.

L'article de Holstein et Bernstein sera à l'origine du développement actuel de la théorie cinétique des décharges dans l'approximation dite "non locale" développée par le physicien soviétique Tsendin dans le milieu des années 70. Un bon compte rendu de cette approche est proposé dans l'article de revue plus récent de Kortshagen, Busch et Tsendin.

- *On simplifying approaches to the solution of the Boltzmann equation in spatially inhomogeneous plasmas*,
U. Kortshagen, C. Busch and L.D. Tsendin,
Plasma Sources Sci. Technol., **5**, 1, 1996.

On pourra également consulter avec profit les compte-rendus d'un congrès de 1997 :

- *Electron kinetics and applications of glow discharges*,
Ed. U. Kortshagen and L.D. Tsendin,
NATO Science Series B, **Vol 367**, Springer, 1998.

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | <i>Généralités sur les équations cinétiques</i> | 15 |
| 1.1 | <i>Equation de Liouville</i> | 16 |
| 1.2 | <i>Equation cinétique de Boltzmann</i> | 17 |
| 1.3 | <i>Approximation à 2 termes</i> | 21 |
| 2 | <i>Collisions dans les plasmas faiblement ionisés</i> | 25 |
| 2.1 | <i>Transfert d'impulsion et d'énergie dans les collisions</i> | 26 |
| 2.1.1 | <i>Transfert d'impulsion et d'énergie dans les collisions binaires élastiques</i> | 27 |
| 2.1.2 | <i>Cas particulier des collisions élastiques électrons-neutres</i> | 28 |
| 2.2 | <i>Paramètres de collision</i> | 29 |
| 2.3 | <i>L'intégrale de collision de Boltzmann</i> | 31 |
| 2.3.1 | <i>Le calcul de Boltzmann</i> | 31 |
| 2.3.2 | <i>Modèles de Lorentz</i> | 34 |
| 2.4 | <i>Termes de collisions dans les équations cinétiques</i> | 36 |
| 2.4.1 | <i>Contributions des collisions élastiques</i> | 36 |
| 2.4.2 | <i>Contributions des collisions inélastiques</i> | 38 |
| 2.5 | <i>Termes de collisions dans les équations macroscopiques</i> | 40 |
| 2.5.1 | <i>Equations macroscopiques de transport</i> | 40 |
| 2.5.2 | <i>Contributions des collisions élastiques aux équations de bilan</i> | 42 |
| 3 | <i>Coefficients de transport électroniques</i> | 47 |
| 3.1 | <i>Introduction</i> | 47 |
| 3.2 | <i>Flux de matière et d'énergie</i> | 48 |
| 3.2.1 | <i>Cas d'un plasma non magnétisé</i> | 48 |
| 3.2.2 | <i>Cas d'un plasma magnétisé</i> | 51 |
| 3.3 | <i>Densité de courant et conductivité</i> | 53 |
| 4 | <i>Equations de l'EEDF</i> | 55 |
| 4.1 | <i>Introduction</i> | 55 |
| 4.2 | <i>Diverses expressions de l'équation de l'EEDF</i> | 57 |
| 4.2.1 | <i>Equation de l'EEDF dans l'espace (\mathbf{r}, v)</i> | 60 |
| 4.2.2 | <i>Equation de l'EEDF dans l'espace (\mathbf{r}, u)</i> | 61 |

| | | |
|-------|---|----|
| 4.2.3 | Equation de l'EEDF dans l'espace (\mathbf{r}, ϵ) | 62 |
| 4.3 | Approximation du champ local | 64 |
| 4.3.1 | Exemple d'application de l'approximation du champ local | 65 |
| 4.4 | Approximation non locale | 67 |
| 4.4.1 | Exemple d'application de l'approximation non locale . . . | 69 |

Chapitre 1

Généralités sur les équations cinétiques

La grandeur centrale en théorie cinétique est la fonction de distribution à une particule $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ qui correspond à la densité dans l'espace des positions et vitesses, c'est-à-dire à la densité dans l'espace des phases. Cette fonction de distribution est solution de la célèbre équation cinétique de Boltzmann :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c$$

Bien que cette équation soit formellement exacte, il va de soi que tout calcul effectif nécessite la définition précise de \mathbf{a} - clairement homogène à une accélération, mais laquelle? - ainsi que celle du second membre, généralement appelé "terme de collisions".

L'objectif de ce chapitre est de rappeler brièvement l'origine de l'équation de Boltzmann ainsi que l'origine des termes qui y interviennent. Cela nous amènera dans un premier temps à nous placer dans un contexte plus général où nous introduirons la fonction de distribution à N particules ainsi que l'équation dont elle est solution, l'équation de Liouville. De là, on dérivera de façon exacte et contrôlée l'équation cinétique de Boltzmann. On insistera en particulier sur la forme mathématique particulière de ces équations qui apparaissent comme des équations de bilans, homogènes ou inhomogènes, linéaires ou non linéaires.

Enfin, nous terminerons ce chapitre par une méthode de solution approchée de l'équation de Boltzmann qui nous conduira à 2 équations couplées de la fonction de distribution électronique dans l'approximation dite à 2 termes. Ces 2 équations seront à la base de la théorie cinétique des décharges développée dans les chapitres ultérieurs.

1.1 Equation de Liouville

Considérons un système macroscopique comprenant N particules ponctuelles identiques dont la dynamique est régie par la mécanique classique. Un état microscopique du système est complètement défini à l'instant t par la donnée des positions des particules $\mathbf{r}^N \equiv (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ et de leurs impulsions $\mathbf{p}^N \equiv (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ qui définissent un point dans l'espace des phases à $6N$ dimensions. Le Hamiltonien correspondant s'écrit d'une façon assez générale :

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^N U(\mathbf{r}_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N u(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$$

où U et u représentent respectivement un potentiel extérieur et un potentiel d'interaction de paires.

L'évolution temporelle du système, pour $i = 1, \dots, N$, est donnée par les *équations de Hamilton* :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_i &\equiv \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} = \mathbf{v}_i, \\ \dot{\mathbf{p}}_i &\equiv \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} = \mathbf{F}_i \end{aligned}$$

où $\mathbf{v}_i = \mathbf{p}_i/m$ et $\mathbf{F}_i = -\nabla_{\mathbf{r}_i} U(\mathbf{r}_i) - \sum_{j \neq i} \nabla_{\mathbf{r}_i} u(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ représente la force totale agissant sur la particule i . Dans le cadre de l'étude des plasmas, les forces électromagnétiques mettant en jeu des champs électriques et magnétiques (microscopiques à ce niveau de description), les équations de Hamilton doivent être complétées par les équations de Maxwell.

Dans une approche statistique, on renonce à l'intégration de ces $6N$ équations différentielles couplées, et on introduit la *fonction de distribution dans l'espace des phases à N particules*, $f_N(\mathbf{r}^N, \mathbf{p}^N, t)$, telle que :

$$d\mathcal{N} = f_N(\mathbf{r}^N, \mathbf{p}^N, t) d\Gamma$$

représente le nombre de points représentatifs des états du système compris dans le volume de l'espace des phases $d\Gamma \equiv d^3\mathbf{r}^N d^3\mathbf{p}^N \equiv \prod_{i=1}^N d^3\mathbf{r}_i d^3\mathbf{p}_i$, situé au voisinage de $(\mathbf{r}^N, \mathbf{p}^N)$, à l'instant t .

$f_N \equiv d\mathcal{N}/d\Gamma$ est donc également la *densité des états dans l'espace des phases à $6N$ dimensions*¹.

1. Par exemple, à l'équilibre thermodynamique, dans les conditions canoniques (système fermé à température fixée), f_N s'exprime de la façon suivante :

$$f_N^{\text{eq}} \propto \frac{e^{-\beta E(\mathbf{r}^N, \mathbf{p}^N)}}{Z_{\text{can}}}$$

où Z_{can} est la fonction de partition canonique.

Entre t et $t + dt$, les positions et impulsions des particules évoluent et un certain nombre de points représentatifs vont entrer et sortir par la surface limitant le volume élémentaire $d\Gamma$. La conservation du nombre des états dans l'espace des phases s'écrit donc sous la forme d'une équation de conservation dans un espace à $6N$ dimensions :

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{r}_i} \cdot (f_N \dot{\mathbf{r}}_i) + \sum_{i=1}^N \nabla_{\mathbf{p}_i} \cdot (f_N \dot{\mathbf{p}}_i) = 0$$

qui est une des formes de *l'équation de Liouville*.

En utilisant les équations de Hamilton, montrer que l'équation de Liouville peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}_i} f_N + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \nabla_{\mathbf{p}_i} f_N = 0$$

Bien que très générale, l'équation de Liouville a une structure mathématique simple. C'est une équation du 1er ordre, linéaire et homogène, mais avec un nombre très élevé de variables. Nous allons montrer dans la section suivante qu'une réduction de nombre de variables modifiera profondément la structure mathématique de l'équation en la rendant en général non-linéaire et non homogène.

1.2 Equation cinétique de Boltzmann

La description du système à partir de la fonction de distribution f_N est encore bien trop détaillée pour la plupart des systèmes. Dans le cas où les particules du système sont soumises à des forces extérieures à un corps (comme la gravité ou un champ électromagnétique extérieur) et n'interagissent entre elles que par des interactions de paires, une description au niveau de f_1 et f_2 est suffisante.

Une intégration partielle des degrés de libertés de positions et vitesses des particules permet de relier entre elles les densités à un nombre différent de particules. Ainsi, pour f_1 et f_2 ² :

$$f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, t) = \frac{1}{(N-1)!h^{3N}} \int f_N(\mathbf{r}^N, \mathbf{v}^N, t) \prod_{i=2}^N d^3\mathbf{r}_i d^3\mathbf{v}_i$$

2. Pour se conformer à l'usage habituel en physique des plasmas, nous utiliserons désormais la vitesse \mathbf{v} plutôt que l'impulsion \mathbf{p} .

et de même :

$$f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2, t) = \frac{1}{(N-2)!h^{3N}} \int f_N(\mathbf{r}^N, \mathbf{v}^N, t) \prod_{i=3}^N d^3\mathbf{r}_i d^3\mathbf{v}_i$$

où les préfacteurs impliquant N ont pour origine l'indiscernabilité des particules³.

Puisqu'on se limite aux interactions à 2 corps, on peut séparer la contribution des forces extérieures et celles dues aux interactions entre les particules. On notera :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_i) = \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{r}_i) + \sum_{j \neq i}^N \mathbf{F}_{\text{int}}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$$

En présence de forces extérieures mais en absence de forces d'interaction, la fonction de distribution à N corps $f_N(\mathbf{r}^N, \mathbf{v}^N, t)$ vérifie l'équation de Liouville :

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}_i} f_N + \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{\text{ext}}(\mathbf{r}_i) \cdot \nabla_{\mathbf{v}_i} f_N = 0$$

où $\mathbf{a}_{\text{ext}}(\mathbf{r}_i) = \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{r}_i)/m$ est l'accélération s'exerçant sur la i ème particule.

En multipliant cette équation membre à membre par $\prod_{i=2}^N d^3\mathbf{r}_i d^3\mathbf{v}_i$ et en intégrant, montrez que la fonction de distribution à 1 corps $f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, t)$ vérifie l'équation suivante en absence d'interactions entre les particules :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1} f_1 + \mathbf{a}_{\text{ext}}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_{\mathbf{v}_1} f_1 = 0$$

On rappelle que les fonctions de distribution s'annulent pour $\mathbf{r}_i = \pm\infty$ ou $\mathbf{v}_i = \pm\infty$.

En prenant en compte les interactions entre particules et en suivant la même démarche, montrez que les fonctions de distribution à 1 et 2 corps sont reliées par l'équation :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1} f_1 + \mathbf{a}_{\text{ext}}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_{\mathbf{v}_1} f_1 = - \int \mathbf{a}_{\text{int}}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \cdot \nabla_{\mathbf{v}_1} f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) d^3\mathbf{r}_2 d^3\mathbf{v}_2$$

où $\mathbf{a}_{\text{int}}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = \mathbf{F}_{\text{int}}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)/m$.

L'équation obtenue ci-dessus

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1} f_1 + \mathbf{a}_{\text{ext}}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_{\mathbf{v}_1} f_1 = - \int \mathbf{a}_{\text{int}}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \cdot \nabla_{\mathbf{v}_1} f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) d^3\mathbf{r}_2 d^3\mathbf{v}_2$$

constitue la première équation (exacte!) de la hiérarchie BBGKY⁴.

3. Les préfacteurs sont compatibles avec la condition de normalisation à l'unité de f_N qui s'écrit :

$$\int f_N(\mathbf{r}^N, \mathbf{v}^N, t) \frac{\prod_{i=1}^N d^3\mathbf{r}_i d^3\mathbf{v}_i}{N! h^{3N}} = 1.$$

4. Il s'agit de la hiérarchie d'équations dues à Born-Bogoliubov-Green-Kirkwood-Yvon.

Introduisons la fonction de corrélation à 2 particules définie par la relation :

$$g_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) \equiv f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) - f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, t)f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2, t)$$

L'intégration du terme sans corrélation s'effectue sans peine. On trouve :

$$\int \mathbf{a}_{\text{int}}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \nabla_{\mathbf{v}_1} [f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, t)f_1(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2, t)] d^3\mathbf{r}_2 d^3\mathbf{v}_2 = \nabla_{\mathbf{v}_1} f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, t) \int n(\mathbf{r}_2, t) \mathbf{a}_{\text{int}}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) d^3\mathbf{r}_2$$

où on a utilisé la normalisation de f_1 qui s'écrit :

$$\int f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v} = n(\mathbf{r}, t)$$

où $n(\mathbf{r}, t)$ désigne la densité de particules. Comme il se doit, cette relation de normalisation permet d'interpréter f_1 comme caractérisant le nombre moyen de particules par unité de volume de l'espace des phases à 1 particule, c'est-à-dire le nombre moyen de particules dans l'hyper-volume $d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v}$.

On notera que l'intégrale du second membre s'écrit comme un produit de convolution

$$\int n(\mathbf{r}_2, t) \mathbf{a}_{\text{int}}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) d^3\mathbf{r}_2 \equiv (n \star \mathbf{a}_{\text{int}})(\mathbf{r}_1)$$

qui représente l'accélération moyenne due aux forces exercées par toutes les autres particules sur la particule située en \mathbf{r}_1 .

Posons alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{r}_1) &\equiv \mathbf{a}_{\text{ext}}(\mathbf{r}_1) + (n \star \mathbf{a}_{\text{int}})(\mathbf{r}_1), \\ \left(\frac{\delta f_1}{\delta t}\right)_c(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, t) &\equiv - \int \mathbf{a}_{\text{int}}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \cdot \nabla_{\mathbf{v}_1} g_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) d^3\mathbf{r}_2 d^3\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

Le 1er terme correspond à l'accélération totale et le second terme à un terme dit de collisions (interactions serait plus adapté). Dans le cas des forces électromagnétiques, l'accélération prend le plus souvent la forme :

$$\mathbf{a} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})/m$$

où \mathbf{E} et \mathbf{B} représentent les champs (moyens) auto-cohérents qui interviennent dans les équations de Maxwell couplées à l'équation de Boltzmann.

En notant désormais les grandeurs sans l'indice 1, la fonction de distribution à un corps (qu'on n'appellera plus désormais que fonction de distribution), vérifie l'équation exacte :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c$$

qui constitue l'équation cinétique de Boltzmann.

Notons que la fonction de distribution $f(t, \mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t))$ varie entre t et $t + dt$ de telle façon que :

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \nabla_{\mathbf{r}} f \cdot d^3 \mathbf{r} + \nabla_{\mathbf{v}} f \cdot d^3 \mathbf{v} \implies \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} f \cdot \frac{d^3 \mathbf{r}}{dt} + \nabla_{\mathbf{v}} f \cdot \frac{d^3 \mathbf{v}}{dt}$$

L'équation cinétique de Boltzmann est donc identique à l'équation :

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c$$

En absence d'interaction entre les particules, la dérivée totale df/dt s'annule, c'est-à-dire que le nombre de particules par unité de volume ne change pas lorsqu'on suit les particules dans leur mouvement dans l'espace des phases. L'équation de Boltzmann montre que les interactions entre particules constituent la seule origine à la variation de la densité dans ce point de vue lagrangien.

En remarquant que les forces électromagnétiques sont de divergence nulle dans l'espace des vitesses (a_x par exemple dépend de v_y et v_z , pas de v_x), et en notant que \mathbf{r} et \mathbf{v} sont des variables indépendantes, l'équation de Boltzmann peut également s'écrire sous la forme :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (f \mathbf{v}) + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (f \mathbf{a}) = \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c}$$

L'interprétation sous cette forme est également claire : la variation du nombre moyen de particules dans le volume élémentaire (fixe) $d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{v}$ entre les instants t et $t + dt$ a maintenant 2 origines :

- les particules entrant ou sortant par les surfaces limitant le volume,
- les particules créées ou détruites dans le volume.

Plus précisément, les inhomogénéités spatiales sont à l'origine du terme $-\nabla_{\mathbf{r}} \cdot (f \mathbf{v})$, les inhomogénéités de vitesses sont à l'origine du terme $-\nabla_{\mathbf{v}} \cdot (f \mathbf{a})$, tandis que les interactions entre les particules font entrer ou sortir des particules de l'élément de volume (terme $\left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c$).

A la différence de l'équation de Liouville, l'équation cinétique de Boltzmann n'est donc pas homogène : les collisions sont à l'origine d'un terme source dans l'espace des phases à 6 dimensions. Nous montrerons dans le chapitre suivant que ce terme source peut s'exprimer à partir d'une intégrale comprenant un produit des 2 fonctions de distributions des particules impliquées dans la collision, et donnera donc à l'équation de Boltzmann un caractère intégral-différentiel et non-linéaire.

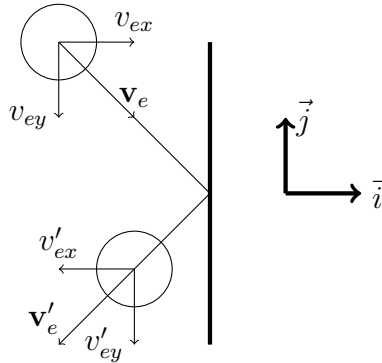
Puisque l'accélération prend en compte les champs moyens, l'équation de Boltzmann s'identifie avec l'équation de Vlasov si l'on néglige le terme de collisions. Diverses approximations de ce terme conduisent aux autres équations

cinétiques, comme celles de Boltzmann, Landau ou Fokker-Planck. Dans le cadre de ce cours limité aux plasmas faiblement ionisés, nous nous concentrerons dans la suite sur l'approximation de Boltzmann du terme de collision.

Notons enfin pour terminer, que certains auteurs réservent l'appellation d'équation cinétique aux équations qui décrivent une dynamique irréversible. De ce point de vue, les équations de Liouville, BGGKY ou Vlasov, invariantes par renversement du temps⁵, ne devraient pas être considérées comme des équations cinétiques. C'est l'approximation de Boltzmann du terme de collision que nous présenterons dans le chapitre suivant qui donnera à cette équation approchée son "vrai" caractère cinétique.

1.3 Approximation à 2 termes

Dans le cas des plasmas faiblement ionisés, les collisions dominantes pour les électrons sont celles avec les espèces neutres. Considérons une collision élastique entre un électron et un neutre. Du fait du faible rapport des masses m/M entre les 2 particules, on peut en première approximation considérer les neutres comme infiniment lourds et donc immobiles, avant et après la collision. Dans ces conditions, la cinématique d'une telle collision est identique à celle d'une particule rebondissant élastiquement sur un mur :



Par conservation de l'énergie cinétique de l'électron,

$$\|\mathbf{v}'_e\| = \|\mathbf{v}_e\|$$

Puisque $v'_{ex} = -v_{ex}$ et $v'_{ey} = v_{ey}$, la variation de vitesse de l'électron au cours du choc est telle que

$$\Delta \mathbf{v}_e \equiv \mathbf{v}'_e - \mathbf{v}_e = -2v_{ex} \mathbf{i},$$

c'est-à-dire une variation allant de $\Delta \mathbf{v}_e = \mathbf{0}$ (choc tangent au mur) à $\Delta \mathbf{v}_e = -2\mathbf{v}_e$ (choc orthogonal au mur).

5. Autrement dit, $f(\mathbf{r}, -\mathbf{v}, -t)$ vérifie la même équation d'évolution que $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$

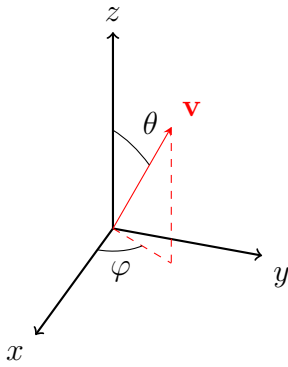
Ce calcul sera repris plus en détail dans le chapitre suivant en prenant en compte l'éventuel recul des neutres et confirmera ces premières remarques : les changements de direction des électrons peuvent être importants au cours de ces collisions tandis que les variations du module de la vitesse des électrons sont au contraire toujours très faibles.

Dans ces conditions, et en présence de champs électromagnétiques d'intensités modérées, la fonction de distribution des électrons peut être considérée comme quasiment isotrope dans l'espace des vitesses (i.e. ne dépendant que de $\|\mathbf{v}_e\|$), ce qui suggère le développement en harmoniques sphériques que nous présentons dans cette section.

Les harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta, \varphi)$ formant une base orthogonale sur la sphère unité, la fonction de distribution $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ peut toujours être représentée dans l'espace des vitesses par une série de la forme :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} f_l^m(\mathbf{r}, v, t) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

où les f_l^m sont des fonctions du module $v \equiv (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$ de la vitesse, de sorte que la dépendance angulaire de la fonction de distribution est entièrement prise en compte dans les harmoniques sphériques⁶. Dans la pratique, le nombre maximal de valeur de l qu'il convient de retenir dépend du degré de précision recherché. Dans le cas des ions ou des électrons dans les gaz moléculaires, on est souvent amené à retenir un nombre élevé de termes.



Pour les électrons dans les gaz monoatomiques, on retient en général *l'approximation à 2 termes* :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \approx f_0^0(\mathbf{r}, v, t) + \sum_{m=-1}^{+1} f_1^m(\mathbf{r}, v, t) Y_1^m(\theta, \varphi)$$

Dans cette expression, $f_0^0(\mathbf{r}, v, t)$ représente la partie isotrope et dominante de la fonction de distribution, et $f_1^m(\mathbf{r}, v, t)$ les contributions anisotropes, a priori de moindre importance.

A un facteur de normalisation près, les $Y_1^m(\theta, \varphi)$ s'identifient avec les coordonnées sphériques du vecteur unitaire $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/v = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$,

6. Rappelons que les harmoniques sphériques s'expriment en fonction des polynômes associés de Legendre P_l^m sous la forme

$$Y_l^m(\theta, \varphi) \propto P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

ce qui fait qu'on écrit plus fréquemment l'approximation à 2 termes sous la forme⁷ :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \approx f_0(\mathbf{r}, v, t) + \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, v, t)$$

où on a posé $\mathbf{f}_1 = (f_1^1, f_1^{-1}, f_1^0)$.

La technique consiste ensuite à intégrer les degrés de libertés angulaires. Pour ce faire, on remplace la fonction de distribution par son approximation à 2 termes dans l'équation de Boltzmann, puis on intègre sur les angles après avoir multiplié l'équation de Boltzmann par 1 ou $\hat{\mathbf{v}}$ de façon à obtenir 2 équations aux dérivées partielles couplées pour f_0 et \mathbf{f}_1 .

Il faut donc calculer les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (f \mathbf{v}) + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (f \mathbf{a}) \right) d\Omega &= \int_{\Omega} \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c d\Omega, \\ \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (f \mathbf{v}) + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (f \mathbf{a}) \right) \hat{\mathbf{v}} d\Omega &= \int_{\Omega} \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c \hat{\mathbf{v}} d\Omega \end{aligned}$$

où $f = f_0 + \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{f}_1$.

Vérifier les propriétés suivantes :

$$\int d\Omega = 4\pi, \quad \int \hat{\mathbf{v}} d\Omega = \mathbf{0}, \quad \int \hat{\mathbf{v}} \hat{\mathbf{v}} d\Omega = \frac{4\pi}{3} \mathbf{I},$$

où $d\Omega \equiv \sin \theta d\theta d\varphi$ et où \mathbf{I} est le tenseur unité.

On admettra que

$$\int \hat{\mathbf{v}} \hat{\mathbf{v}} \hat{\mathbf{v}} d\Omega = \mathbf{0}$$

En déduire les 2 égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (f \mathbf{v}) \right) d\Omega &= 4\pi \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{4\pi}{3} v \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{f}_1, \\ \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (f \mathbf{v}) \right) \hat{\mathbf{v}} d\Omega &= \frac{4\pi}{3} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} + \frac{4\pi}{3} v \nabla_{\mathbf{r}} f_0 \end{aligned}$$

Etablir les égalités suivantes :

$$\nabla_{\mathbf{v}} f_0(v) = \hat{\mathbf{v}} \frac{\partial f_0}{\partial v} \quad \int \nabla_{\mathbf{v}} (\hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{f}_1) d\Omega = \frac{4\pi}{3v^2} \frac{\partial (v^2 \mathbf{f}_1)}{\partial v}$$

7. Dans le cas où la seule origine d'anisotropie est celle due à un champ électrique, on peut choisir la direction Oz dans la direction du champ et écrire plus simplement :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \approx f_0(\mathbf{r}, v, t) + \cos \theta f_1^0(\mathbf{r}, v, t)$$

En déduire les 2 équations couplées de l'EDF dans le cas d'un plasma non magnétisé :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v}{3} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{f}_1 - \frac{e\mathbf{E}}{3mv^2} \cdot \frac{\partial (v^2 \mathbf{f}_1)}{\partial v} &= \left(\frac{\delta f_0}{\delta t} \right)_c, \\ \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} + v \nabla_{\mathbf{r}} f_0 - \frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} &= \left(\frac{\delta \mathbf{f}_1}{\delta t} \right)_c\end{aligned}$$

On trouve donc le résultat suivant pour un plasma non magnétisé où $\mathbf{a} = -e\mathbf{E}/m$:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v}{3} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{f}_1 - \frac{e\mathbf{E}}{3mv^2} \cdot \frac{\partial (v^2 \mathbf{f}_1)}{\partial v} &= \left(\frac{\delta f_0}{\delta t} \right)_c, \\ \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} + v \nabla_{\mathbf{r}} f_0 - \frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} &= \left(\frac{\delta \mathbf{f}_1}{\delta t} \right)_c\end{aligned}}$$

Ces 2 équations couplées permettent de déterminer les 2 composantes de la fonction de distribution des électrons (EDF en anglais) et constituent la base de l'analyse du transport des électrons dans les plasmas faiblement ionisés.

Avant d'exploiter ces équations pour établir une théorie cinétique des décharges, une bonne partie du chapitre suivant va consister à donner une expression explicite des 2 termes de collisions $\left(\frac{\delta f_0}{\delta t} \right)_c$ et $\left(\frac{\delta \mathbf{f}_1}{\delta t} \right)_c$.

Chapitre 2

Collisions dans les plasmas faiblement ionisés

On entend par collision entre particules tout mécanisme d'interaction, de contact ou à distance, qui modifie les trajectoires initiales des particules. La quantité de mouvement totale et l'énergie totale sont des invariants dans les collisions, mais les déviations de trajectoires s'accompagnent d'un transfert de quantité de mouvement et d'énergie d'une des particules vers l'autre. Bien que certaines collisions puissent, a priori, mettre en jeu plusieurs particules, celles-ci sont rares dans les milieux dilués que sont les plasmas, et nous nous limiterons donc dans la suite aux collisions binaires. D'une façon générale, les collisions dans les plasmas dépendent des particules impliquées (atomes, molécules, ions, électrons), de leurs lois d'interaction (de contact, de polarisation, coulombienne ...) et des processus de conservation d'énergie considérés (élastiques, inélastiques).

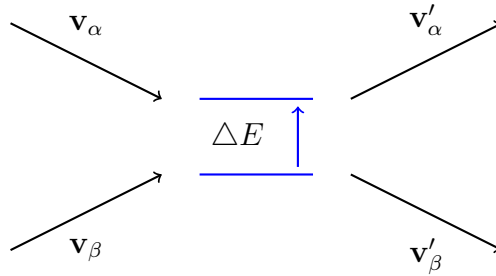
Nous débuterons ce chapitre en traitant en détail les transferts d'impulsion et d'énergie dans les collisions binaires élastiques, puis nous rappellerons quelques définitions générales sur les paramètres utilisés couramment pour caractériser les collisions. La section suivante sera consacrée à la dérivation des intégrales de collisions dans les formes proposées par Boltzmann. Ces intégrales de collisions seront ensuite considérées dans le cadre des modèles de Lorentz qui fournissent une description simplifiée mais pertinente des collisions électrons-neutres. Nous serons alors en mesure d'illustrer ce formalisme en calculant les termes de collisions intervenant dans les équations cinétiques traitées dans le cadre de l'approximation à 2 termes présentées dans le chapitre précédent. Enfin, nous montrerons comment obtenir les termes de collisions intervenant dans les équations fluides macroscopiques.

2.1 Transfert d'impulsion et d'énergie dans les collisions

Considérons une collision binaire, élastique ou inélastique, entre une particule de masse m_α , de vitesse \mathbf{v}_α , et une particule de masse m_β , de vitesse \mathbf{v}_β . On se limite au cas où les particules créées sont elles-mêmes des particules de type α ou β , seules leurs vitesses et leurs énergies sont modifiées.

$$\alpha(\mathbf{v}_\alpha) + \beta(\mathbf{v}_\beta) \xrightarrow{\Delta E} \alpha(\mathbf{v}'_\alpha) + \beta(\mathbf{v}'_\beta)$$

Les bilans qui suivent ne s'appliquent donc pas aux réactions dites réactives où la nature et/ou le nombre des particules sont modifiés (c'est le cas par exemple pour les réactions d'ionisation). \mathbf{v}'_α et \mathbf{v}'_β désignent les vitesses des particules après la collision.



La quantité de mouvement totale et l'énergie totale sont identiques avant et après la collision (ainsi que la masse totale, bien sûr). On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_\beta &= m_\alpha \mathbf{v}'_\alpha + m_\beta \mathbf{v}'_\beta, \\ \frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_\beta \mathbf{v}_\beta^2 &= \frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}'_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_\beta \mathbf{v}'_\beta^2 + \Delta E, \end{aligned}$$

où ΔE est la variation d'énergie interne de la réaction. Dans le cas des collisions élastiques, $\Delta E = 0$, et la deuxième relation s'identifie alors avec la conservation de l'énergie cinétique totale.

Une conséquence immédiate de la conservation de la quantité de mouvement est la conservation de la vitesse du centre de gravité :

$$\mathbf{v}_G \equiv \frac{m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_\beta}{m_\alpha + m_\beta} = \mathbf{v}'_G,$$

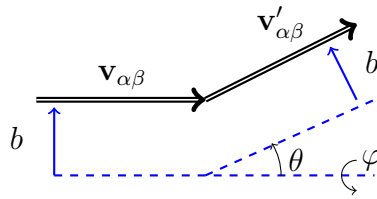
valable aussi bien pour les collisions élastiques que pour les collisions inélastiques.

2.1.1 Transfert d'impulsion et d'énergie dans les collisions binaires élastiques

Dans le cas des collisions élastiques ($\Delta E = 0$), on montre facilement (voir plus bas) que le module de la vitesse relative des particules, $v_{\alpha\beta} \equiv |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|$, est un invariant collisionnel :

$$v_{\alpha\beta} = v'_{\alpha\beta}$$

Le vecteur vitesse relative ne change donc pas de module mais seulement de direction. La rotation du vecteur dans l'espace est décrite par 2 angles regroupés dans l'angle solide $\Omega \equiv (\theta, \varphi)$.



On retrouve le fait bien connu que la collision de 2 particules se ramène à celui de la diffusion d'une seule particule par un centre de forces fictif fixe. La particule arrive avec une vitesse relative, $\mathbf{v}_{\alpha\beta}$, et un paramètre d'impact, b , et repart avec la vitesse relative, $\mathbf{v}'_{\alpha\beta}$, l'état final étant précisé par les angles de diffusion (θ, φ) .

Nous serons particulièrement intéressés dans la suite par le transfert de quantité de mouvement et d'énergie cinétique à une des composantes - disons α - au cours d'une collision. On peut établir les expressions suivantes (cf. exercice) :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{p}_\alpha &\equiv m_\alpha \mathbf{v}'_\alpha - m_\alpha \mathbf{v}_\alpha = \mu_{\alpha\beta} (\mathbf{v}'_{\alpha\beta} - \mathbf{v}_{\alpha\beta}), \\ \Delta K_\alpha &\equiv \frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}'_\alpha{}^2 - \frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha{}^2 = \frac{\kappa_{\alpha\beta}}{2} (m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_\beta) \cdot (\mathbf{v}'_{\alpha\beta} - \mathbf{v}_{\alpha\beta}) \end{aligned}$$

où nous avons introduit la masse réduite, $\mu_{\alpha\beta}$, et le coefficient de transfert en énergie, $\kappa_{\alpha\beta}$, définies par :

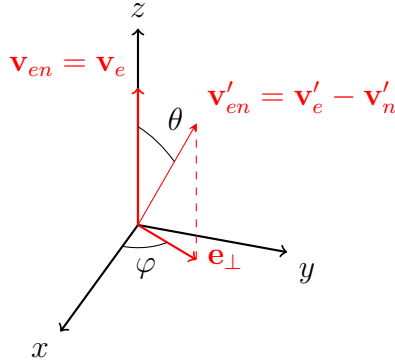
$$\mu_{\alpha\beta} \equiv \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \quad \kappa_{\alpha\beta} = \frac{2\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha + m_\beta}$$

1. Exprimer les vitesses initiales des particules en fonction de la vitesse du centre de gravité \mathbf{v}_G des 2 particules et de la vitesse relative $\mathbf{v}_{\alpha\beta}$, et les vitesses finales en fonction de \mathbf{v}_G et de la vitesse relative $\mathbf{v}'_{\alpha\beta}$.
2. Utiliser les expressions précédentes et la conservation de l'énergie cinétique pour montrer que le module de la vitesse relative est un invariant dans les collisions élastiques : $v_{\alpha\beta} = v'_{\alpha\beta}$.
3. Etablir les expressions ci-dessus donnant les transferts d'impulsion $\Delta \mathbf{p}_\alpha$ et d'énergie cinétique ΔK_α .

2.1.2 Cas particulier des collisions élastiques électrons-neutres

Dans le cas des collisions entre électrons (de masses, m) et neutres (de masses, M), on trouve facilement que :

$$\mu_{en} \sim m \quad \text{et} \quad \kappa_{en} \sim 2m/M \ll 1$$



En se plaçant dans le repère du neutre en mouvement avant la collision, et en utilisant le fait que $v'_{en} = v_{en} = v_e$ dans le cas des collisions élastiques, on peut écrire (cf. schéma) :

$$\mathbf{v}'_{en} = \cos \theta \mathbf{v}_e + v_e \sin \theta \mathbf{e}_{\perp}$$

$$\text{où } \mathbf{e}_{\perp} = \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \varphi \mathbf{e}_x.$$

Considérons d'abord le cas d'un neutre infiniment lourd ($m/M \rightarrow 0$), le neutre est alors sans recul : $\mathbf{v}'_n = \mathbf{0}$, de sorte que dans cette limite :

$$\mathbf{v}'_e - \mathbf{v}_e = -(1 - \cos \theta) \mathbf{v}_e + v_e \sin \theta \mathbf{e}_{\perp},$$

mais $v'_e - v_e = 0$ par conservation de l'énergie cinétique. On en déduit donc que la variation de la vitesse de l'électron dans la direction de la vitesse incidente peut prendre toutes les valeurs entre $\mathbf{0}$ et $-2\mathbf{v}_e$, tandis que le module de la vitesse des électrons avant et après le choc (ou leur énergie cinétique) est inchangé(e).

Dans la limite $m/M \ll 1$, la vitesse de recul du neutre, \mathbf{v}'_n , doit être prise en compte, et il est facile d'établir le résultat suivant dans cette limite (cf. exercice) :

$$v'_e - v_e \approx -\frac{m}{M} (1 - \cos \theta) v_e$$

1. En utilisant l'expression de \mathbf{v}'_{en} et la conservation de la quantité de mouvement, montrer que l'on obtient à l'ordre 1 en m/M :

$$\mathbf{v}'_e = \left(\cos \theta + \frac{m}{M} (1 - \cos \theta) \right) \mathbf{v}_e + \sin \theta \left(1 - \frac{m}{M} \right) v_e \mathbf{e}_{\perp},$$

2. En déduire la relation sur les modules des vitesses :

$$v'_e \approx v_e \left(1 - \frac{m}{M} (1 - \cos \theta) \right)$$

Ainsi, lors des collisions élastiques entre électrons et neutres, les changements de direction des électrons peuvent être importants, mais la variation du module de la vitesse des électrons reste toujours très faible puisque proportionnelle à m/M .

L'image physique est donc la suivante : au cours des collisions avec les neutres, les électrons changent de direction de façon aléatoire en conservant quasiment leur vitesse initiale. Rappelons que ce comportement des électrons dans les plasmas faiblement ionisés est à l'origine de la justification physique de l'approximation à 2 termes.

2.2 Paramètres de collision

Chacune des populations de particules possèdent en général une distribution de vitesses. Soit $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha, t)d^3\mathbf{v}_\alpha$ le nombre de particules par unité de volume ayant leurs vitesses comprises entre \mathbf{v}_α et $\mathbf{v}_\alpha + d^3\mathbf{v}_\alpha$ et, de même, $f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\beta, t)d^3\mathbf{v}_\beta$ le nombre de particules par unité de volume ayant leurs vitesses comprises entre \mathbf{v}_β et $\mathbf{v}_\beta + d^3\mathbf{v}_\beta$.

Le nombre de collisions, $dQ_{\alpha\beta}$, entre particules α et β , par unité de volume et de temps, ayant respectivement leurs vitesses égales à \mathbf{v}_α à $d^3\mathbf{v}_\alpha$ prêt, et \mathbf{v}_β à $d^3\mathbf{v}_\beta$ prêt, et conduisant à des diffusions dans l'angle solide élémentaire $d\Omega$ s'écrit :

$$dQ_{\alpha\beta} = f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)d^3\mathbf{v}_\alpha f_\beta(\mathbf{v}_\beta)d^3\mathbf{v}_\beta v_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}, \Omega) d\Omega$$

Cette relation est une des définitions de *la section efficace différentielle* $\sigma_{\alpha\beta}$.¹

Une section efficace doit être associée à chaque type de collision qui, dans les plasmas, peuvent être très variées (collisions élastiques, collisions inélastiques d'ionisation, d'excitation électronique, d'attachement ...). Dans le cas des collisions inélastiques, un effet de seuil est observé : les sections efficaces sont nulles en deça d'une certaine énergie minimale. Le calcul effectif des sections efficaces est en général très difficile et nécessite parfois un calcul quantique. Un grand nombre de sections efficaces de collisions sont cependant connues au moins expérimentalement.

En utilisant l'invariance des équations du mouvement par réflexion d'espace ($\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$) et par renversement du temps ($t \rightarrow -t$), on peut montrer que la section

1. La section efficace différentielle peut également être définie comme étant le rapport de la surface d'interception du flux de particules incidentes, dS , avec l'angle solide, $d\Omega$, dans lequel les particules sont diffusées :

$$\sigma \equiv \frac{dS}{d\Omega} = \frac{b db d\varphi}{\sin \theta d\theta d\varphi} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

où b est le paramètre d'impact.

efficace est la même pour une réaction donnée et pour la réaction inverse

$$\sigma_{\alpha\beta \rightarrow \alpha'\beta'} = \sigma_{\alpha'\beta' \rightarrow \alpha\beta}$$

Cette relation est connue sous le nom propriété de *microréversibilité*.

On définit également *la section efficace totale*, $\Sigma_{\alpha\beta}(v)$ où l'information sur les angles est perdue :

$$\Sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}) \equiv \int \sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}, \Omega) d\Omega$$

Trois quantités importantes utilisées dans la suite et qui dépendent de la section efficace totale sont *le taux de collision* (en m^3s^{-1}), noté $K_{\alpha\beta}$, *la fréquence de collision* (en s^{-1}), notée $\nu_{\alpha\beta}$, et *le libre parcours moyen* (en m), noté $\lambda_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}) &\equiv \Sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta})v_{\alpha\beta}, \\ \lambda_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}) &\equiv \frac{1}{n_{\beta}\Sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta})}, \\ \nu_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}) &\equiv n_{\beta}K_{\alpha\beta} = n_{\beta}\Sigma_{\alpha\beta}v_{\alpha\beta} = \frac{v_{\alpha\beta}}{\lambda_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta})}, \end{aligned}$$

On peut définir des grandeurs macroscopiques correspondantes en effectuant une moyenne avec les fonctions de distribution.

Quelques unes des interactions importantes entre les particules d'un plasma peuvent être analysées en considérant une loi de force (centrale) de la forme² :

$$F_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) = \frac{C_{\alpha\beta}}{r_{\alpha\beta}^a}$$

où $r_{\alpha\beta}$ est la distance entre les particules, et où $C_{\alpha\beta}$ et a sont des constantes qui dépendent de l'interaction considérée. Les cas les plus importants correspondent aux valeurs $a = 2$, $a = 5$ et $a \rightarrow \infty$. Dans ce qui suit, on rappelle³ la dépendance fonctionnelle en la vitesse relative $v_{\alpha\beta}$ dans chacun de ces cas, et on décrit sommairement les principaux mécanismes collisionnels relevant de ces interactions.

1. $a = 2$: interaction coulombienne.

Ce cas convient donc pour décrire les interactions entre particules chargées : électron-électron, électron-ion ou ion-ion dans un plasma. Le calcul des sections efficaces totales nécessite une régularisation du potentiel coulombien.

$$F_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) \propto \frac{1}{r_{\alpha\beta}^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}) \propto \frac{1}{v_{\alpha\beta}^4} \quad \Rightarrow \quad K_{\alpha\beta}, \nu_{\alpha\beta} \propto \frac{1}{v_{\alpha\beta}^3}$$

2. Les forces d'interactions magnétiques entre particules chargées ne relèvent pas de cette forme, mais sont généralement négligeables au niveau microscopique, sauf dans le cas des plasmas relativistes.

3. Le détail des calculs peut être trouvés, par exemple, dans le livre de Delcroix.

2. $a = 5$: interaction charge-dipôle induit.

Ce cas correspond à l'interaction d'une charge (électron ou ion) avec un atome polarisable. La polarisation n'est effective (i.e. n'a le temps de se réaliser) que si la vitesse relative des particules n'est pas trop importante, faute de quoi, on a une interaction de types sphères dures. Cette interaction peut également être utilisée pour décrire le cas des collisions ion-atome avec transfert de charge résonnant (interaction d'un ion avec son atome parent).

$$F_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) \propto \frac{1}{r_{\alpha\beta}^5} \Rightarrow \sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}) \propto \frac{1}{v_{\alpha\beta}} \Rightarrow K_{\alpha\beta}, \nu_{\alpha\beta} = \text{Cte}$$

3. $a \rightarrow \infty$: interaction de sphères dures.

Cette interaction peut être utilisée dans le cas des interactions d'une charge avec un atome non polarisable ou d'une charge avec un atome polarisable à haute énergie. Cette interaction permet également de décrire les interactions atome-atome à courte portée (à plus longue portée, il faut utiliser le potentiel de van der Waals).

$$\text{Sphères dures} \Rightarrow \sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}), \lambda(v_{\alpha\beta}) = \text{Cte} \Rightarrow K_{\alpha\beta}, \nu_{\alpha\beta} \propto v_{\alpha\beta}$$

Les 2 derniers types d'interactions où, soit la fréquence de collisions, soit le libre-parcours moyen, sont indépendants de la vitesse relative des particules, constituent 2 modèles-limites qui permettent d'effectuer certains calculs simplifiés dans le cas des plasmas faiblement ionisés.

2.3 L'intégrale de collision de Boltzmann

Dans cette section, nous étudions une des expressions du terme de collisions de l'équation cinétique, obtenue dans sa forme finale par Boltzmann en 1872, et qui s'appliquait initialement aux gaz neutres de faibles densités.

Dans les plasmas faiblement ionisés qui nous intéressent, les interactions dominantes sont les interactions entre charge (électron ou ion) et neutre, cette dernière étant l'espèce dominante. A la différence des interactions coulombiennes de longue portée, ce sont des interactions de contact pour lesquels l'intégrale de Boltzmann peut, a priori, être également utilisée.

2.3.1 Le calcul de Boltzmann

Plus précisément, nous cherchons à déterminer l'intégrale de collisions, $\left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t}\right)_c$, qui correspond à la variation du nombre de particules par unité de volume $d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v}_\alpha$ de l'espace des phases et par unité de temps de la composante α du plasma, due

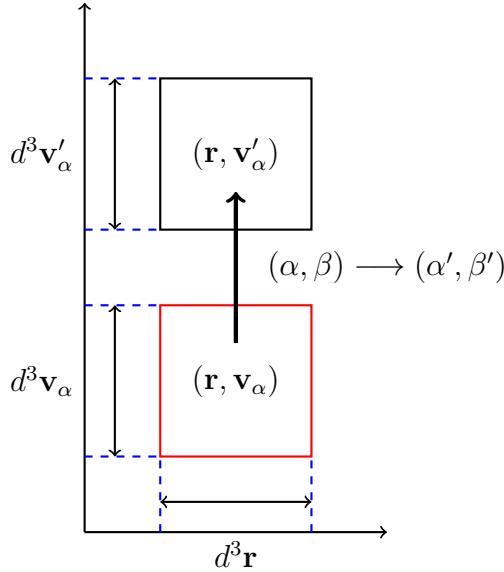
aux collisions des particules α avec des particules β (typiquement des collisions de type électron-neutre, ion-neutre ou neutre-neutre).

Les hypothèses retenues dans le calcul de Boltzmann sont les suivantes :

- les collisions sont binaires (situation d'un gaz dilué)
- Les collisions sont supposées locales et instantanées⁴ : elles produisent seulement un changement abrupt des vitesses résultant de la conservation des quantités de mouvement et de l'énergie sans prise en compte des forces extérieures s'appliquant sur les particules (les changements continus de vitesses au cours du temps sont pris en compte par la partie non collisionnelle de l'équation cinétique de Boltzmann)
- les vitesses des particules avant les collisions ne sont pas corrélées (il n'y a aucun effet de mémoire des trajectoires et collisions précédant le choc considéré)

Cas général

Les variations du nombre de particules de type α dans le volume $d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v}_\alpha$ de l'espace des phases pendant le temps dt , dues aux collisions avec les particules β ont 2 origines :



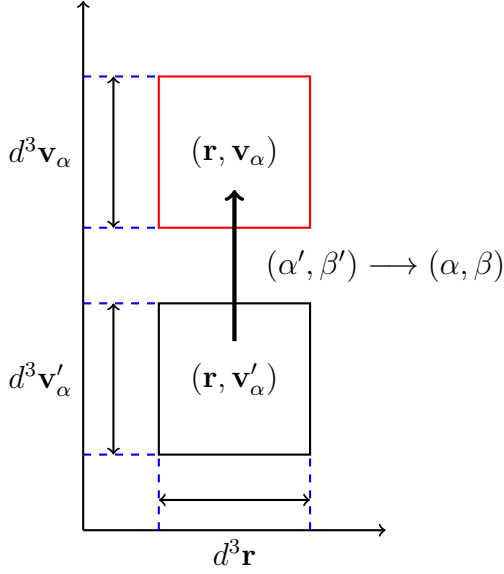
- une perte pour les particules de vitesse \mathbf{v}_α qui sortiraient de ce volume par collision avec les particules β et qui entreraient dans un autre volume de l'espace des phases $d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v}'_\alpha$ (\mathbf{v}'_α étant dans ce cas la vitesse après la collision).

D'après la définition de la section efficace différentielle, on a :

$$dN_\alpha^- = d^3\mathbf{r}dt \int_{\mathbf{v}_\beta} \int_{\Omega} v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}, \Omega) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha, t) f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\beta, t) d\Omega d^3\mathbf{v}_\alpha d^3\mathbf{v}_\beta$$

où on a intégré sur Ω et \mathbf{v}_β .

4. Plus précisément la portée des interactions et la durée des interactions sont toutes deux très faibles par rapport au libre parcours moyen et au temps moyen entre 2 collisions.



- un gain pour les particules qui entreront dans ce volume par collision avec les particules β et qui proviennent d'un autre volume de l'espace des phase $d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{v}'_\alpha$ (la vitesse \mathbf{v}'_α étant dans ce cas la vitesse *avant* la collision).

$$dN_\alpha^+ = d^3 \mathbf{r} dt \int_{\mathbf{v}'_\beta} \int_{\Omega} v'_{\alpha\beta} \sigma'_{\alpha\beta}(v'_{\alpha\beta}, \Omega) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_\alpha, t) f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_\beta, t) d\Omega d^3 \mathbf{v}'_\alpha d^3 \mathbf{v}'_\beta$$

où $\sigma'_{\alpha\beta}(v'_{\alpha\beta}, \Omega) \equiv \sigma_{\alpha'\beta' \rightarrow \alpha\beta}(v'_{\alpha\beta}, \Omega)$, et où on intègre cette fois-ci sur Ω et sur toutes les vitesses \mathbf{v}'_β ayant conduit à la vitesse \mathbf{v}_α .

Comme :

$$\left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_c^B d^3 \mathbf{v}_\alpha d^3 \mathbf{r} dt = dN_\alpha^+ - dN_\alpha^- ,$$

on obtient donc l'expression suivante dans le cas plus général :

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_c^{\text{inel}} d^3 \mathbf{v}_\alpha &= \int_{\Omega} \int_{\mathbf{v}'_\beta} f_\alpha(\mathbf{v}'_\alpha) f_\beta(\mathbf{v}'_\beta) v'_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(v'_{\alpha\beta}, \Omega) d\Omega d^3 \mathbf{v}'_\beta d^3 \mathbf{v}'_\alpha \\ &- \int_{\Omega} \int_{\mathbf{v}_\beta} f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) f_\beta(\mathbf{v}_\beta) v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}, \Omega) d\Omega d^3 \mathbf{v}_\beta d^3 \mathbf{v}_\alpha \end{aligned}}$$

où on a seulement utilisé la relation de micro-réversibilité, $\sigma_{\alpha'\beta' \rightarrow \alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta \rightarrow \alpha'\beta'}$.

Cas des collisions élastiques

Dans le cas des collisions élastiques, dN_α^+ s'écrit encore :

$$dN_\alpha^+ = d^3 \mathbf{r} dt \int_{\mathbf{v}_\beta} \int_{\Omega} v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}, \Omega) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_\alpha, t) f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_\beta, t) d\Omega d^3 \mathbf{v}_\alpha d^3 \mathbf{v}_\beta$$

où on a utilisé le fait que $v'_{\alpha\beta} = v_{\alpha\beta}$ pour les collisions élastiques, que $d^3 \mathbf{v}_\alpha d^3 \mathbf{v}_\beta = d^3 \mathbf{v}'_\alpha d^3 \mathbf{v}'_\beta$ car le jacobien de la transformation est égal à l'unité.

L'expression recherchée de *l'intégrale de collision de Boltzmann* s'écrit donc dans le cas des collisions élastiques :

$$\left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_c^{\text{el}} = \int_{v_\beta} \int_{\Omega} (f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta) v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}, \Omega) d\Omega d^3\mathbf{v}_\beta$$

où on a posé $f_\alpha \equiv f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha, t)$, $f'_\alpha = f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_\alpha, t) \dots$ et où \mathbf{v}'_α et \mathbf{v}'_β doivent être exprimés dans ces expressions en fonctions de \mathbf{v}_α et \mathbf{v}_β avant de procéder aux intégrations. L'équation d'évolution de la fonction de distribution de la composante α s'écrit donc dans ce cas sous la forme :

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \gamma \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = \sum_\beta \iint (f'_\alpha f'_\beta - f_\alpha f_\beta) v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}, \Omega) d\Omega d^3\mathbf{v}_\beta$$

où nous avons sommé sur β dans l'hypothèse où l'on les particules α interagissent avec plusieurs types de particule β .

Que ce soit dans le cas général ou dans celui des collisions élastiques, l'équation d'évolution de f_α devient une équation intégro-différentielle et non-linéaire (présence de produit de fonctions de distribution dans le terme de collision). Cette équation n'est pas invariante par renversement du temps et elle est donc susceptible de décrire une dynamique irréversible, ce qui est compatible avec les lois de la thermodynamique⁵.

2.3.2 Modèles de Lorentz

On vient de signaler qu'une des difficultés techniques introduites par l'intégrale de collisions de Boltzmann est son caractère non-linéaire. Il existe cependant une approximation *linéaire* introduite pour la 1ère fois par Lorentz en 1905 dans l'étude de la diffusion d'électrons par des centres diffuseurs fixes.

Dans le cadre de la physique des plasmas, compte tenu du rapport de masses entre les électrons et les atomes ou molécules neutres, le modèle du gaz de Lorentz peut être utilisé comme modèle simplifié des collisions au sein d'un plasma faiblement ionisé. Les centres diffuseurs des électrons sont les espèces neutres. On distingue 2 types de modèles de Lorentz selon le degré de précision en m/M retenus dans les calculs :

— *Modèle de Lorentz parfait*

pour lequel on suppose que $v'_e \approx v_e$ dans le cas des collisions élastiques et $v_e^2 \approx v_e'^2 + 2\Delta E/m$ dans le cas des collisions inélastiques. Ces approximations sont justifiées si l'on néglige la vitesse des neutres par rapport à celles

5. Ce conflit apparent entre les équations exactes comme celles de Liouville et BBGKY, qui relèvent de la mécanique en tant qu'équations réversibles, et l'équation approchée de Boltzmann, irréversible, est à l'origine de controverses célèbres toujours discutées de nos jours.

des électrons et si on suppose que le rapport m/M est rigoureusement nul. On notera que dans ce modèle, les électrons ne perdent aucune énergie au cours des collisions élastiques électrons-neutres⁶.

— *Modèle de Lorentz imparfait*

pour lequel les calculs sont faits au 1er ordre en m/M . Dans ce cas, on a montré que $v'_e \approx v_e (1 - \frac{m}{M}(1 - \cos \theta))$ dans le cas des collisions élastiques. Dans ce modèle, du fait du (faible) recul des neutres, les électrons perdent (un peu) d'énergie au cours de chaque collision élastique.

Partons des expressions les plus générales obtenues dans la section précédente en adaptant les notations aux cas des collisions électrons-neutres. On a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta f_e}{\delta t} \right)_c d^3 \mathbf{v}_e &= \int_{\Omega} \int_{\mathbf{v}'_n} f_e(\mathbf{v}'_e) f_n(\mathbf{v}'_n) v'_{en} \sigma_{en}(v'_{en}, \Omega) d\Omega d^3 \mathbf{v}'_n d^3 \mathbf{v}'_e \\ &- \int_{\Omega} \int_{\mathbf{v}_n} f_e(\mathbf{v}_e) f_n(\mathbf{v}_n) v_{en} \sigma_{en}(v_{en}, \Omega) d\Omega d^3 \mathbf{v}_n d^3 \mathbf{v}_e \end{aligned}$$

Comme on peut négliger la vitesse des neutres par rapport à celles des électrons : $v_{en} \approx v_e$ et $v'_{en} \approx v'_e$, les variables liées aux électrons et aux neutres se découplent donc et on obtient l'expression simplifiée :

$$\left(\frac{\delta f_e}{\delta t} \right)_c d^3 \mathbf{v}_e = n_n \int_{\Omega} \left[f_e(\mathbf{v}'_e) v'_e \sigma_{en}(v'_e, \Omega) d\Omega \frac{d^3 \mathbf{v}'_e}{d^3 \mathbf{v}_e} - f_e(\mathbf{v}_e) v_e \sigma_{en}(v_e, \Omega) \right] d\Omega d^3 \mathbf{v}_e$$

où on a utilisé le fait que $\int f_n(\mathbf{v}_n) d^3 \mathbf{v}_n = \int f_n(\mathbf{v}'_n) d^3 \mathbf{v}'_n = n_n$. Ce modèle ne contient plus que la fonction de distribution des électrons et elle est donc linéaire dans cette variable.

Dans le cas des collisions inélastiques $dv'_e/dv_e = v_e/v'_e$ puisque⁷ $v_e'^2 = v_e^2 + 2\Delta E/m$, tandis que pour les collisions élastiques, $dv'_e/dv_e = v'_e/v_e$, puisque $\frac{v'_e}{v_e} \approx 1 + \frac{m}{M}(1 - \cos \theta)$.

On en déduit donc :

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \mathbf{v}'_e}{d^3 \mathbf{v}_e} &= \frac{v_e'^2}{v_e^2} \frac{dv'_e}{dv_e} = \frac{v'_e}{v_e} \quad \text{pour les collisions inélastiques} \\ &= \frac{v_e'^2}{v_e^2} \frac{dv'_e}{dv_e} = \frac{v_e'^3}{v_e^3} \quad \text{pour les collisions élastiques} \end{aligned}$$

6. Avec pour conséquence non-physique que le gaz de Lorentz parfait s'échauffe sans limite au cours du temps sous l'effet du champ électrique.

7. Notez que v'_e désigne ici la vitesse *avant* la collision.

Les intégrales de collisions dans ces 2 cas peuvent donc s'écrire :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta f_e}{\delta t}\right)_c^{\text{inel,parfait}} &= n_n \frac{v_e'^2}{v_e} \int_{\Omega} f_e(\mathbf{v}_e') \sigma_{en}(v_e', \Omega) d\Omega - n_n v_e \int_{\Omega} f_e(\mathbf{v}_e) \sigma_{en}(v_e, \Omega) d\Omega \\ \left(\frac{\delta f_e}{\delta t}\right)_c^{\text{el,imparfait}} &= n_n \frac{v_e'^4}{v_e^3} \int_{\Omega} f_e(\mathbf{v}_e') \sigma_{en}(v_e', \Omega) d\Omega - n_n v_e \int_{\Omega} f_e(\mathbf{v}_e) \sigma_{en}(v_e, \Omega) d\Omega \end{aligned}$$

On obtient l'intégrale de collisions dans le cas du modèle de Lorentz parfait avec collisions élastiques en faisant $v_e' = v_e$ dans une de ces 2 expressions :

$$\left(\frac{\delta f_{\alpha}}{\delta t}\right)_c^{\text{el,parfait}} = n_n v_e \int_{\Omega} (f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}_e', t) - f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}_e, t)) \sigma_{en}(v_e, \Omega) d\Omega$$

Notez qu'on peut retrouver directement ce résultat à partir de la forme particulière de l'intégrale de Boltzmann obtenue dans le cas des collisions élastiques.

2.4 Termes de collisions dans les équations cinétiques

Dans le 1er chapitre, on a vu que les composantes isotropes, $f_0(\mathbf{r}, v, t)$ et anisotropes, $\mathbf{f}_1(\mathbf{r}, v, t)$ de la fonction de distribution des électrons introduites dans le cadre de l'approximation à 2 termes vérifiaient les 2 équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v}{3} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{f}_1 - \frac{e\mathbf{E}}{3mv^2} \cdot \frac{\partial (v^2 \mathbf{f}_1)}{\partial v} &= \left(\frac{\delta f_0}{\delta t}\right)_c, \\ \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} + v \nabla_{\mathbf{r}} f_0 - \frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} &= \left(\frac{\delta \mathbf{f}_1}{\delta t}\right)_c \end{aligned}$$

Les termes de collisions qui apparaissent dans ces équations comprennent a priori des contributions élastiques et inélastiques entre électrons et neutres que l'on déterminera en utilisant l'intégrale de collision de Boltzmann.

Plus précisément, nous allons obtenir les expressions des contributions suivantes :

$$\left(\frac{\delta f_0}{\delta t}\right)_c^{\text{el}}, \quad \left(\frac{\delta \mathbf{f}_1}{\delta t}\right)_c^{\text{el}}, \quad \left(\frac{\delta f_0}{\delta t}\right)_c^{\text{exc}} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\delta f_0}{\delta t}\right)_c^{\text{ion}},$$

qui représentent respectivement les contributions élastiques aux transferts d'énergie et de quantité de mouvement, ainsi que les contributions dues aux collisions inélastiques d'excitation et d'ionisation.

2.4.1 Contributions des collisions élastiques

Commençons par calculer la contribution des collisions élastiques électrons-neutres en utilisant le modèle de Lorentz parfait avec l'approximation à 2 termes pour f_e : $f_e(\mathbf{v}_e) = f_0(v_e) + \hat{\mathbf{v}}_e \cdot \mathbf{f}_1(v_e)$.

On trouve aussitôt :

$$\left(\frac{\delta f_e}{\delta t}\right)_c^{\text{el,parfait}} = n_n v_e \int (\hat{\mathbf{v}}'_e - \hat{\mathbf{v}}_e) \cdot \mathbf{f}_1(v_e) \sigma_{en}(v_e, \Omega) d\Omega$$

où on remarquera que les contributions isotropes s'annulent du fait que $v'_e = v_e$ dans le modèle de Lorentz parfait.

Or,

$$\int (\mathbf{v}'_e - \mathbf{v}_e) \sigma_{en}(v_e, \Omega) d\Omega = -\mathbf{v}_e \int (1 - \cos \theta) \sigma_{en}(v_e, \Omega) d\Omega = -\sigma_{en}^t(v_e) \mathbf{v}_e$$

où $\sigma_{en}^t(v_e) \equiv \int (1 - \cos \theta) \sigma_{en}(v_e, \Omega) d\Omega$ est la section efficace dite de transfert de quantité de mouvement, et où on a utilisé le résultat $\int \mathbf{e}_\perp d\varphi = 0$.

Sur la base du modèle de Lorentz parfait, on trouve donc :

$$\boxed{\left(\frac{\delta \mathbf{f}_1}{\delta t}\right)_c^{\text{el}} = -\nu_m(v_e) \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, v_e, t)}$$

où $\nu_m(v_e) = n_n \sigma_{en}^t(v_e) v_e$ est la fréquence de transfert de quantité de mouvement des neutres vers les électrons.

C'est un résultat qui peut sembler évident, au moins du point de vue dimensionnel. Il existe d'ailleurs une approximation de l'intégrale de collision connue sous le nom d'approximation BGK (Bhatnagar, Gross and Krook) qui s'écrit sous la forme empirique suivante :

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c^{\text{BGK}} \approx -\nu (f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)) = -\nu f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t),$$

la deuxième égalité étant valable dans le cadre de l'approximation à 2 termes ($f \approx f_0 + f_1$). Dans ce modèle simplifié, les collisions ramènent la fonction de distribution à sa forme d'équilibre local f_0 . On notera toutefois qu'un seul temps caractéristique, ν^{-1} , est introduit dans ce modèle alors que la fréquence de transfert de quantité de mouvement dépend en général du module de la vitesse des électrons dans la démarche plus contrôlée présentée ci-dessus.

Le modèle de Lorentz parfait ne permettant pas de calculer la contribution des collisions élastiques à f_0 , utilisons le modèle de Lorentz imparfait qui s'écrit sous la forme suivante pour la partie impliquant f_0 :

$$\left(\frac{\delta f_0}{\delta t}\right)_c^{\text{el,imparfait}} = \frac{n_n}{v_e^3} \int \left(v_e'^4 f_0(v_e') \sigma_{en}(v_e', \Omega) - v_e^4 f_0(v_e) \sigma_{en}(v_e, \Omega) \right) d\Omega$$

v'_e et v_e étant très proches, un développement limité à l'ordre le plus bas conduit à l'expression

$$\left(\frac{\delta f_0}{\delta t}\right)_c^{\text{el,imparfait}} \approx \frac{n_n}{v_e^3} \int (v'_e - v_e) \frac{\partial}{\partial v_e} (v_e^4 f_0(v_e) \sigma_{en}(v_e, \Omega)) d\Omega$$

Or,

$$\frac{v'_e}{v_e} \approx 1 + \frac{m}{M} (1 - \cos \theta)$$

et en utilisant les notations précédentes, on trouve :

$$\left(\frac{\delta f_0}{\delta t}\right)_c^{\text{el}} = \frac{m}{M} \frac{1}{v_e^2} \frac{\partial}{\partial v_e} (v_e^3 \nu_m(v_e) f_0(v_e))$$

Ce résultat a été obtenu en négligeant la température des neutres. Pour obtenir la correction tenant compte de l'agitation thermique des neutres, on se contentera de l'argument heuristique suivant. Lorsque les électrons et les neutres sont à l'équilibre thermodynamique, la fonction de distribution des électrons doit être une Maxwellienne à la température, T_n , des neutres :

$$f_0(v_e) \propto \exp\left(-\frac{mv_e^2}{2kT_n}\right)$$

qui vérifie la propriété $f'_0(v_e) = -\frac{m}{kT_n} v_e f_0(v_e)$. Puisque $\left(\frac{\delta f_0}{\delta t}\right)_c^{\text{el}}$ doit s'annuler à l'équilibre thermodynamique⁸, on en déduit donc la forme plus complète du terme de collisions élastiques sous la forme⁹ :

$$\boxed{\left(\frac{\delta f_0}{\delta t}\right)_c^{\text{el}} = \frac{m}{M} \frac{1}{v_e^2} \frac{\partial}{\partial v_e} \left[v_e^2 \nu_m(v_e) \left(v_e f_0 + \frac{kT_n}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_e} \right) \right]}$$

2.4.2 Contributions des collisions inélastiques

Dans une collision inélastique entre électrons et neutres, les électrons peuvent céder une partie de leurs énergies pour exciter des degrés de libertés rotationnels,

8. En absence de forces extérieures, pour un plasma homogène, l'équation de Boltzmann se réduit à l'égalité :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c$$

Le terme de collisions doit donc s'annuler dans la limite stationnaire.

9.

$$\left(\frac{\delta f_0}{\delta t}\right)_c^{\text{el}} = 0 \quad \implies \quad v_e f_0 + \frac{kT_n}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_e} = \frac{K}{v_e^2 \nu_m(v_e)}$$

mais la constante K doit être nulle puisque ni $v_e f_0(v_e)$ ni $f'_0(v_e)$ ne doivent diverger lorsque $v_e \rightarrow 0$.

vibrationnels ou électroniques de l'atome ou ioniser l'atome ou la molécule neutre impliquée dans la collision.

Commençons par analyser le cas des collisions d'excitation. Pour cela, partons de l'expression de l'intégrale de collisions obtenue plus haut, à savoir :

$$\left(\frac{\delta f_e}{\delta t}\right)_c^{\text{inel}} = n_n \frac{v_e'^2}{v_e} \int f_e(\mathbf{v}_e') \sigma_{exc}(v_e', \Omega) d\Omega - n_n v_e \int f_e(\mathbf{v}_e) \sigma_{exc}(v_e, \Omega) d\Omega$$

où σ_{exc} est la section efficace d'excitation du processus considéré. Pour la partie concernant f_0 , cette expression se simplifie de la façon suivante dans le cadre de l'approximation à 2 termes :

$$\boxed{\left(\frac{\delta f_0}{\delta t}\right)_c^{\text{exc}} = \frac{v_e'}{v_e} \nu_{exc}(v_e') f_0(\mathbf{r}, v_e', t) - \nu_{exc}(v_e) f_0(\mathbf{r}, v_e, t) \quad (\Delta E \gg K_e)}$$

où $\nu_{exc}(v) \equiv n_n v \int \sigma_{exc}(v, \Omega) d\Omega$ et $v_e'^2 = v_e^2 + 2\Delta E/m$ avec ΔE l'énergie perdue par les électrons dans la réaction d'excitation considérée. Cette forme convient plus particulièrement dans le cas des excitations électroniques pour lesquelles $\Delta E \gg K_e$.

Dans le cas des excitations des niveaux rotationnels ou vibrationnels des atomes, $\Delta E \ll K_e$ et on peut alors effectuer un développement au 1er ordre en $v_e' - v_e$ qui conduit à l'expression suivante :

$$\boxed{\left(\frac{\delta f_0}{\delta t}\right)_c^{\text{exc}} \approx \frac{\Delta E}{m v_e^2} \frac{\partial}{\partial v_e} (v_e \nu_{exc}(v_e) f_0(\mathbf{r}, v_e, t)) \quad (\Delta E \ll K_e)}$$

On parle parfois de collisions quasi-élastiques dans ce dernier cas.

Dans le cas des réactions d'ionisation, il faut prendre en compte le fait qu'un électron énergétique, de vitesse initiale \mathbf{v}_e' crée 2 électrons que l'on supposera chacun de même vitesse \mathbf{v}_e :

$$e^-(\mathbf{v}_e') + A(\mathbf{v}_n \equiv \mathbf{0}) \implies 2 e^-(\mathbf{v}_e) + A^+(\mathbf{v}_i \equiv \mathbf{0})$$

La relation de conservation de l'énergie doit être modifiée : $v_e'^2 = 2 v_e^2 + 2\Delta E/m$ où ΔE désigne maintenant l'énergie d'ionisation.

Le terme de collision due aux réactions d'ionisations devra donc s'écrire sous la forme :

$$\boxed{\left(\frac{\delta f_0}{\delta t}\right)_c^{\text{ion}} = 4 \frac{v_e'}{v_e} \nu_{ion}(v_e') f_0(\mathbf{r}, v_e', t) - \nu_{ion}(v_e) f_0(\mathbf{r}, v_e, t)}$$

2.5 Termes de collisions dans les équations macroscopiques

Les variables macroscopiques d'un plasma comme la densité, la vitesse fluide, le champ de pression ... correspondent aux moments, dans l'espace des vitesses, de la fonction de distribution. La définition de la densité :

$$n(\mathbf{r}, t) \equiv \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v},$$

permet d'introduire une densité de probabilité f/n normalisée à l'unité dans l'espace des vitesses. Les moyennes des grandeurs physiques peuvent donc être définies par la relation :

$$\langle \dots \rangle \equiv \int \dots \frac{f}{n} d^3\mathbf{v}$$

Par exemple, la vitesse fluide, $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$, s'écrit :

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \equiv \int \mathbf{v} \frac{f}{n} d^3\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle$$

Le tenseur de pression, $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$, la température $T(\mathbf{r}, t)$ et le vecteur flux de chaleur, $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$, sont définis à l'aide des vitesses centrées $\mathbf{w} \equiv \mathbf{v} - \mathbf{V}$ par les expressions :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &\equiv nm \langle \mathbf{w}\mathbf{w} \rangle, \\ k_B T(\mathbf{r}, t) &\equiv \frac{m}{3} \langle w^2 \rangle, \\ \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) &\equiv \frac{nm}{2} \langle w^2 \mathbf{w} \rangle \end{aligned}$$

Dans une approche fluide, du fait de l'intégration des degrés de libertés de vitesses, l'information sur les vitesses microscopiques des composantes du plasma est perdue, et les variables macroscopiques ne dépendent que de la position et du temps.

2.5.1 Equations macroscopiques de transport

Pour obtenir les équations de bilans macroscopiques qui relient les champs macroscopiques entre eux, il faut donc multiplier l'équation de Boltzmann par une certaine puissance de \mathbf{v} et intégrer.

D'une façon plus générale, soit $a(\mathbf{v})$ une fonction quelconque¹⁰ du vecteur vitesse \mathbf{v} qui ne dépende pas de \mathbf{r} et t . Considérons l'équation :

$$\int a(\mathbf{v}) \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(fv_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(fF_i/m)}{\partial v_i} \right) d^3\mathbf{v} = \int a(\mathbf{v}) \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c d^3\mathbf{v}$$

10. On peut toujours se ramener à une fonction scalaire. Si la fonction est un tenseur, on considère chacune de ses composantes qui est un scalaire.

où la sommation sur l'indice répété i est sous-entendu (convention d'Einstein).

En regroupant les différentes contributions, on obtient (voir plus bas) l'équation générale de transport :

$$\frac{\partial \langle na(\mathbf{v}) \rangle}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \langle na(\mathbf{v})\mathbf{v} \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} na(\mathbf{v}) \right\rangle + \int a(\mathbf{v}) \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c d^3\mathbf{v}$$

Sous cette forme, cette équation apparaît à nouveau comme une *loi de conservation* dont les termes sources sont les 2 termes du membre de droite qui prennent en compte les forces extérieures et les collisions.

Pour obtenir les 3 premières équations macroscopiques de transport, il suffit maintenant d'utiliser l'équation générale de transport dans les cas particuliers où $a \equiv 1, m\mathbf{v}, mv^2/2$. Les équations correspondantes s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma} &= \int \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c d^3\mathbf{v} \\ \frac{\partial (nm\mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{D} &= nq(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \int m\mathbf{v} \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c d^3\mathbf{v} \\ \frac{\partial (n\epsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{H} &= nq\mathbf{E} \cdot \mathbf{V} + \int \frac{1}{2}mv^2 \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c d^3\mathbf{v} \end{aligned}$$

où nous avons introduit l'énergie moyenne par particule, ϵ :

$$\epsilon \equiv \left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{3}{2}kT$$

ainsi que la densité de flux de particules, $\mathbf{\Gamma} = n\mathbf{V}$, le tenseur de dynalpie, $\mathbf{D} = \mathbf{P} + nm\mathbf{V}\mathbf{V}$, et la densité de flux d'énergie, $\mathbf{H} = n\epsilon\mathbf{V} + \mathbf{q} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{V}$.

Ces 3 équations correspondent respectivement *aux équations de bilan de particules, de quantité de mouvement et d'énergie*.

Outre le fait que les équations de bilan ne constituent pas un système fermé d'équations (le nombre de variables macroscopiques, n, ϵ ou $T, \mathbf{V}, \mathbf{q}, \mathbf{P}$ est plus élevé que le nombre d'équations) elles nécessitent des expressions explicites pour les intégrales de collisions S_ℓ^{el} définies par les intégrales

$$S_\ell^{\text{el}} \equiv \int a(\mathbf{v}) \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c d^3\mathbf{v}$$

où $a(\mathbf{v}) = 1, m\mathbf{v}, \frac{1}{2}mv^2, \dots$.

Soit $a(\mathbf{v})$ une fonction quelconque de la vitesse \mathbf{v} .

1. En multipliant l'équation de Boltzmann par $a(\mathbf{v})$ et en intégrant sur les vitesses, montrer que l'on obtient l'équation générale de transport :

$$\frac{\partial \langle na(\mathbf{v}) \rangle}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \langle na(\mathbf{v}) \mathbf{v} \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} na(\mathbf{v}) \right\rangle + \int a(\mathbf{v}) \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c d^3 \mathbf{v}$$

2. En prenant $a(\mathbf{v}) = 1, m\mathbf{v}$ ou $a(\mathbf{v}) = mv^2/2$, en déduire les équations de bilan de particules, de quantité de mouvement et d'énergie.

2.5.2 Contributions des collisions élastiques aux équations de bilan

A titre d'illustration, nous présentons dans cette section, le calcul de la contribution des collisions élastiques aux équations de transport en utilisant l'intégrale de collision de Boltzmann.

Pour cela, notons d'abord l'égalité :

$$\begin{aligned} & \iiint a(\mathbf{v}_\alpha) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_\alpha, t) f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_\beta, t) v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}, \Omega) d\Omega d^3 \mathbf{v}_\beta d^3 \mathbf{v}_\alpha \\ &= \iiint a(\mathbf{v}'_\alpha) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha, t) f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\beta, t) v'_{\alpha\beta} \sigma'_{\alpha\beta}(v'_{\alpha\beta}, \Omega) d\Omega d^3 \mathbf{v}'_\beta d^3 \mathbf{v}'_\alpha \\ &= \iiint a(\mathbf{v}'_\alpha) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha, t) f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\beta, t) v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}, \Omega) d\Omega d^3 \mathbf{v}_\beta d^2 \mathbf{v}_\alpha \end{aligned}$$

qui résulte, dans une première étape, du changement de variables $(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta) \implies (\mathbf{v}'_\alpha, \mathbf{v}'_\beta)$, puis dans une 2ème étape, des égalités déjà utilisées : $v'_{\alpha\beta} = v_{\alpha\beta}$, $d^3 \mathbf{v}'_\beta d^3 \mathbf{v}'_\alpha = d^3 \mathbf{v}_\beta d^3 \mathbf{v}_\alpha$ et $\sigma'_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}$.

On en déduit l'égalité qui sera utilisée à plusieurs reprises dans la suite :

$$\begin{aligned} S_{l\alpha}^{\text{el}} &\equiv \int a(\mathbf{v}_\alpha) \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_c^{\text{el}} d^3 \mathbf{v}_\alpha \\ &= \iiint [a(\mathbf{v}'_\alpha) - a(\mathbf{v}_\alpha)] f_\alpha f_\beta v_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}, \Omega) d\Omega d^3 \mathbf{v}_\beta d^3 \mathbf{v}_\alpha \end{aligned}$$

Cette expression permet donc d'obtenir la contribution de la quantité physique considérée du fait des collisions à partir des seules intégrations sur les vitesses initiales.

Il est intéressant de considérer cette expression lorsque les particules entrant en collisions sont identiques (i.e. $\beta = \alpha$). Oublions l'indice α , et notons \mathbf{v} et $\bar{\mathbf{v}}$ les vitesses des 2 particules avant leur collision. Alors :

$$\int a(\mathbf{v}) \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c^B d^3 \mathbf{v} = \iiint [a(\mathbf{v}') - a(\mathbf{v})] f(\mathbf{v}) f(\bar{\mathbf{v}}) |\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}| \sigma d\Omega d^3 \bar{\mathbf{v}} d^3 \mathbf{v}$$

2.5. TERMES DE COLLISIONS DANS LES ÉQUATIONS MACROSCOPIQUES 43

En échangeant \mathbf{v} et $\bar{\mathbf{v}}$ dans l'intégrale, cette expression s'écrit encore sous la forme :

$$\int a(\mathbf{v}) \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c^B d^3\mathbf{v} = \frac{1}{2} \iiint [a(\mathbf{v}') + a(\bar{\mathbf{v}}') - a(\mathbf{v}) - a(\bar{\mathbf{v}})] f(\mathbf{v})f(\bar{\mathbf{v}}) |\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}| \sigma d\Omega d^3\bar{\mathbf{v}} d^3\mathbf{v}$$

Le nombre de particules, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique étant conservés au cours des collisions élastiques, nous en déduisons que ces quantités sont *des invariants collisionnels* puisque les intégrales suivantes sont nulles :

$$\int 1 \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c^B d^3\mathbf{v} = 0 \quad \int m\mathbf{v} \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c^B d^3\mathbf{v} = 0 \quad \int \frac{1}{2}mv^2 \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c^B d^3\mathbf{v} = 0$$

Ces résultats ne valent bien sûr qu'entre particules identiques. Dans le cas des plasmas, toujours à plusieurs composantes pour assurer la neutralité globale, nous allons montrer que ces contributions ne sont pas nulles en général.

1. Contribution au bilan de particules

La contribution au bilan de particules est obtenue à l'aide de $a(\mathbf{v}_\alpha) \equiv 1$, ce qui conduit immédiatement à une contribution nulle pour $S_{0\alpha}^{\text{el}}$:

$$\boxed{S_{0\alpha}^{\text{el}} \equiv \int \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_c^B d^3\mathbf{v}_\alpha = 0}$$

Ce résultat traduit le fait que les collisions élastiques ne modifie pas le nombre de particules.

2. Contribution au bilan de quantité de mouvement

Pour le bilan de quantité de mouvement, rappelons que la variation d'impulsion dans le cas des collisions élastiques s'écrit :

$$m_\alpha \mathbf{v}'_{\alpha\beta} - m_\alpha \mathbf{v}_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta} (\mathbf{v}'_{\alpha\beta} - \mathbf{v}_{\alpha\beta}) = \mu_{\alpha\beta} [-(1 - \cos\theta)\mathbf{v}_{\alpha\beta} + v_{\alpha\beta} \sin\theta \mathbf{e}_\perp]$$

En introduisant cette expression dans l'intégrale définissant $\mathbf{S}_{1\alpha}^{\text{el}}$ avec $\mathbf{a}(\mathbf{v}_\alpha) \equiv m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$, on obtient presque aussitôt :

$$\mathbf{S}_{1\alpha}^{\text{el}} = -\mu_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \iint \mathbf{v}_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} \frac{f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\alpha, t)}{n_\alpha} \frac{f_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v}_\beta, t)}{n_\beta} d\mathbf{v}_\alpha^3 d\mathbf{v}_\beta^3$$

où on a introduit la section efficace de transfert d'impulsion $\sigma_{\alpha\beta}^t$, la fréquence de collision, $\nu_{\alpha\beta}$ et le taux de réaction, $K_{\alpha\beta}$, définies par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^t(v_{\alpha\beta}) &\equiv \int (1 - \cos\theta) \sigma_{\alpha\beta} d\Omega, \\ \nu_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}) &\equiv n_\beta \sigma_{\alpha\beta}^t v_{\alpha\beta}, \\ K_{\alpha\beta} &\equiv \sigma_{\alpha\beta}^t v_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

En notations plus compactes, on écrira :

$$\mathbf{S}_{1\alpha}^{\text{el}} \equiv \int m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \left(\frac{\delta f_{\alpha}}{\delta t} \right)_c^B d^3 \mathbf{v}_{\alpha} = -\mu_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \langle \mathbf{v}_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} \rangle$$

où la moyenne doit être effectuée avec les 2 fonctions de distributions normalisées.

3. Contribution au bilan d'énergie

En effectuant le calcul avec $a(\mathbf{v}_{\alpha}) \equiv m_{\alpha} v_{\alpha}^2/2$, et en utilisant l'expression du transfert d'énergie à la particule α calculé précédemment, on trouve aussitôt :

$$S_{2\alpha}^{\text{el}} = -\kappa_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \left\langle \left(\frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 - \frac{1}{2} m_{\beta} v_{\beta}^2 + \frac{m_{\beta} - m_{\alpha}}{2} \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \mathbf{v}_{\beta} \right) K_{\alpha\beta} \right\rangle$$

Pour aller plus loin dans le calcul il faut préciser la dépendance fonctionnelle du taux de collisions $K_{\alpha\beta}$ en fonction de la vitesse relative $v_{\alpha\beta}$. Cela revient à préciser la section efficace de collision et donc la nature des forces d'interaction entre les particules considérées. Ce calcul ne peut donc être effectué qu'au cas par cas, et suppose en outre de préciser la forme des fonctions de distributions pour être mener à son terme.

Cas des fréquences de collisions indépendantes de la vitesse relative

Il existe un cas particulier qui permet un calcul sans hypothèse sur les fonctions de distributions. Il s'agit du cas où la section efficace est inversement proportionnelle à la vitesse relative $\sigma_{\alpha\beta}^t \sim 1/v_{\alpha\beta}$, de sorte que le taux de réaction et la fréquence de collision sont constants. Comme nous l'avons vu plus haut, ce cas correspond à une interaction du type charge-dipôle induit et constitue une approximation raisonnable pour traiter le cas des collisions élastiques de type charge-neutre dans un régime de pressions plutôt élevées.

Il est alors facile d'établir les 2 résultats :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{1\alpha}^{\text{el}} &= -\mu_{\alpha\beta} n_{\alpha} \nu_{\alpha\beta} (\mathbf{V}_{\alpha} - \mathbf{V}_{\beta}), \\ S_{2\alpha}^{\text{el}} &= -\kappa_{\alpha\beta} n_{\alpha} \nu_{\alpha\beta} \left[\epsilon_{\alpha} - \epsilon_{\beta} + (m_{\beta} - m_{\alpha}) \frac{\mathbf{V}_{\alpha} \cdot \mathbf{V}_{\beta}}{2} \right] \end{aligned}$$

Dans le cas des collisions électrons-neutres, on peut généralement négliger \mathbf{V}_e devant \mathbf{V}_n , T_n devant T_e et les contributions fluides devant celles de température dans le terme d'énergie, de sorte qu'on écrit souvent :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{1e}^{\text{el}} &= -m n_e \nu_{en} \mathbf{V}_e \quad (\nu_{en} \text{ ind. de } v_e) \\ S_{2e}^{\text{el}} &= -\frac{2m}{M} n_e \nu_{en} \epsilon_e \quad (\nu_{en} \text{ ind. de } v_e) \end{aligned}$$

2.5. TERMES DE COLLISIONS DANS LES ÉQUATIONS MACROSCOPIQUES⁴⁵

avec $\epsilon_e \approx 3k_B T_e/2$. Ces formes simplifiées sont souvent utilisées pour la modélisation fluide des électrons sans justifications.

Notez que tous les résultats présentés dans cette section sur les termes de collision dans les équations macroscopiques n'utilisent pas l'approximation à 2 termes.

Chapitre 3

Coefficients de transport électroniques

Au sein des plasmas, l'existence de gradients de densité, de gradients de potentiel électrostatique ou de gradients de température sont à l'origine de flux de particules, de charges électriques et d'énergie qui tendent à s'opposer à ces gradients. Les coefficients de transport sont précisément les coefficients qui relient flux et gradients.

Dans ce chapitre, on se propose de déterminer des expressions générales des coefficients de transport associés aux électrons par une approche cinétique développée dans le cadre de l'approximation à 2 termes. On s'intéressera plus particulièrement aux coefficients de conductivité électrique et thermique, ainsi qu'aux coefficients de mobilité et de diffusion.

Comme on le verra, la théorie cinétique nous permettra de préciser les limites de validité des expressions utilisées couramment dans le cadre des approches fluides. Ici encore, nous soulignerons à nouveau l'importance de la dépendance des fréquences de collisions avec la vitesse des électrons.

3.1 Introduction

Commençons par rappeler les expressions des équations macroscopiques de bilan de particules et d'énergie écrites sous la forme¹ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma} &= \int \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c d^3 \mathbf{v} \\ \frac{\partial (n\epsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{H} &= nq\mathbf{E} \cdot \mathbf{V} + \int \frac{1}{2}mv^2 \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_c d^3 \mathbf{v}\end{aligned}$$

1. L'équation de bilan de quantité de mouvement, non écrite ici, permettrait d'introduire les coefficients de viscosité lorsque le tenseur de pression n'est pas strictement diagonal.

où nous avons introduit la densité de flux de particules, $\mathbf{\Gamma}$, et la densité de flux d'énergie, \mathbf{H} , définis par :

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma} &\equiv n \langle \mathbf{v} \rangle = n \mathbf{V}, \\ \mathbf{H} &\equiv n \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \mathbf{v} \right\rangle = \epsilon n \mathbf{V} + \mathbf{q} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{V}\end{aligned}$$

où ϵ , \mathbf{q} , et \mathbf{P} désignent respectivement l'énergie par particule, le vecteur flux de chaleur et le tenseur de pression (cf. chapitre précédent).

Dans le cadre de l'approximation à 2 termes, $f = f_0 + \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{f}_1$, il est facile de se convaincre que ces 2 flux s'expriment directement en fonction de \mathbf{f}_1 . Plus précisément, en utilisant les relations $\int \hat{\mathbf{v}} d\Omega = \mathbf{0}$ et $\int \hat{\mathbf{v}} \hat{\mathbf{v}} d\Omega = \frac{4\pi}{3} \mathbf{I}$, on trouve

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma} &= \int \hat{\mathbf{v}} \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, v, t) v^3 d^2\Omega_v dv = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, v, t) v^3 dv, \\ \mathbf{H} &= \frac{m}{2} \int \hat{\mathbf{v}} \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, v, t) v^5 d^2\Omega_v dv = \frac{2\pi m}{3} \int_0^\infty \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, v, t) v^5 dv\end{aligned}$$

Supposons que f_0 soit connue ou que nous sachions la calculer (ce qui supposerait la résolution des 2 équations couplées obtenues au 1er chapitre, ce que nous ferons dans le chapitre suivant). Pour l'heure, utilisons seulement la 2ème de ces équations :

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} + v \nabla_{\mathbf{r}} f_0 - \frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} = -\nu_m(v) \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, v, t)$$

où f_0 est donc supposée connue.

Le reste du programme consiste à substituer \mathbf{f}_1 obtenu à l'aide de cette équation dans les expressions des flux $\mathbf{\Gamma}$ et \mathbf{H} et à identifier les termes de couplage aux gradients de potentiel électrostatique, de densité et de température, qui constituent les coefficients de transports recherchés.

3.2 Flux de matière et d'énergie

Considérons d'abord des problèmes indépendants du temps, comme ceux que l'on rencontre en physique des décharges lorsque le champ de chauffage est un champ électrique DC, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

3.2.1 Cas d'un plasma non magnétisé

Dans ces conditions, \mathbf{f}_1 s'exprime en fonction de f_0 de la façon suivante :

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{r}, v) = \frac{e\mathbf{E}}{m\nu_m(v)} \frac{\partial f_0}{\partial v} - \frac{v}{\nu_m(v)} \nabla_{\mathbf{r}} f_0$$

En utilisant cette expression, les flux de particules et d'énergie s'écrivent donc sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma} &= \left(\frac{4\pi e}{3m} \int_0^\infty \frac{v^3}{\nu_m(v)} \frac{\partial f_0}{\partial v} dv \right) \mathbf{E} - \nabla \left(\frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{v^4}{\nu_m(v)} f_0 dv \right), \\ \mathbf{H} &= \left(\frac{2\pi e}{3} \int_0^\infty \frac{v^5}{\nu_m(v)} \frac{\partial f_0}{\partial v} dv \right) \mathbf{E} - \nabla \left(\frac{2\pi m}{3} \int_0^\infty \frac{v^6}{\nu_m(v)} f_0 dv \right)\end{aligned}$$

Il est naturel d'introduire les coefficients de mobilité, μ , et de diffusion, D , des particules, ainsi que les coefficients thermoélectrique, β , (ou coefficient de mobilité en énergie) et de diffusion de la chaleur, G , (ou coefficient de diffusion en énergie) :

$$\begin{aligned}\mu &\equiv -\frac{4\pi e}{3m} \int_0^\infty \frac{v^3}{\nu_m(v)} \frac{\partial F_0}{\partial v} dv = \frac{4\pi e}{3m} \int_0^\infty \frac{d}{dv} \left(\frac{v^3}{\nu_m(v)} \right) F_0 dv, \\ D &\equiv \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{v^4}{\nu_m(v)} F_0 dv, \\ \beta &\equiv -\frac{2\pi e}{3} \int_0^\infty \frac{v^5}{\nu_m(v)} \frac{\partial F_0}{\partial v} dv = \frac{2\pi e}{3} \int_0^\infty \frac{d}{dv} \left(\frac{v^5}{\nu_m(v)} \right) F_0 dv, \\ G &\equiv \frac{2\pi m}{3} \int_0^\infty \frac{v^6}{\nu_m(v)} F_0 dv\end{aligned}$$

où $F_0 \equiv f_0/n$ est la fonction de distribution normalisée à l'unité telle que $\int_0^{+\infty} F_0 4\pi v^2 dv = 1$.

Les flux peuvent donc s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma} &= -n\mu\mathbf{E} - \nabla(nD), \\ \mathbf{H} &= -n\beta\mathbf{E} - \nabla(nG)\end{aligned}$$

F_0 étant une fonction de la température électronique T_e , on peut faire apparaître les gradients de densité et de température de façon plus explicite :

$$\begin{aligned}\nabla(nD) &= n \frac{\partial D}{\partial T_e} \nabla T_e + D \nabla n, \\ \nabla(nG) &= n \frac{\partial G}{\partial T_e} \nabla T_e + G \nabla n\end{aligned}$$

de telle façon que l'on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma} &= n\mu\nabla\varphi - n \frac{\partial D}{\partial T_e} \nabla T_e - D \nabla n, \\ \mathbf{H} &= n\beta\nabla\varphi - n \frac{\partial G}{\partial T_e} \nabla T_e - G \nabla n\end{aligned}$$

où on a introduit le potentiel électrostatique, φ tel que $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$.

Ces expressions mettent clairement en évidence que les gradients de densité, de température et de potentiel électrostatique sont à l'origine du transport de matière et d'énergie.

Considérons maintenant le vecteur flux de chaleur des électrons, \mathbf{q} . Notons qu'en absence de champ magnétique et de viscosité, le tenseur de pression est isotrope et diagonal, $\mathbf{P} = nkT_e \mathbf{I}$. Par ailleurs, la vitesse fluide des électrons, \mathbf{V} , est généralement négligeable devant leur vitesse thermique, $v_T \equiv \sqrt{3kT_e/m}$, de sorte que $\epsilon \approx \frac{3}{2}kT_e$. Dans ces conditions, on obtient l'expression suivante de \mathbf{q}_e :

$$\mathbf{H}_e \equiv \epsilon n \mathbf{V} + \mathbf{q} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{V} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{q}_e \approx \mathbf{H}_e - \frac{5}{2}kT_e \mathbf{V}$$

En éliminant le champ électrique entre les expressions de $\mathbf{\Gamma}$ et \mathbf{H} , on trouve alors l'expression suivante pour le vecteur flux de chaleur :

$$\mathbf{q}_e = \left(\frac{\beta}{\mu} - \frac{5}{2}kT_e \right) \mathbf{\Gamma} - \left(\frac{G}{D} - \frac{\beta}{\mu} \right) D \nabla n - n \left(\frac{\partial G}{\partial T_e} - \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial D}{\partial T_e} \right) \nabla T_e$$

Le flux de chaleur comprend donc en toute généralité 3 contributions :

- une contribution due à la convection,
- une contribution due à la diffusion,
- une contribution due à la conduction thermique.

Cette expression est donc plus complexe que la forme souvent retenue, qui se limite à la loi de Fourier, $\mathbf{q} = -\kappa_e \nabla T_e$, où κ_e est le coefficient de conductivité thermique. Nous allons montrer dans le paragraphe suivant que cette simplification suppose une fréquence de collision indépendante de la vitesse et une fonction de distribution maxwellienne.

Un cas particulier

On considère un plasma non magnétisé dont les électrons sont décrits par une fonction de distribution maxwellienne qu'on écrit sous la forme :

$$F_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \equiv \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m}{2k_B T} (\mathbf{v} - \mathbf{V})^2 \right]$$

On rappelle le résultat $\int_{\mathbb{R}} \exp(-\alpha x^2) dx = (\pi/\alpha)^{1/2}$ pour $\alpha > 0$.

Vérifier que cette fonction de distribution est normalisée à l'unité et établir les résultats :

$$\int_{\mathbb{R}^3} m \mathbf{v} F_0 d^3 \mathbf{v} = m \mathbf{V} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} m v^2 F_0 d^3 \mathbf{v} = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{3}{2} k T_e \equiv \epsilon$$

On pose $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ et on ne fait aucune hypothèse sur les variations de la fréquence de transfert de quantité de mouvement $\nu_m(v)$ avec la vitesse v . En partant des définitions des coefficients de transport, établir les relations :

$$\mu = \frac{e}{k_B T} D \quad \text{et} \quad \beta = \frac{e}{k_B T} G$$

On a donc :

$$\frac{D}{\mu} = \frac{G}{\beta} = \frac{kT_e}{e},$$

qui constituent les relations d'Einstein.

On suppose toujours que $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ mais on suppose en outre que ν_m est indépendant de v , $\nu_m(v) = \nu_m$. Montrez alors que :

$$\mu = \frac{e}{m\nu_m} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{5}{2} kT_e \mu$$

On en déduit aussitôt les relations :

$$D = \frac{kT_e}{m\nu} \quad \text{et} \quad G = \frac{5}{2} kT_e D$$

Montrer que l'on peut très facilement retrouver les expressions de μ et D obtenues dans la question précédente à partir d'une approche fluide dans l'approximation de dérive-diffusion où la température est supposée uniforme.

Dans le cas où la fréquence de collision est indépendante de la vitesse v ($\sigma \propto 1/v$) et où F_0 est une maxwellienne, en utilisant les résultats ci-dessus, on a donc à la fois :

$$\frac{D}{\mu} = \frac{G}{\beta} = \frac{kT_e}{e} \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{\mu} = \frac{G}{D} = \frac{5}{2} kT_e$$

Il s'ensuit que les contributions dues à la convection et à la diffusion au flux de chaleur s'annulent dans ce cas.

De plus,

$$\frac{\partial G}{\partial T_e} - \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial D}{\partial T_e} = 5k^2 \frac{T_e}{m\nu_m} - \frac{5}{2} kT_e \frac{k}{m\nu_m} = \frac{5}{2} kD$$

Ainsi le coefficient de conductivité thermique vaut $\kappa_e = 5knD/2$ et on retrouve la loi de Fourier :

$$\mathbf{q} = -\kappa_e \nabla T_e$$

Lorsque la fonction de distribution n'est pas maxwellienne, le terme de diffusion contribue, le pré-facteur pouvant être positif ou négatif, ce qui est associé au comportement dit non-local des décharges que nous étudierons dans le chapitre suivant.

3.2.2 Cas d'un plasma magnétisé

Considérons maintenant le cas d'un plasma placé dans un champ électrique, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ et dans un magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Dans ces conditions, il y a une contribution supplémentaire à l'équation d'évolution de \mathbf{f}_1 :

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} + v \nabla_{\mathbf{r}} f_0 - \frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} - \boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{f}_1 = -\nu_m(v) \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, v, t)$$

où $\omega_c \equiv e\mathbf{B}/m$ est la fréquence cyclotron électronique.

En régime stationnaire, \mathbf{f}_1 est solution de l'équation :

$$\mathbf{f}_1 = \frac{\omega_c}{\nu_m(v)} \mathbf{b} \times \mathbf{f}_1 + \mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \quad (E)$$

où on a posé $\mathbf{b} \equiv \mathbf{B}/B$ et

$$\mathbf{A} \equiv \frac{e\mathbf{E}}{m\nu_m(v)} \frac{\partial f_0}{\partial v} - \frac{v}{\nu_m(v)} \nabla_{\mathbf{r}} f_0$$

On cherche une solution de l'équation (E) sous la forme :

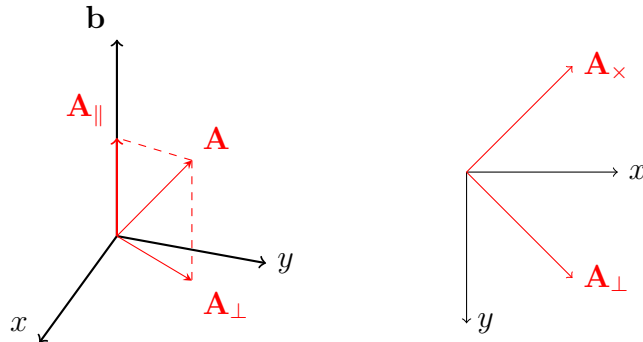
$$\mathbf{f}_1 = \alpha \mathbf{A}_{\parallel} + \beta \mathbf{A}_{\perp} + \delta \mathbf{A}_{\times}$$

où $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\parallel} + \mathbf{A}_{\perp}$ et où $\mathbf{A}_{\times} \equiv \mathbf{b} \times \mathbf{A}_{\perp}$.

Etablir le résultat :

$$\alpha = 1, \quad \beta = \frac{1}{1 + (\omega_c/\nu_m)^2}, \quad \delta = \frac{\omega_c/\nu_m}{1 + (\omega_c/\nu_m)^2}$$

On rappelle l'expression du double produit vectoriel : $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$



A partir de l'expression obtenue pour \mathbf{f}_1 :

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{A}_{\parallel} + \frac{1}{1 + (\omega_c/\nu_m(v))^2} \mathbf{A}_{\perp} + \frac{\omega_c/\nu_m(v)}{1 + (\omega_c/\nu_m(v))^2} \mathbf{A}_{\times}$$

les flux peuvent s'écrire sous la forme :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{\Gamma} &= -n \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot (n \mathbf{D}), \\ \mathbf{H} &= -n \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot (n \mathbf{G}) \end{aligned}}$$

où $\boldsymbol{\mu}$, \mathbf{D} , $\boldsymbol{\beta}$, \mathbf{G} sont maintenant des tenseurs qui prennent la forme suivante dans un repère cartésien où l'axe Oz est choisi dans la direction de \mathbf{B} :

$$\boldsymbol{\mu} \equiv \begin{vmatrix} \mu_{\perp} & -\mu_{\times} & 0 \\ \mu_{\times} & \mu_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{vmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mu_{\parallel} &\equiv \frac{4\pi e}{3m} \int_0^{\infty} \frac{d}{dv} \left(\frac{v^3}{\nu_m(v)} \right) F_0 dv, \\ \mu_{\perp} &\equiv \frac{4\pi e}{3m} \int_0^{\infty} \frac{d}{dv} \left(\frac{v^3 \nu_m(v)}{\nu_m^2(v) + \omega_c^2} \right) F_0 dv, \\ \mu_{\times} &\equiv \frac{4\pi e}{3m} \int_0^{\infty} \frac{d}{dv} \left(\frac{v^3 \omega_c}{\nu_m^2(v) + \omega_c^2} \right) F_0 dv \end{aligned}$$

Les autres tenseurs ont des formes équivalentes.

Il est facile de vérifier qu'on retrouve les formes obtenues en modélisation fluide dans le cas où la fréquence de collision est indépendante de la vitesse v et où F_0 est une maxwellienne :

Utilisez les résultats précédents pour déterminer les expressions des coefficients du tenseur de mobilité dans le cas d'un plasma magnétisé lorsque la fonction de distribution est une maxwellienne et lorsque ν_m est indépendant de v .

La vitesse d'ensemble dans une modélisation fluide simplifiée d'un plasma magnétisé est solution de l'équation :

$$\mathbf{V} = \mu \mathbf{V} \times \mathbf{B} + \mu \mathbf{E}$$

Quelles sont les hypothèses sous-jacentes à cette modélisation ?

Déterminer les composantes du vecteur vitesse dans la base $(\mathbf{E}_{\parallel}, \mathbf{E}_{\perp}, \mathbf{E}_{\times})$ où on a posé $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}$ et $\mathbf{E}_{\times} = \mathbf{b} \times \mathbf{E}_{\perp}$.

Comparer ces composantes avec les éléments du tenseur de mobilité obtenus plus haut par une approche cinétique.

3.3 Densité de courant et conductivité

Pour illustrer une situation dépendant du temps, considérons le cas d'un plasma homogène ($\nabla f_0 = 0$), non magnétisé, chauffé par un champ électrique harmonique dépendant du temps² :

$$\mathbf{E}(t) = \tilde{\mathbf{E}} e^{j\omega t}$$

On se propose de calculer la densité de courant électronique $\mathbf{J} \equiv -ne\langle \mathbf{v} \rangle$ et d'en déduire la contribution à la conductivité due aux électrons.

L'anisotropie étant due aux champ électrique, on suppose que la partie anisotrope de la fonction de distribution, \mathbf{f}_1 , possède la même dépendance spatio-temporelle que celui-ci, à savoir :

$$\mathbf{f}_1(v, t) = \tilde{\mathbf{f}}_1(v) e^{j\omega t}$$

2. On utilise la représentation complexe pour les champs dépendant du temps.

Dans ces conditions, $\tilde{\mathbf{f}}_1$ s'exprime en fonction de f_0 de la façon suivante :

$$\tilde{\mathbf{f}}_1(v) = \frac{e\tilde{\mathbf{E}}}{m(\nu_m(v) + j\omega)} \frac{\partial f_0}{\partial v}$$

On en déduit aussitôt l'expression de $\tilde{\mathbf{J}}$:

$$\tilde{\mathbf{J}} = -\frac{4\pi e}{3} \int_0^\infty \tilde{\mathbf{f}}_1 v^3 dv = \left(-\frac{4\pi e^2}{3m} \int_0^\infty \frac{1}{\nu_m(v) + j\omega} \frac{\partial f_0}{\partial v} v^3 dv \right) \tilde{\mathbf{E}}$$

A partir de la relation, $\tilde{\mathbf{J}} = \tilde{\sigma}\tilde{\mathbf{E}}$, on obtient l'expression de la conductivité, σ :

$$\tilde{\sigma} = \frac{4\pi n_0 e^2}{3m} \int_0^\infty \frac{d}{dv} \left(\frac{v^3}{\nu_m(v) + j\omega} \right) F_0 dv$$

Lorsque ν_m est indépendant de v , quelle que soit la forme de F_0 , on retrouve aussitôt l'expression de la conductivité obtenue par une approche fluide :

$$\tilde{\sigma} = \frac{n_0 e^2}{m(\nu_m + j\omega)} = \epsilon_0 \omega_{pe}^2 \left(\frac{\nu_m}{\nu_m^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{\nu_m^2 + \omega^2} \right)$$

où ω_{pe} est la fréquence plasma électronique.

Chapitre 4

Equations de l'EEDF

Dans ce chapitre, on en vient enfin à combiner les équations d'évolution des parties isotropes et anisotropes de la fonction de distribution des électrons, ce qui nous conduira à une seule équation qui permet de déterminer la fonction de distribution en énergie f_0 des électrons.

Cette équation, connue sous le nom d'*équation de l'EEDF*¹, peut prendre différentes formes selon l'espace des paramètres utilisés pour sa représentation. On donnera successivement les formes de l'EEDF dans les espaces position-module de la vitesse (\mathbf{r}, v) , position-énergie cinétique, (\mathbf{r}, u) ou position-énergie totale (\mathbf{r}, ϵ) .

Nous achèverons ce chapitre en présentant 2 approximations usuelles de cette équation, valables respectivement à hautes et basses pressions, les *approximations dites locales et non-locales de l'EEDF*. Des solutions explicites de l'EEDF sous ces 2 approximations seront données dans le cas de collisions élastiques électrons-neutres.

4.1 Introduction

Rappelons les expressions des 2 équations qui couplent les fonctions de distribution f_0 et \mathbf{f}_1 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_0}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left(\frac{v}{3} \mathbf{f}_1 \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 \left(\frac{e\mathbf{E}}{3m} \cdot \mathbf{f}_1 \right) \right] &= C(f_0), \\ \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} + v \nabla_{\mathbf{r}} f_0 - \frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} &= -\nu_m(v) \mathbf{f}_1\end{aligned}$$

où on a posé par commodité :

$$C(f_0) \equiv \left(\frac{\delta f_0}{\delta t} \right)_c^{\text{el}} + \left(\frac{\delta f_0}{\delta t} \right)_c^{\text{exc}} + \left(\frac{\delta f_0}{\delta t} \right)_c^{\text{ion}}$$

1. EEDF pour "electron energy distribution function".

et où on a donné des expressions approchées pour chacun de ces termes dans un chapitre précédent.

Pour se familiariser avec le formalisme commençons par considérer une situation stationnaire. La 2ème équation conduit aussitôt à une expression de \mathbf{f}_1 en fonction de f_0 :

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{r}, v) = -\frac{v}{\nu_m(v)} \nabla_{\mathbf{r}} f_0 + \frac{e\mathbf{E}}{m\nu_m(v)} \frac{\partial f_0}{\partial v}$$

où l'on reconnaît le libre parcours moyen, λ :

$$\lambda(v) = \frac{v}{\nu_m(v)}$$

En substituant cette expression de \mathbf{f}_1 dans l'équation d'évolution de f_0 , on obtient une équation aux dérivées partielles qui ne dépend plus que de $f_0(\mathbf{r}, v)$, et que l'on peut écrire de la façon suivante :

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left(-D_r \nabla_{\mathbf{r}} f_0 + \frac{e\mathbf{E}\lambda}{3m} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right) + \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 \left(-D_v \frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{e\mathbf{E}\lambda}{3m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_0 \right) \right] = C(f_0)$$

Il s'agit d'une des formes simplifiées de l'équation connue dans la littérature sous le nom d'*équation de l'EEDF*.

Les termes

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot (-D_r \nabla_{\mathbf{r}} f_0) \quad \text{et} \quad \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 \left(-D_v \frac{\partial f_0}{\partial v} \right) \right]$$

où on a introduit les coefficients de diffusion dans l'espace des positions et des vitesses² :

$$D_r = \frac{v^2}{3\nu_m(v)} = \frac{v\lambda}{3} \quad \text{et} \quad D_v = \frac{(e\mathbf{E}/m)^2}{3\nu_m(v)}$$

correspondent à la divergence de termes d'origine diffusive, respectivement dans l'espace réel et dans l'espace des vitesses.

Notez que ces coefficients de diffusion dépendent clairement de v de par leur définition, mais peuvent aussi dépendre de la position \mathbf{r} si le champ électrique n'est pas homogène (ν_m pourrait également dépendre de la position si la densité de neutres est inhomogène, hypothèse que nous ne retiendrons pas dans la suite).

2. On rappelle les relations de définition des coefficients de diffusion :

$$D_r \propto \frac{\langle \delta \mathbf{r} \delta \mathbf{r} \rangle}{\delta t} = \frac{(v\nu_m^{-1})^2}{\nu_m^{-1}} = \frac{v^2}{\nu_m} \quad \text{et} \quad D_v \propto \frac{\langle \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle}{\delta t} = \frac{((e\mathbf{E}/m)\nu_m^{-1})^2}{\nu_m^{-1}} = \frac{(e\mathbf{E}/m)^2}{\nu_m}$$

Les 2 autres termes peuvent également s'écrire sous la forme équivalente :

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left(\frac{e\mathbf{E}\lambda}{3m} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right) &= \frac{e\lambda}{3m} \frac{\partial f_0}{\partial v} \nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{e\lambda}{3m} \frac{\partial}{\partial v} (\mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_0) \\ \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 \left(\frac{e\mathbf{E}\lambda}{3m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_0 \right) \right] &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{e\lambda v^2}{3m} (\mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_0) \right]\end{aligned}$$

On remarque que ces termes s'annulent si le champ électrique est homogène ($\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$) et s'il est orthogonal aux gradients de densité³ ($\mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_0 = 0$). Dans ce cas, la structure de l'équation de l'EEDF est celle d'une équation de diffusion dans l'espace (\mathbf{r}, v) .

Nous verrons dans la suite que ces 2 hypothèses sur \mathbf{E} ne peuvent pas être toujours retenues pour toutes les composantes constituant le champ total intervenant dans l'EEDF, et en particulier pour le champ ambipolaire précisément colinéaire au gradient de densité.

Enfin, pour clore cette introduction, rappelons que nous avons montré dans le chapitre précédent que les grandeurs vectorielles, comme les densités de flux de matière et d'énergie, $\mathbf{\Gamma}$ et \mathbf{H} , s'obtenaient dans le cadre de l'approximation à 2 termes, par intégration dans l'espace des vitesses à l'aide de la seule partie anisotrope, \mathbf{f}_1 , de la fonction de distribution.

De même - et cela est l'une des raisons qui justifient de s'intéresser à l'équation de l'EEDF - les quantités scalaires, comme la densité, $n(\mathbf{r})$, ou l'énergie moyenne par particule, ϵ , s'obtiennent par intégration dans l'espace des vitesses à l'aide de la seule partie isotrope, \mathbf{f}_0 , de la fonction de distribution. On montrera facilement que :

$$\begin{aligned}n(\mathbf{r}, t) &\equiv \int f v^2 d^2\Omega_{\mathbf{v}} dv = 4\pi \int_0^\infty f_0(\mathbf{r}, v, t) v^2 dv, \\ n\epsilon &\equiv \int \frac{1}{2} m v^2 f v^2 d^2\Omega_{\mathbf{v}} dv = 2\pi m \int_0^\infty f_0(\mathbf{r}, v, t) v^4 dv\end{aligned}$$

Après multiplication par 1 ou par $\frac{1}{2} m v^2$, montrer que l'intégration de l'équation de l'EEDF dans l'espace des vitesses conduit, comme il se doit, aux 2 équations de conservation de la matière et de l'énergie en régime stationnaire :

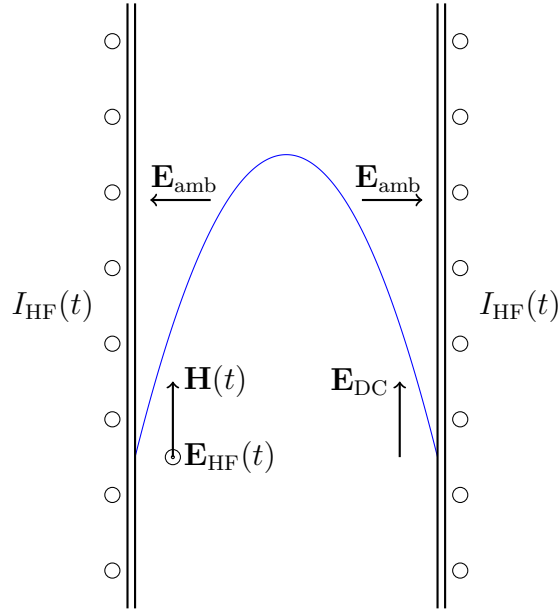
$$\nabla \cdot \mathbf{\Gamma} = \int C(f_0) d^3\mathbf{v} \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = -n e \mathbf{E} \cdot \mathbf{V} + \int \frac{1}{2} m v^2 C(f_0) d^3\mathbf{v}$$

4.2 Diverses expressions de l'équation de l'EEDF

Envisageons maintenant une situation plus concrète. La figure suivante présente le schéma de principe d'une décharge créée dans un long tube cylindrique limité

3. $n \propto f_0$ et donc $\nabla_{\mathbf{r}} n \propto \nabla_{\mathbf{r}} f_0$.

radialement par un diélectrique.



Dans une situation assez générale, le plasma est maintenu par un champ axial DC, $\mathbf{E}_{DC}(\mathbf{r})$ et/ou un champ HF, \mathbf{E}_{HF} . Le champ HF est engendré à l'aide d'un bobinage qui entoure le tube dans lequel circule un courant sinusoïdal $I_{HF}(t)$. Le passage du courant crée un champ magnétique axial $\mathbf{H}(t)$ qui induit⁴ à son tour un champ électrique HF orthoradial $\mathbf{E}_{HF}(t)$.

En réaction à ces perturbations extérieures, il apparaît un gradient de densité au sein du plasma (la densité est maximale au centre et minimale aux parois) qui s'accompagne d'un profil de potentiel électrostatique également radial représenté sur la figure. Un champ électrique (dit ambipolaire⁵) existe donc au voisinage des parois (dans les gaines) qui induit une diffusion des ions vers les parois. Le temps d'établissement de ce champ ambipolaire est gouverné par la (relativement) lente diffusion des ions vers les parois. En présence d'un champ HF tel que $\omega \gg \omega_{pi}$ - situation dans laquelle nous nous placerons désormais - les ions ne peuvent pas suivre les variations temporelles instantanées du champ HF, mais voient seulement un champ moyenné dans le temps : le champ ambipolaire $\mathbf{E}_{amb}(\mathbf{r})$ est donc quasiment indépendant du temps à l'échelle des variations temporelles du champ électrique exciteur.

On pourra donc écrire le champ total au sein de la décharge sous la forme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + \Re \left(\tilde{\mathbf{E}}_{HF}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \right)$$

4. On parle de couplage inductif dans ce dernier cas.

5. A strictement parler, l'appellation de champ "ambipolaire" ne devrait être utilisée que dans certaines situations, en particulier aux pressions suffisamment élevées.

où on a regroupé les contributions des champs DC et ambipolaire indépendantes du temps dans $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$:

$$\boxed{\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{E}_{\text{amb}}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{\text{DC}}(\mathbf{r})}$$

L'anisotropie du plasma étant due aux champs électriques, on peut supposer que la partie anisotrope de la fonction de distribution, \mathbf{f}_1 , possède la même dépendance spatio-temporelle que celui-ci, à savoir :

$$\boxed{\mathbf{f}_1(\mathbf{r}, v, t) = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{r}, v) + \Re\left(\tilde{\mathbf{f}}_{\text{HF}}(\mathbf{r}, v) e^{j\omega t}\right)}$$

En général, la partie isotrope de la fonction de distribution peut-être considérée comme indépendante du temps :

$$\boxed{f_0(\mathbf{r}, v, t) = f_0(\mathbf{r}, v)}$$

C'est bien sûr évident dans le cas où seul un champ DC maintient le plasma, mais également en présence d'un champ HF dans les situations où $\omega \gg \frac{2m_e}{M} \nu_m$, c'est-à-dire dans les situations où le temps caractéristique de relaxation des distributions d'énergie (représentée par f_0) est grand devant la période d'excitation due au champ⁶.

L'EEDF obtenue dans l'introduction correspond à une équation d'évolution de la fonction de distribution f_0 dans l'espace des phases habituel, c'est-à-dire dans l'espace position-vitesse, (\mathbf{r}, v) . Selon les études envisagées, il peut être utile de reformuler l'équation de l'EEDF dans d'autres espaces comme l'espace position-énergie cinétique, (\mathbf{r}, u) , ou l'espace position-énergie totale, (\mathbf{r}, ϵ) , u et ϵ étant définies par les relations⁷

$$\begin{aligned} u &\equiv \frac{1}{2}mv^2, \\ \epsilon &\equiv u - e\phi(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

où $\phi(\mathbf{r})$ est le potentiel électrostatique associé au champ ambipolaire, $\mathbf{E}_{\text{amb}} \equiv -\nabla\phi$. Dans les sous-sections suivantes, nous allons donc obtenir l'équation de l'EEDF de cette décharge générique dans ces 3 espaces des phases pour les fonctions de distribution correspondantes que l'on écrira respectivement, $f_0(\mathbf{r}, v)$, $g_0(\mathbf{r}, u)$ et $h_0(\mathbf{r}, \epsilon)$.

6. Lorsqu'on peut considérer que les mécanismes dominants de pertes d'énergie pour les électrons sont les collisions élastiques avec les neutres, la température électronique, T_e relaxe vers celle des neutres, T_n , avec le temps caractéristique $(\kappa_{en}\nu_m)^{-1} \approx (\frac{2m_e}{M}\nu_m)^{-1}$.

7. Ne pas confondre ϵ avec l'énergie par particule définie précédemment.

4.2.1 Equation de l'EEDF dans l'espace (\mathbf{r}, v)

Commençons par obtenir l'équation de l'EEDF dans l'espace des phases usuel dans le cas de la décharge inductive présentée plus haut.

Considérons d'abord l'équation d'évolution de f_0 moyennée sur la période $2\pi/\omega$, soit :

$$\left\langle \frac{\partial f_0}{\partial t} \right\rangle + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left(\frac{v}{3} \langle \mathbf{f}_1 \rangle \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^2 \left\langle \frac{e\mathbf{E}}{3m} \cdot \mathbf{f}_1 \right\rangle \right) = \langle C(f_0) \rangle,$$

où $\langle \dots \rangle \equiv (\omega/2\pi) \int_0^{2\pi/\omega} \dots dt$

Sous les hypothèses présentées ci-dessus pour la décharge inductive, montrez que :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}_1 \rangle &= \bar{\mathbf{f}}, \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{E} \rangle = \bar{\mathbf{E}}, \\ \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{f}_1 \rangle &= \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{f}} + \frac{1}{2} \Re \left(\tilde{\mathbf{E}}_{\text{HF}}^* \cdot \tilde{\mathbf{f}}_{\text{HF}} \right) \end{aligned}$$

On en déduit donc l'équation moyennée :

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left(\frac{v}{3} \bar{\mathbf{f}} \right) - \frac{e}{3mv^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^2 \left[\bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{f}} + \frac{1}{2} \Re \left(\tilde{\mathbf{E}}_{\text{HF}}^* \cdot \tilde{\mathbf{f}}_{\text{HF}} \right) \right] \right) = C(f_0)$$

En remplaçant $\mathbf{f}_1(\mathbf{r}, v, t) = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{r}, v) + \tilde{\mathbf{f}}_{\text{HF}}(\mathbf{r}, v) e^{j\omega t}$ dans l'équation d'évolution de la partie anisotrope :

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} + v \nabla_{\mathbf{r}} f_0 - \frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} = -\nu_m(v) \mathbf{f}_1,$$

et en identifiant la partie stationnaire et la partie dépendant du temps, on trouve aussitôt :

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{r}, v) = -\frac{v}{\nu_m} \nabla_{\mathbf{r}} f_0 + \frac{e\bar{\mathbf{E}}}{m\nu_m} \frac{\partial f_0}{\partial v} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{f}}_{\text{HF}}(\mathbf{r}, v) = \frac{e\tilde{\mathbf{E}}_{\text{HF}}}{m(\nu_m + j\omega)} \frac{\partial f_0}{\partial v}$$

En substituant ces 2 dernières expressions dans l'équation moyennée, on obtient l'équation de l'EEDF de la décharge inductive :

$$\boxed{\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left(-D_r \nabla_{\mathbf{r}} f_0 + \frac{e\bar{\mathbf{E}}\lambda}{3m} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right) + \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 \left(-D_v \frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{e\bar{\mathbf{E}}\lambda}{3m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_0 \right) \right] = C_0(f_0)}$$

où on a introduit le champ effectif HF :

$$\mathbf{E}_{\text{eff}} \equiv \frac{\tilde{\mathbf{E}}_{\text{HF}}}{\sqrt{2}} \frac{\nu_m}{(\nu_m^2 + \omega^2)^{1/2}} e^{j\omega t}$$

et où le coefficient de diffusion D_v doit être calculé avec les 2 composantes du champ électrique, à savoir :

$$D_v = \frac{(e\bar{\mathbf{E}}/m)^2}{3\nu_m(v)} + \frac{(e|\mathbf{E}_{\text{eff}}|/m)^2}{3\nu_m(v)}$$

Cette équation ne diffère de celle obtenue dans l'introduction que par la prise en compte de la dépendance temporelle de \mathbf{f}_1 , et par l'introduction des différentes composantes du champ électrique.

4.2.2 Equation de l'EEDF dans l'espace (\mathbf{r}, u)

Notons tout d'abord que D_r et $\frac{e\bar{\mathbf{E}}\lambda}{3m} \frac{\partial f_0}{\partial v}$ s'expriment de façon naturelle en fonction de l'énergie cinétique, $u \equiv \frac{1}{2}mv^2$. En effet :

$$D_r = \frac{v^2}{3\nu_m} = \frac{2u}{3m\nu_m} \quad \text{et} \quad \frac{e\bar{\mathbf{E}}\lambda}{3m} \frac{\partial}{\partial v} = e\bar{\mathbf{E}} \frac{v^2}{3\nu_m} \frac{1}{mv} \frac{\partial}{\partial v} = D_r e\bar{\mathbf{E}} \frac{\partial}{\partial u}$$

Il en résulte l'égalité suivante pour la divergence de la partie dans l'espace réel :

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left(-D_r \nabla_{\mathbf{r}} + \frac{e\bar{\mathbf{E}}\lambda}{3m} \frac{\partial}{\partial v} \right) = \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left[-D_r \left(\nabla_{\mathbf{r}} - e\bar{\mathbf{E}} \frac{\partial}{\partial u} \right) \right]$$

Ce résultat montre que l'on peut espérer une simplification de l'équation de l'EEDF dans l'espace position-énergie cinétique, (\mathbf{r}, u) .

Introduisons la fonction de distribution $g_0(\mathbf{r}, u)$ reliée à f_0 par :

$$f_0(\mathbf{r}, v) = g_0(\mathbf{r}, u(v))$$

1. Montrer que g_0 doit être normalisée avec la condition :

$$2\pi (2/m)^{3/2} \int g_0(\mathbf{r}, u) u^{1/2} du = n(\mathbf{r})$$

2. Montrer que les dérivées partielles des 2 fonctions de distributions vérifient les relations :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} f_0 &= \nabla_{\mathbf{r}} g_0, \\ \frac{1}{mv} \frac{\partial f_0}{\partial v} &= \frac{\partial g_0}{\partial u} \end{aligned}$$

3. Etablir les relations :

$$\begin{aligned} D_v \frac{\partial f_0}{\partial v} &= D_r \left(\frac{(e\bar{\mathbf{E}})^2}{mv} + \frac{(e|\mathbf{E}_{\text{eff}}|)^2}{mv} \right) \frac{\partial g_0}{\partial u}, \\ \frac{e\bar{\mathbf{E}}\lambda}{3m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_0 &= D_r \frac{e\bar{\mathbf{E}}}{mv} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} g_0 \end{aligned}$$

4. En déduire l'équation suivante pour la partie de la divergence dans l'espace des vitesses :

$$-\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 \left(D_v \frac{\partial f_0}{\partial v} - \frac{e\bar{\mathbf{E}}\lambda}{3m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_0 \right) \right] = \frac{e\bar{\mathbf{E}}}{v} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left[D_r v \left(\nabla_{\mathbf{r}} - e\bar{\mathbf{E}} \frac{\partial}{\partial u} \right) g_0 \right] - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial u} \left[D_r v (e|\mathbf{E}_{\text{eff}}|)^2 \frac{\partial g_0}{\partial u} \right]$$

En regroupant les contributions des 2 divergences, on vérifie alors facilement que l'équation de l'EEDF dans l'espace (\mathbf{r}, u) s'écrit sous la forme :

$$\left(\nabla_{\mathbf{r}} - e\bar{\mathbf{E}} \frac{\partial}{\partial u} \right) \cdot \left[-D_r v \left(\nabla_{\mathbf{r}} - e\bar{\mathbf{E}} \frac{\partial}{\partial u} \right) g_0 \right] - \frac{\partial}{\partial u} \left[D_r v (eE_{\text{eff}})^2 \frac{\partial g_0}{\partial u} \right] = v C_0(g_0)$$

où D_r et v doivent être exprimés en fonction de u :

$$D_r = \frac{2u}{3m\nu_m(u)} \quad \text{et} \quad v = \left(\frac{2u}{m} \right)^{1/2}$$

Dans cette représentation l'équation de l'EEDF est plus compacte. Le premier terme qui comprend l'opérateur $\nabla_{\mathbf{r}} - e\bar{\mathbf{E}} \frac{\partial}{\partial u}$ va suggérer un 2ème changement de variable que nous présentons dans la section suivante. On notera que le terme proportionnel au champ effectif s'annule lorsque le chauffage n'est dû qu'à un champ DC (compris dans $\bar{\mathbf{E}}$).

4.2.3 Equation de l'EEDF dans l'espace (\mathbf{r}, ϵ)

Le champ $\mathbf{E}_{\text{eff}}(\mathbf{r})$, relié par sa définition au champ HF a essentiellement pour effet de "chauffer" les électrons par collisions avec les neutres sans véritablement déplacer les électrons d'un point à un autre de la décharge. A contrario, le champ DC, $\mathbf{E}_{\text{DC}}(\mathbf{r})$ "chauffe" les électrons et peut potentiellement les déplacer. Ces 2 champs de chauffage qui sont des champs imposés de l'extérieur, sont qualitativement différents du champ ambipolaire $E_{\text{amb}}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$, qui confine (radialement) les électrons au sein de la décharge .

Ces remarques suggèrent de séparer les contributions venant du champ ambipolaire avec celles dues aux champs de chauffage. Pour ce faire, on introduit la fonction de distribution $h_0(\mathbf{r}, \epsilon)$ reliée à g_0 par :

$$g_0(\mathbf{r}, u) = h_0(\mathbf{r}, \epsilon(\mathbf{r}, u))$$

où $\epsilon = u - e\phi(\mathbf{r})$ représente l'énergie mécanique des électrons piégés par le champ ambipolaire.

1. Déterminer l'équation de normalisation de h_0 .
2. Quelles relations existe-t-il entre les dérivées partielles de g_0 et celles de h_0 ?

3. En déduire l'égalité :

$$\left(\nabla_{\mathbf{r}} - e\bar{\mathbf{E}} \frac{\partial}{\partial u} \right) g_0 = \left(\nabla_{\mathbf{r}} - e\mathbf{E}_{\text{DC}} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right) h_0$$

Grâce à ce changement de variables, l'équation de l'EEDF obtenue dans la sous-section précédente s'écrit maintenant :

$$\left(\nabla_{\mathbf{r}} - e\mathbf{E}_{\text{DC}} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right) \cdot \left[-D_r v \left(\nabla_{\mathbf{r}} - e\mathbf{E}_{\text{DC}} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right) h_0 \right] - (eE_{\text{eff}})^2 \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[D_r v \frac{\partial h_0}{\partial \epsilon} \right] = v C_0(h_0)$$

où D_r et v doivent être exprimés en fonction de ϵ et \mathbf{r} :

$$D_r = \frac{2(\epsilon + e\phi(\mathbf{r}))}{3m\nu_m(\epsilon)} \quad \text{et} \quad v = \left(\frac{2(\epsilon + e\phi(\mathbf{r}))}{m} \right)^{1/2}$$

Dans la configuration qui nous intéresse, le champ DC est à la fois orthogonal au champ ambipolaire et au gradient de densité : $\mathbf{E}_{\text{DC}} \cdot \mathbf{E}_{\text{amb}} = 0$ et $\mathbf{E}_{\text{DC}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} h_0 = 0$. De plus, dans la plupart des situations le champ DC est quasiment uniforme, donc de divergence nulle : $\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_{\text{DC}} = 0$. Dans ces conditions, on montre facilement que les contributions croisées suivantes sont nulles⁸ :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left(D_r v e \mathbf{E}_{\text{DC}} \frac{\partial h_0}{\partial \epsilon} \right) &= D_r v e \frac{\partial h_0}{\partial \epsilon} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_{\text{DC}} + e \mathbf{E}_{\text{DC}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \left(D_r v \frac{\partial h_0}{\partial \epsilon} \right) \\ &= e \mathbf{E}_{\text{DC}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \left(D_r v \frac{\partial h_0}{\partial \epsilon} \right) \\ &= e \mathbf{E}_{\text{DC}} \frac{\partial h_0}{\partial \epsilon} \frac{\partial (D_r v)}{\partial \phi} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi + e \mathbf{E}_{\text{DC}} D_r v \cdot \frac{\partial \nabla_{\mathbf{r}} h_0}{\partial \epsilon} = 0, \\ e \mathbf{E}_{\text{DC}} \cdot \frac{\partial}{\partial \epsilon} (D_r v \nabla_{\mathbf{r}} h_0) &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} (D_r v e \mathbf{E}_{\text{DC}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} h_0) = 0 \end{aligned}$$

On trouve donc que l'équation de l'EEDF dans l'espace (\mathbf{r}, ϵ) s'écrit :

$$\boxed{-\nabla_{\mathbf{r}} \cdot (D_r v \nabla_{\mathbf{r}} h_0) - \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[D_r v \frac{\partial h_0}{\partial \epsilon} \right] = v C_0(h_0)}$$

où on a introduit un coefficient de diffusion dans l'espace des énergies⁹ :

$$\boxed{D_\epsilon(\mathbf{r}, \epsilon) = \frac{(e\mathbf{E}_{\text{heat}} v)^2}{3\nu_m} = D_r (e\mathbf{E}_{\text{heat}})^2}$$

8. Notez qu'à la différence des remarques faites sur ces termes dans l'introduction où le champ impliqué était le champ *total* \mathbf{E} , il ne s'agit plus ici que de conditions portant sur la seule partie DC du champ. Ce champ extérieur est contrôlable par l'opérateur qui peut assez aisément imposer ces conditions.

9. Intuitivement,

$$D_\epsilon \propto \frac{\langle \delta\epsilon \delta\epsilon \rangle}{\delta t} \sim \frac{(eE\lambda)^2}{\nu_m^{-1}} = \frac{(eEv)^2}{\nu_m}$$

et où on a posé par commodité : $\mathbf{E}_{\text{heat}}^2 \equiv \mathbf{E}_{\text{DC}}^2 + |\mathbf{E}_{\text{eff}}(\mathbf{r})|^2$.

A la différence des 2 autres représentations, il est remarquable que cette équation ne présente pas de dérivées croisées et qu'elle ne fasse apparaître que des gradients dans l'espace réel et dans celui des énergies. Le champ ambipolaire n'apparaît pas explicitement. Notez toutefois que le potentiel électrostatique associé ϕ est "caché" dans les expressions de D_r et v .

Sous cette forme, l'équation de l'EEDF a la structure d'une *équation de diffusion dans l'espace* (\mathbf{r}, ϵ) . Pour le souligner, certains auteurs introduisent des densités de flux :

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}, \epsilon) &\equiv -D_r v \nabla_{\mathbf{r}} h_0, \\ \Gamma_{\epsilon}(\mathbf{r}, \epsilon) &\equiv -D_{\epsilon} v \frac{\partial h_0}{\partial \epsilon},\end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire l'équation de l'EEDF sous la forme compacte :

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \Phi + \frac{\partial \Gamma_{\epsilon}}{\partial \epsilon} = \left(\frac{2(\epsilon + e\phi(\mathbf{r}))}{m} \right)^{1/2} C_0(h_0)$$

Une fois donnés les champs de chauffage, la dépendance spatiale du potentiel ambipolaire $\phi(\mathbf{r})$ ainsi qu'une expression explicite pour les termes de collisions, la solution de cette équation aux dérivées partielles permet, au moins dans le principe de déterminer la fonction de distribution pour toute position spatiale, \mathbf{r} et toute valeur de l'énergie ϵ . Cela ne peut s'envisager que par une solution numérique pas évidente et il est intéressant de considérer des cas limites que nous présentons dans les sections suivantes.

4.3 Approximation du champ local

L'équation de l'EEDF dans l'espace (\mathbf{r}, ϵ) montre que la fonction de distribution h_0 des électrons dépend de 3 flux d'origines distinctes :

- diffusion des électrons dans l'espace réel sous l'effet du champ de charges d'espace
- diffusion des électrons dans l'espace des énergies due aux champs électrique de chauffage
- diffusion des électrons due aux collisions

A pression suffisamment élevée, les électrons ne diffusent que sur de très petites distances dans l'espace réel, ce qui conduit à négliger le terme de diffusion spatiale par rapport aux 2 autres contributions. Avec cette hypothèse, l'équation de l'EEDF se réduit donc à :

$$\boxed{-\frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[D_{\epsilon} v \frac{\partial h_0}{\partial \epsilon} \right] = v C_0(h_0)}$$

Puisqu'on néglige toute diffusion spatiale des électrons, il est cohérent de négliger également les variations spatiales du potentiel ambipolaire (qui n'existent guère qu'au voisinage des parois, dans les gaines) dans les expressions de D_r et de v . Le potentiel peut donc être considéré comme uniforme, et le choix de l'origine étant arbitraire, on peut supposer que $\phi = 0$ avec pour conséquence que $\epsilon = u$ et $h_0 = g_0$. Dans le cadre de cette approximation l'équation de l'EEDF s'écrit également sous la forme :

$$-\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{2u^{3/2}}{3m\nu_m} (e\mathbf{E}_{\text{heat}})^2 \frac{\partial g_0}{\partial u} \right) = u^{1/2} C_0(g_0)$$

L'éventuelle dépendance de g_0 avec \mathbf{r} est donc implicite et n'apparaît que dans la valeur locale du champ de chauffage $\mathbf{E}_{\text{heat}}(\mathbf{r})$. Autrement dit, l'énergie électrique apporté par le champ de chauffage est dissipée par les collisions *localement*, c'est-à-dire en suivant les (lentes) variations spatiales des champs de chauffage. Ce phénomène de dépôt *local* d'énergie sans transport spatial est à l'origine du nom de cette approximation.

4.3.1 Exemple d'application de l'approximation du champ local

Pour illustrer cette situation, considérons le cas où le champ électrique est suffisamment faible pour que les collisions inélastiques (à seuil) ne contribuent que faiblement. En ne retenant donc que les collisions élastiques, l'EEDF sous l'approximation du champ local s'écrit :

$$-\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{2u^{3/2}}{3m\nu_m} (e\mathbf{E}_{\text{heat}})^2 \frac{\partial g_0}{\partial u} \right) = u^{1/2} C_0^{\text{el}}(g_0)$$

En utilisant l'expression du terme de collisions élastiques obtenu dans le chapitre sur les collisions :

$$C_0^{\text{el}}(g_0) = u^{-1/2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\kappa\nu_m u^{3/2} \left(g_0 + kT_n \frac{\partial g_0}{\partial u} \right) \right)$$

on arrive au fait que l'expression :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[u^{3/2} \left(\frac{2}{3m\nu_m} (e\mathbf{E}_{\text{heat}})^2 \frac{\partial g_0}{\partial u} + \kappa\nu_m kT_n \frac{\partial g_0}{\partial u} + \kappa\nu_m g_0 \right) \right] = 0$$

L'interprétation physique de cette équation est celle d'une conservation du flux total d'énergie dû respectivement aux champs électriques de chauffage et aux contributions de collisions.

Le flux total ne pouvant diverger en $u^{3/2} = 0$ (i.e. en $v = 0$), la constante d'intégration est nulle et l'intégration de l'équation différentielle conduit à la

fonction de distribution de Margenau :

$$g_0(\mathbf{r}, u) = \text{Cte} \exp\left(-\int_0^u \frac{du}{kT_*(u)}\right)$$

où

$$kT_*(\mathbf{r}, u) = kT_n + \frac{2(e\mathbf{E}_{\text{heat}})^2}{3m\kappa\nu_m^2(u)}$$

T_* est donc en général fonction de v et donc de u . Les électrons sont donc toujours plus “chauds” que les neutres et leur “température” est proportionnelle au carré du champ électrique lorsque celui-ci domine la contribution due aux neutres. Comme la fréquence de collision, $\nu_m = n_n\sigma_{en}(v)v$, est proportionnelle à la densité des neutres et donc à la pression, p , on constate que T_e est une fonction du rapport \mathcal{E}/p .

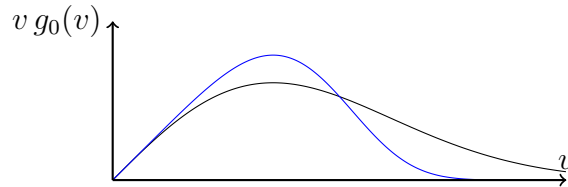
Dans le cas particulier où $\sigma_{en}(v) \propto 1/v$, ν_m est indépendant de v et donc de u , et la fonction de distribution s'identifie alors avec une Maxwellienne de température effective T_* :

$$g_0(\mathbf{r}, u) = \text{Cte} \exp\left(-\frac{u}{kT_*(\mathbf{r})}\right) \quad \left(u = \frac{1}{2}mv^2\right)$$

L'autre cas limite correspond aux cas où la section efficace est indépendante de v . Le carré de la fréquence de collision est alors proportionnelle à v^2 , c'est-à-dire à u et la fonction de distribution est alors très nettement non-Maxwellienne. Par exemple, lorsque la contribution due à la température des neutres est négligeable devant celle due au champ électrique, on trouve aussitôt que :

$$g_0(\mathbf{r}, u) = \text{Cte} \exp\left[-\frac{3}{2}\kappa\left(\frac{u}{e\mathbf{E}_{\text{heat}}\lambda_m}\right)^2\right] \quad \left(u = \frac{1}{2}mv^2\right)$$

où $\lambda_m \equiv (n_n\sigma_{en})^{-1}$ est le libre parcours moyen. Cette fonction est connue sous le nom de *fonction de distribution de Druyvesteyn-Davidov*. Elle est caractérisée par une décroissance plus rapide que celle des Maxwelliennes aux grandes énergies puisque proportionnelle à $\exp(-C(\mathbf{r})v^4)$.



Bien qu'on puisse se douter physiquement que cette approximation locale où la diffusion spatiale est négligée suppose une situation suffisamment collisionnelle, il n'est pas facile de déterminer un critère fiable et précis pour sa validité.

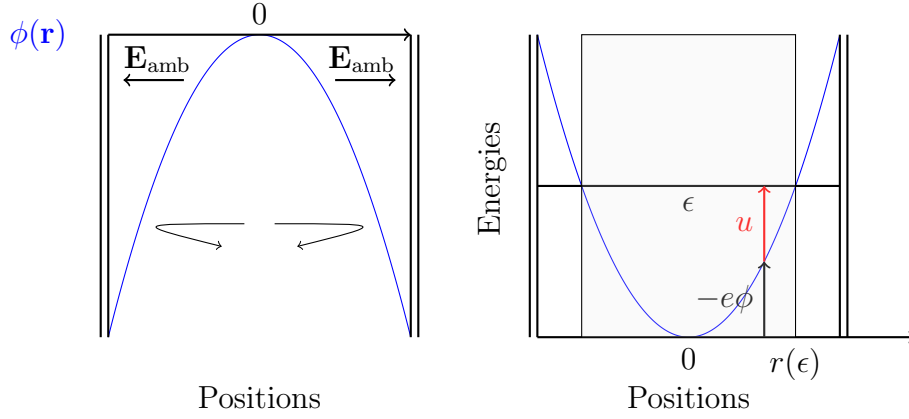


FIGURE 4.1 – Schéma de gauche : le champ ambipolaire confine les électrons les moins énergétiques. Schéma de droite : la zone grisée correspond au volume accessible V_{acc} pour les électrons d'énergie ϵ .

Notons également que la prise en compte (aux plus hautes énergies) des collisions inélastiques peut conduire à des fonctions de distribution qui ne seraient ni Maxwelliennes ni de la forme de Druyvesteyn.

4.4 Approximation non locale

A plus basses pressions, les inhomogénéités spatiales doivent être prises en compte et l'approximation du champ local n'est sûrement plus valable.

Pour apprécier l'effet du terme de diffusion spatiale négligé dans l'approximation locale, commençons par considérer le cas limite où les contributions du chauffage et des collisions seraient négligeables. L'équation de l'EEDF se réduirait alors à l'expression :

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot (-D_r v \nabla_{\mathbf{r}} h_0) \approx 0$$

Dans une situation 1D, cela implique la suite d'égalités :

$$D_r v \frac{dh_0}{dx} = Cte \quad \Rightarrow \quad \frac{dh_0}{dx} = 0,$$

la dernière égalité résultant du fait que dh_0/dx ne doit pas diverger lorsque $v \rightarrow 0$. Sous ces hypothèses, on voit donc que h_0 ne dépendrait pas de la position mais seulement de l'énergie : $h_0(\mathbf{r}, \epsilon) \approx h_0(\epsilon)$. De plus, le potentiel ambipolaire ne détermine pas h_0 qui serait une fonction arbitraire de l'énergie.

La prise en compte des termes de chauffage et de collisions va permettre de lever cette indétermination de h_0 . Dans l'approche dite non-locale, on utilise une approche perturbative en écrivant la fonction de distribution sous la forme

suivante :

$$h_0(\mathbf{r}, \epsilon) \approx h_{00}(\epsilon) + h_{01}(\epsilon, \mathbf{r})$$

où $h_{00}(\epsilon)$ est le terme dominant et $h_{01}(\epsilon, \mathbf{r})$ une perturbation.

En substituant cette expression dans l'équation de l'EEDF, on obtient à l'ordre le plus bas :

$$-\nabla_{\mathbf{r}} \cdot (D_r v \nabla_{\mathbf{r}} h_{01}) - \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[D_\epsilon v \frac{\partial h_{00}}{\partial \epsilon} \right] = v C_0(h_{00})$$

Pour déterminer $h_{00}(\epsilon)$, procédons à la moyenne spatiale de cette équation sur le volume V_{acc} accessible aux électrons dont l'énergie totale maximale ϵ est fixée (cf. figure). Comme $\epsilon = u - e\phi(\mathbf{r})$ et que $u \geq 0$, le volume accessible $V_{\text{acc}}(\epsilon)$ est défini par la condition :

$$\forall \mathbf{r} \in V_{\text{acc}}(\epsilon), \quad \epsilon \geq -e\phi(\mathbf{r})$$

Notons que par utilisation du théorème de Gauss :

$$\int_{V_{\text{acc}}(\epsilon)} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (D_r v \nabla_{\mathbf{r}} h_{01}) d^3 \mathbf{r} = \int_{\partial V_{\text{acc}}(\epsilon)} D_r v \nabla_{\mathbf{r}} h_{01} d^2 \mathbf{r} = 0,$$

puisque $D_r v \propto u^{3/2}$ et que $u \equiv 0$ sur la surface limitant le volume V_{acc} .

La moyenne spatiale de l'équation de diffusion se réduit donc à l'équation :

$$\boxed{-\frac{d}{d\epsilon} \left[\overline{D_\epsilon v \frac{dh_{00}}{d\epsilon}} \right] = \overline{v C_0(h_{00})}}$$

et on pourra remarquer que cette équation à la même forme que celle obtenue dans l'approximation locale, la moyenne spatiale en plus.

Dans cette expression, la moyenne de toute fonction $f(\mathbf{r})$ est définie par :

$$\overline{f(\mathbf{r})} \equiv \frac{1}{V} \int_{V_{\text{acc}}(\epsilon)} f(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}$$

où V est le volume total de la décharge, et où on n'oubliera pas dans ces expressions que u ainsi que les fonctions de u comme par exemple les fréquences de collisions, sont des fonctions de \mathbf{r} , puisque $u(\mathbf{r}) = \epsilon + e\phi(\mathbf{r})$.

L'EEDF non-locale traduit le fait que tout échange d'énergie reçue *localement* par les électrons du champ de chauffage ou des collisions, est redistribuée *non localement* à basse pression, c'est-à-dire dans tout le volume accessible de la décharge, du fait de la diffusion spatiale rapide des électrons.

4.4.1 Exemple d'application de l'approximation non locale

A titre d'illustration, comparons le résultat de l'approximation non locale avec celui étudié plus haut dans le cadre de l'approximation locale, c'est-à-dire lorsqu'on ne retient que les collisions élastiques électron-neutre pour un plasma infiniment long, de rayon R , chauffé par un champ effectif \mathbf{E}_{heat} supposé uniforme.

Dans ce cas particulier, le terme de collision s'écrit sous la forme ($v = (2u/m)^{1/2}$) :

$$\overline{u^{1/2} C_0^{el}(h_{00})} = \frac{d}{d\epsilon} \left(\overline{\kappa \nu_m u^{3/2}} \left(h_{00} + kT_n \frac{dh_{00}}{d\epsilon} \right) \right)$$

L'EEDF non-locale s'écrit donc :

$$\frac{d}{d\epsilon} \left[\overline{D_\epsilon u^{1/2}} \frac{dh_{00}}{d\epsilon} + \overline{\kappa \nu_m u^{3/2}} \left(h_{00} + kT_n \frac{dh_{00}}{d\epsilon} \right) \right] = 0 \quad (4.1)$$

Pour fixer les idées, supposons que le potentiel soit parabolique : $\phi(r) = -\phi_0 r^2/R^2$. L'énergie totale s'écrira donc :

$$\epsilon = u + e\phi_0 \frac{r^2}{R^2}$$

où R est le rayon de la décharge. Le rayon-limite $r_{\text{acc}}(\epsilon)$ correspondant au volume accessible est déterminé par la relation $u = 0$, soit encore, $r_{\text{acc}}(\epsilon) = R(\epsilon/e\phi_0)^{1/2}$. Pour calculer les moyennes spatiales, il nous faut encore faire une hypothèse sur la dépendance en vitesse de la section efficace. Supposons que celle-ci soit de type sphère dure, on en déduit que $\nu_m = n_n \sigma_{en} (2u/m)^{1/2}$.

Etablir le résultat :

$$\overline{u^n} = \frac{1}{e\phi_0} \frac{\epsilon^{n+1}}{n+1}$$

En remplaçant dans l'équation de l'EEDF, et en introduisant le libre parcours moyen, $\lambda_m \equiv (n_n \sigma_{en})^{-1}$, on obtient :

$$\frac{d}{d\epsilon} \left\{ \frac{\epsilon^2}{e\phi_0} \left[\frac{\kappa\epsilon}{3\lambda_m} h_{00} + \left(\frac{(e\mathbf{E}_{\text{heat}}\lambda_m)^2}{6\lambda_m} + \frac{\kappa kT_n \epsilon}{\lambda_m} \right) \frac{dh_{00}}{d\epsilon} \right] \right\} = 0$$

La constante d'intégration est nulle, faute de quoi l'expression entre crochets divergerait lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

Restreignons-nous au cas où la contribution due à la température des atomes est négligeable devant la contribution due au champ. Dans ce cas, on trouve aussitôt que h_{00} prend la forme suivante :

$$h_{00}(\epsilon) = \text{Cte} \exp \left[-\kappa \left(\frac{\epsilon}{e\mathbf{E}_{\text{heat}}\lambda_m} \right)^2 \right]$$

Comme $h_{00}(\epsilon) = g_{00}(\mathbf{r}, u)$, l'expression de la fonction de distribution dans l'espace position-énergie cinétique est :

$$g_{00}^{\text{NL}}(\mathbf{r}, u) = \text{Cte} \exp \left[-\kappa \left(\frac{u - e\phi(r)}{e\mathbf{E}_{\text{heat}}\lambda_m} \right)^2 \right]$$

Il est intéressant de comparer cette fonction de distribution, g_{00}^{NL} , obtenue dans le cadre de l'approximation non-locale, avec celle obtenue plus haut, dans le cadre de l'approximation locale, g_0^{L} , dont on rappelle l'expression :

$$g_0^{\text{L}}(\mathbf{r}, u) = \text{Cte} \exp \left[-\frac{3}{2}\kappa \left(\frac{u}{e\mathbf{E}_{\text{heat}}\lambda_m} \right)^2 \right]$$

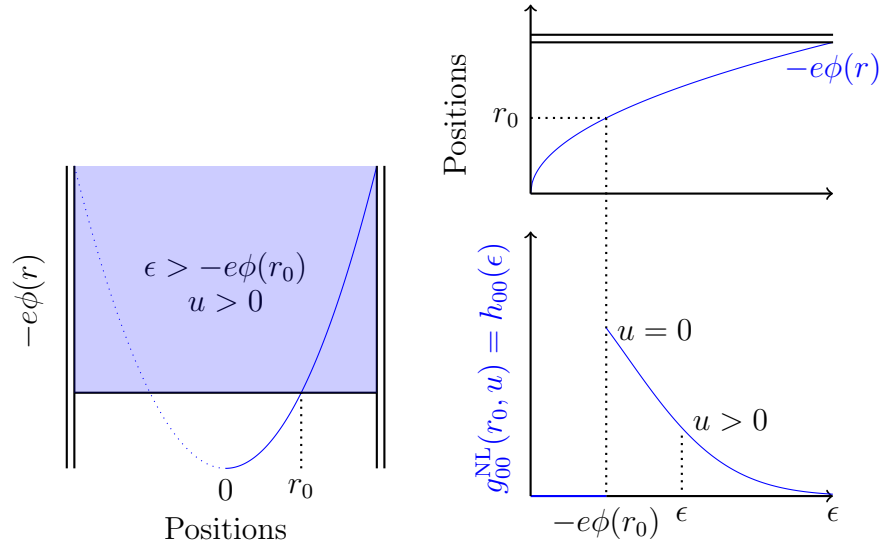


FIGURE 4.2 – La fonction de distribution non-locale présente une coupure aux basses énergies

On peut faire les remarques suivantes :

1. Ce sont toutes 2 des fonctions de type Druyvensteyn mais la distribution non-locale décroît un peu moins vite que la distribution locale : l'effet du champ de charge d'espace est donc d'augmenter la proportion des électrons de hautes énergies, ce qui tendra à faire augmenter l'ionisation.
2. En présence d'un champ électrique uniforme, la fonction de distribution locale est indépendante de la position mais la fonction de distribution non-locale dépend encore de la position par une translation correspondant au potentiel ambipolaire.

3. En $r = r_0$, seuls les électrons d'énergie $\epsilon \geq -e\phi(r_0)$ ($u = \epsilon + e\phi(\mathbf{r}_0) \geq 0$) contribuent à la fonction de distribution $g_{00}^{\text{NL}}(\mathbf{r}_0, u)$: la fonction de distribution non-locale présente une coupure aux basses énergies (cf. figure).

Sous cette approximation non locale, on peut calculer la densité à partir de l'intégrale :

$$n(\mathbf{r}) = 2\pi \left(\frac{2}{m}\right)^{3/2} \int_0^{+\infty} g_{00}^{\text{NL}}(\mathbf{r}, u) u^{1/2} du$$

Le calcul ne se réduit clairement pas une relation de Boltzmann, $n(\mathbf{r}) = n_0 \exp(e\phi(\mathbf{r})/kT_e)$, couramment utilisée pour décrire les électrons dans le cadre des modélisations fluides. On dit parfois que l'approximation non-locale conduit à des *relations de Boltzmann généralisées*.