

INTRODUCTION AUX PLASMAS

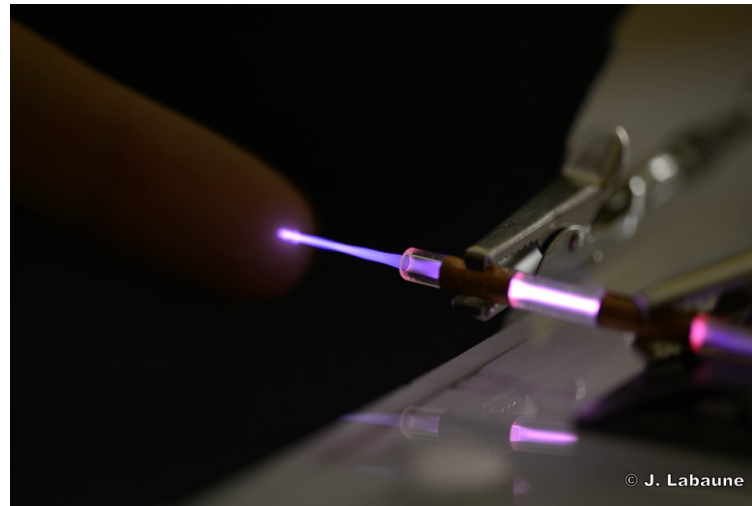
Cyrille Honoré cyrille.honore@polytechnique.edu

Laboratoire de Physique des Plasmas

CNRS – SU – UPSud – ObsPM,

École Polytechnique – IPParis

91128 Palaiseau cedex, France



SORBONNE
UNIVERSITÉ



Plan

- 1 Qu'est-ce qu'un plasma ?
- 2 Diversité des plasmas
- 3 Quelques propriétés des plasmas

Version la plus récente :

<https://ao.lpp.polytechnique.fr/index.php/s/4bhS3LYENZ36gTI>

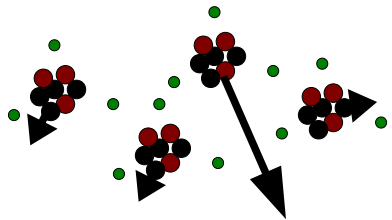
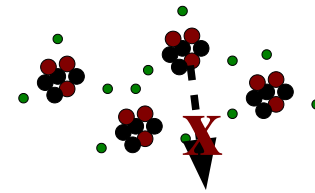
ou <http://bit.ly/2L4xBXv>

mot de passe : fusion2017

Plasma : 4ème état, le plus chaud de la matière

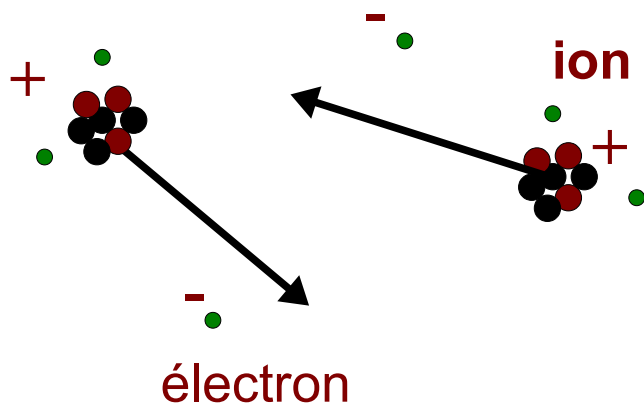
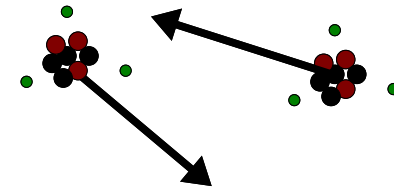
États de la matière :

À très faible température, les atomes ne peuvent bouger les uns par rapport aux autres : elle est solide.



Quand on apporte de l'énergie, les atomes ou molécules peuvent bouger les uns par rapport aux autres : la matière est liquide.

Quand on apporte encore de l'énergie, les atomes ou molécules peuvent bouger librement : état de **gaz**.



Quand l'énergie apportée est suffisante pour que une partie **des électrons deviennent libres** de molécules : la matière est un **plasma**.

L'énergie de liaison des électrons $q_e U_{ionis}$ est de l'ordre de d'une dizaine d'électron-volt : la température à atteindre est de l'ordre de la centaine de milliers de Kelvin.

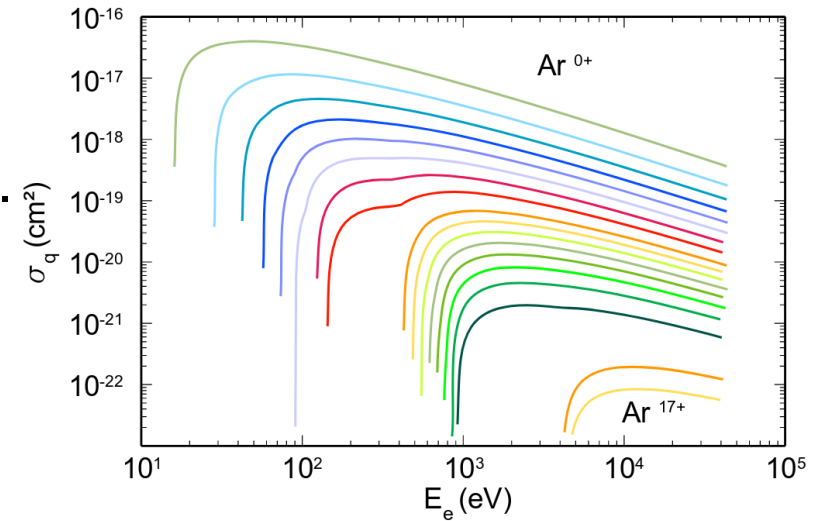
$$q_e U_{ionis} > 10 eV$$

$$k_B T > 100\,000 K$$

Plasmas et décharges électriques

La chaleur n'est pas l'unique moyen de produire un plasma : une décharge électrique peut aussi y parvenir.

L'ionisation est la réaction endothermique, qui permet de transformer une molécule neutre en un ion chargé.



La réaction réciproque est la recombinaison. Elle est beaucoup moins probable.

L'électron ionisant doit avoir une énergie au moins de l'ordre d'une dizaine d'eV :

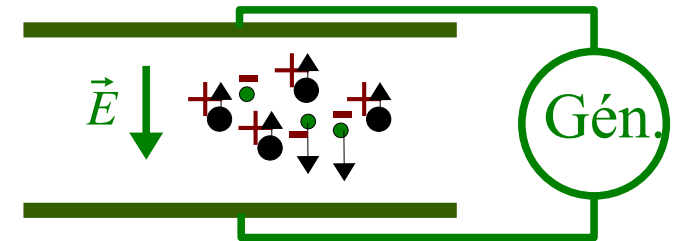
l'énergie de liaison dépend de la structure électronique autour de la molécule.

La réaction endothermique produisant 2 électrons, elle pourra produire d'autres réactions en chaîne à condition de redonner de l'énergie aux électrons.

Cette énergie peut être apportée par un champ électrique extérieur, sous forme de **décharge**.

La décharge peut être produite :

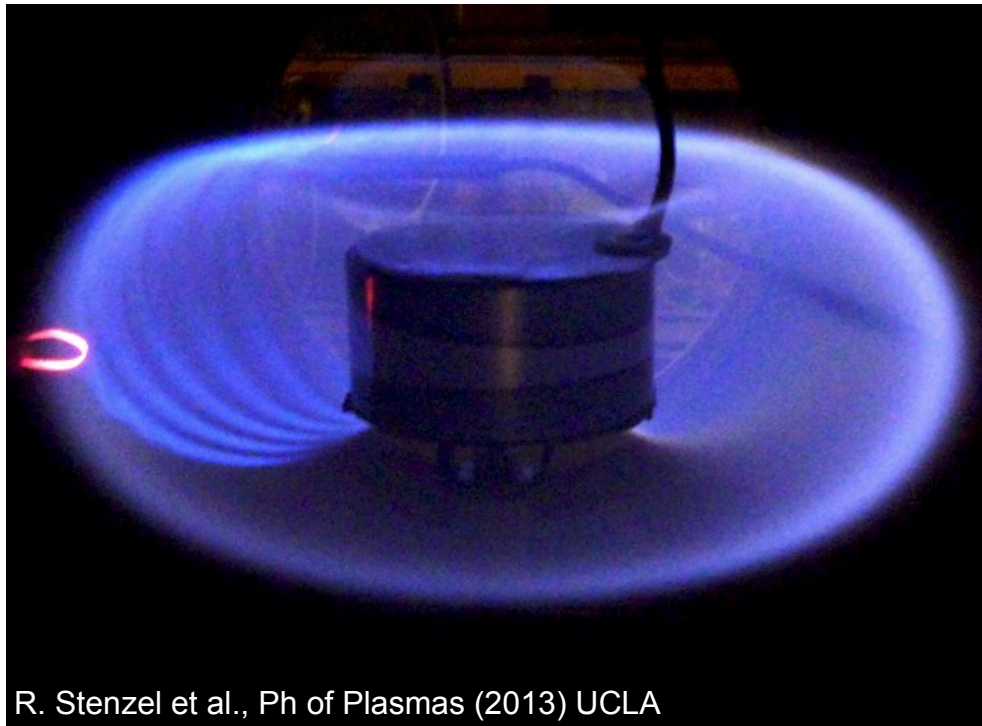
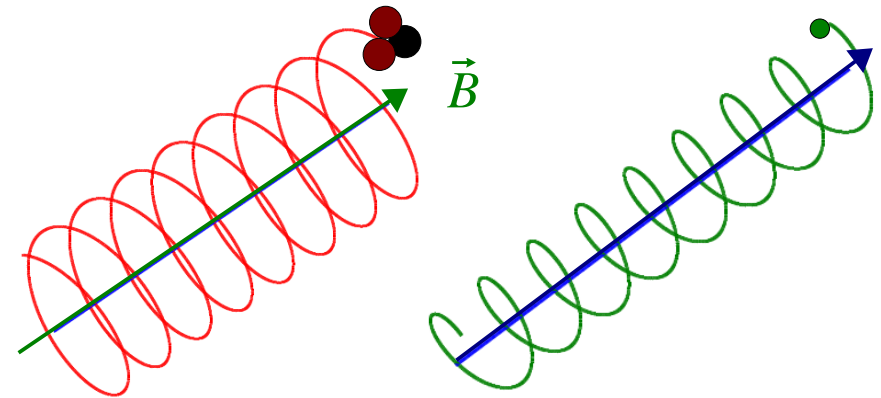
- par une **cathode émissive**,
- par un **champ électrique** (DC ou AC),
- ou par des **ondes électromagnétiques** (RF, micro-ondes, UV...).



Plasmas magnétisés

La présence d'un champ magnétique modifie de manière importante la dynamique des particules :

- le mouvement parallèle au champ est inchangé,
- **le mouvement perpendiculaire est réduit au mouvement cyclotron..**



R. Stenzel et al., Ph of Plasmas (2013) UCLA

Une **mobilité** perpendiculaire est possible :

- par **collisions** entre particules,
- **dérives** dues à la présence d'autres forces (champ électrique...),
- ou par diffusion due à la présence d'instabilités ou de turbulence.

Plasma créé par une cathode émissive d'électron à 100 eV, plongée dans un champ magnétique créé par un dipôle magnétique polarisé électriquement.

Plan

- **1 Qu'est-ce qu'un plasma ?**
- **2 Diversité des plasmas**
 - **Plasmas spatiaux**
 - **Plasmas chauds de laboratoire**
 - **Plasmas froids de laboratoire**
 - **Plasmas industriels**
- **3 Quelques propriétés des plasmas**

Plasmas : 99% de la matière connue

- **Cœur des étoiles :**

Le cœur des étoiles dense et chaud à cause de la gravité et de l'énergie produite par la fusion.

- **Couronne solaire :**

La matière est confinée dans la couronne par le champ magnétique solaire.

- **Vent solaire :**

Des jets de particules parviennent à s'échapper de la couronne solaire en direction entre autres, de la Terre.

- **Ionosphère (100 à 300 km d'altitude)**

l'interaction du vent solaire sur l'atmosphère, l'ionise partiellement en altitude.

- **Nébuleuses en émission**

chauffées par des photons émis par une étoile jeune à proximité, ou résidus d'une supernova.

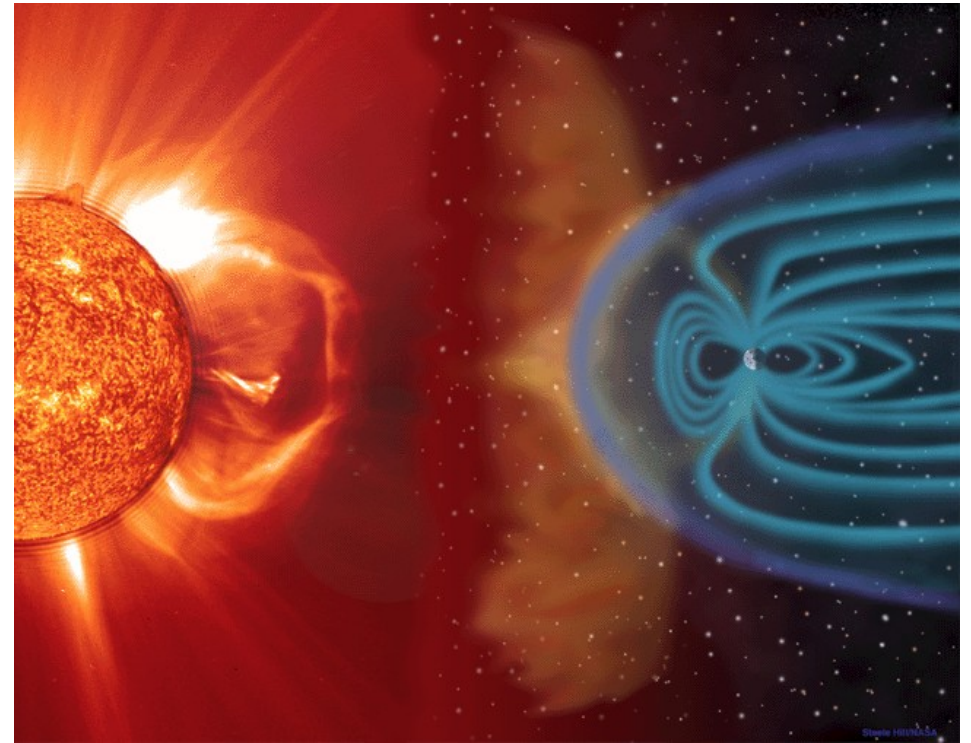
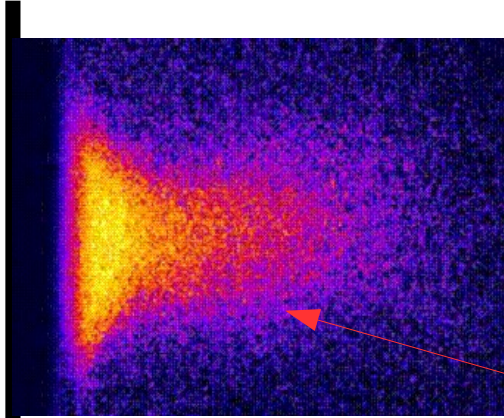


Photo depuis la navette, NASA



Nébuleuse du cygne, NASA

La fusion nucléaire en laboratoire : confinement inertiel



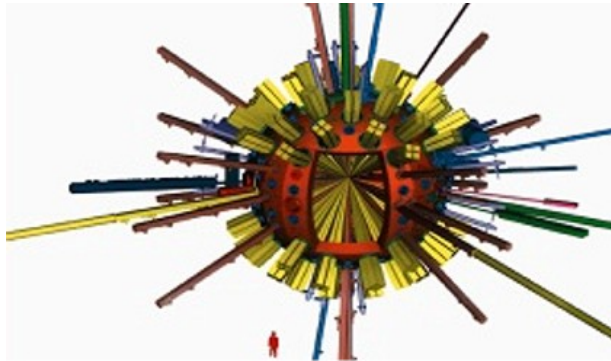
laser impulsionnel intense :
1 kJ, 10ns ou 1 mJ, 1 fs



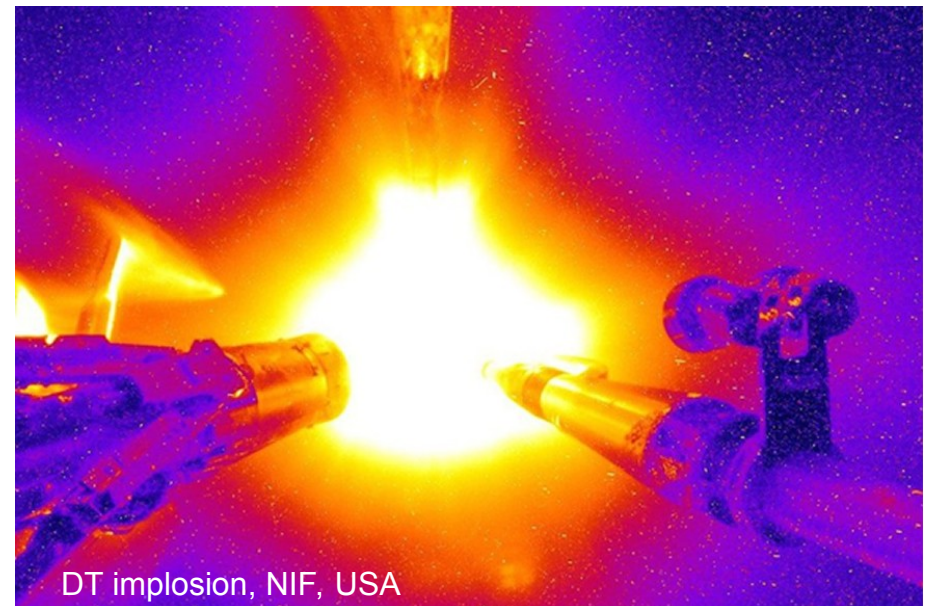
création de matière dense et chaude

Cible solide

L'énergie d'une impulsion laser nanoseconde (voire femtoseconde) se dépose sur un temps très court sur un petit volume de matière qui peut atteindre des températures très élevées (10^6 K).

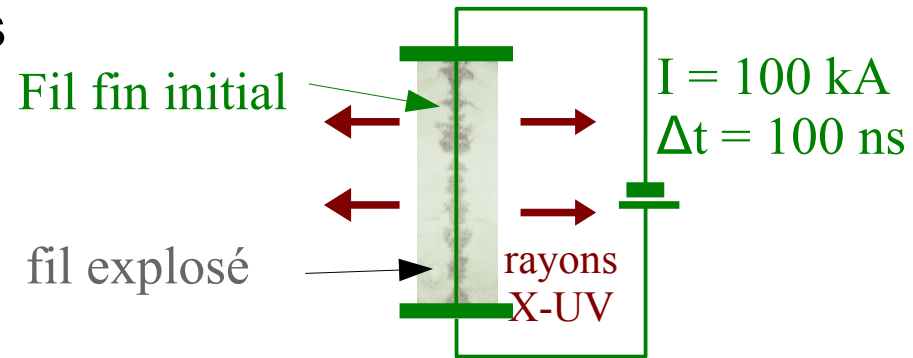


En concentrant plusieurs centaines de faisceaux laser sur une cible de 1g d'isotopes de l'hydrogène (D,T), on peut reproduire les conditions de la fusion thermonucléaire.



Plasmas chauds par décharges impulsives

Décharge « z-pinch » : courant très intense sur un temps très court ; production à haute puissance de rayons X et UV.



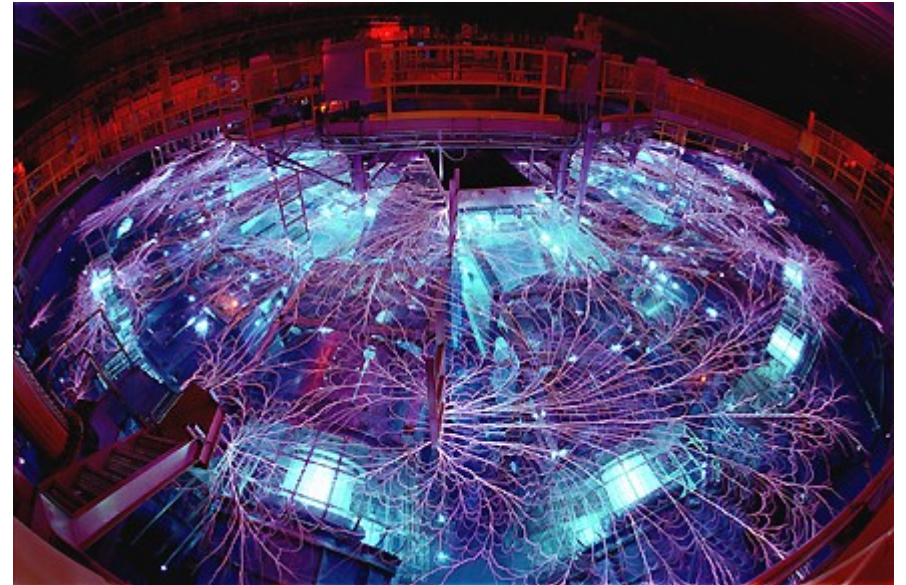
Z machine (Sandia, Albuquerque, NM):

Courant impulsif

$I = 18 \text{ MA}$ en $dt = 100 \text{ ns}$

Puissance de rayons X : $P = 300 \text{ TW}$

Température atteinte : $3 \cdot 10^9 \text{ K}$



Fusion nucléaire par confinement magnétique

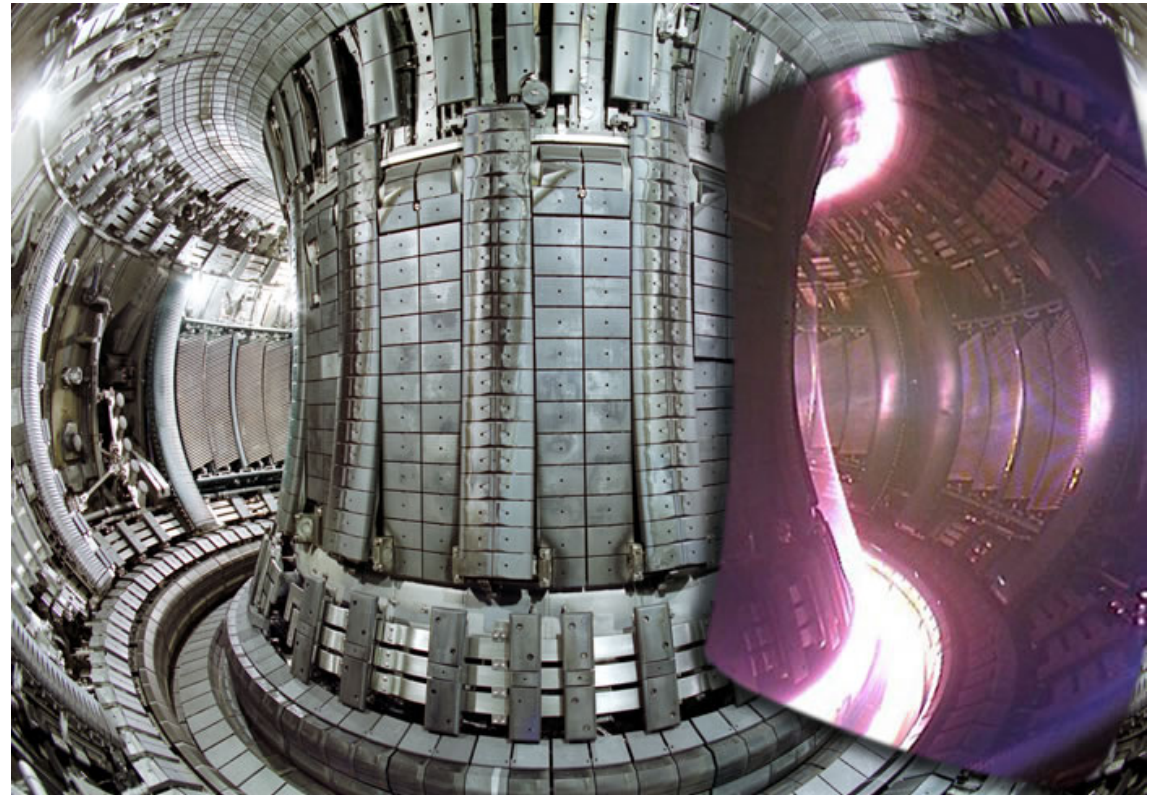
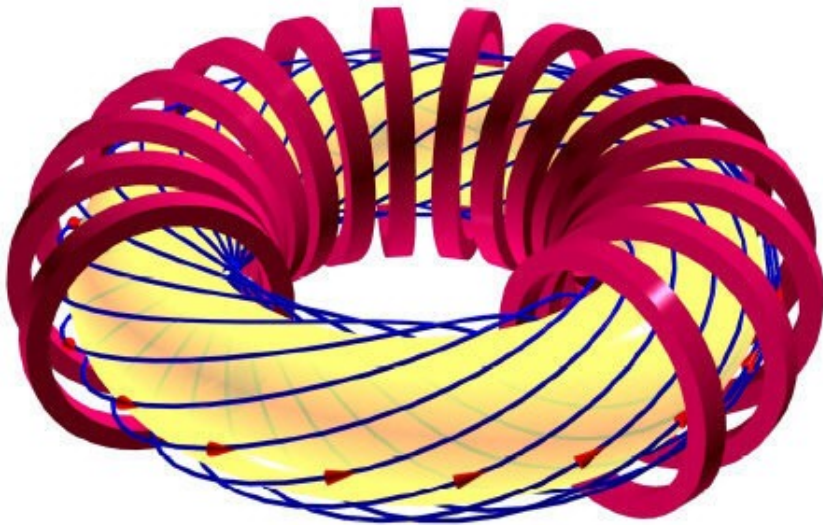
Il est possible d'atteindre en laboratoire les conditions de la fusion nucléaire. Le but est de produire de l'électricité à partir de cette réaction exothermique.

La densité électronique au cœur du plasma est de $n_e = 10^{20} m^{-3}$

La température ionique est de $T_i = 100 \cdot 10^6 K$.

L'enceinte a une forme d'anneau.

Ces conditions sont atteintes grâce la présence d'un champ magnétique qui suit la forme torique de l'enceinte.



Plasmas froids : ionisation partielle

Un plasma n'est pas nécessairement complètement ionisé.

Taux d'ionisation :
$$\alpha = \frac{n_e}{n_e + n_n}$$

n_e : densité électronique

n_n : densité de neutres

A l'équilibre thermodynamique, l'ionisation est contrebalancée par la recombinaison.

Le taux d'ionisation est fonction de la densité, de la température et de l'énergie d'ionisation. L'équilibre est décrit par l'équation de Saha

Pour l'hydrogène atomique :

$$\frac{n_e^2}{n_n} = \frac{1}{\lambda_{eth}^3} e^{\frac{-E_i}{k_B T_e}}$$

T_e : température électronique

E_i : énergie de liaison de l'électron

λ_{eth} : longueur d'onde thermique de de Broglie de l'électron :
$$\lambda_{eth} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m_e k_B T_e}}$$

Si l'équilibre n'est pas atteint, l'ionisation sera inférieure à cette valeur.

L'ionisation est très faible si $k_B T_e \ll E_i$

Un plasma apparaîtra quand la température électronique sera de l'ordre de $k_B T_e \sim E_i / 10$

Pour un plasma de laboratoire, typiquement : $k_B T_e > 1 \text{ eV}$ $T_e > 10^4 \text{ K}$

Le taux d'ionisation est relativement faible : $10^{-5} < \alpha < 10^{-1}$

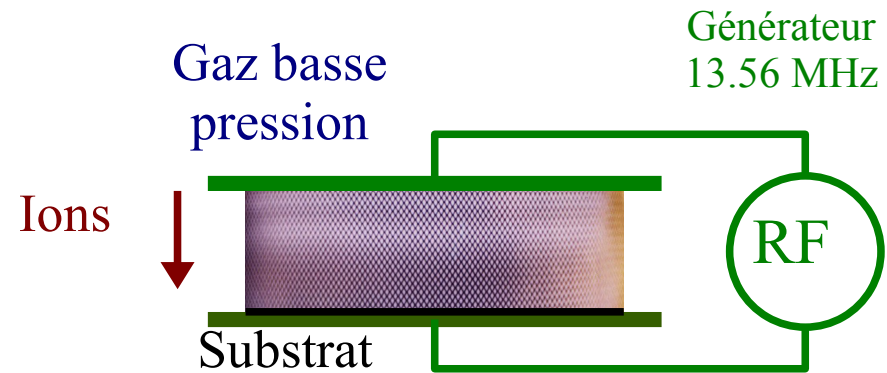
Les ions et les neutres interagissent peu avec les électrons : ils restent à température ambiante : $T_i \sim T_n \sim 300 \text{ K}$

Décharges basse pression de laboratoire

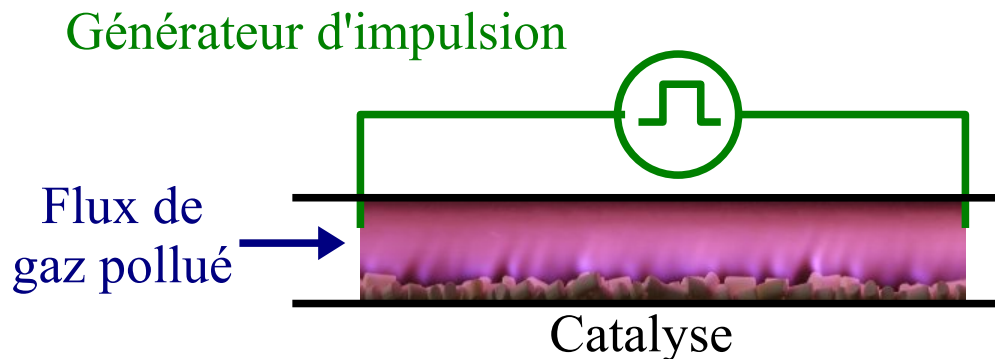
Plasmas de gravure et dépôt pour la micro-électronique :

Le champ électrique généré dans le réacteur accélère les ions vers le substrat.

Les réacteurs sont de différents types (capacitifs, inductifs, hélicon...).

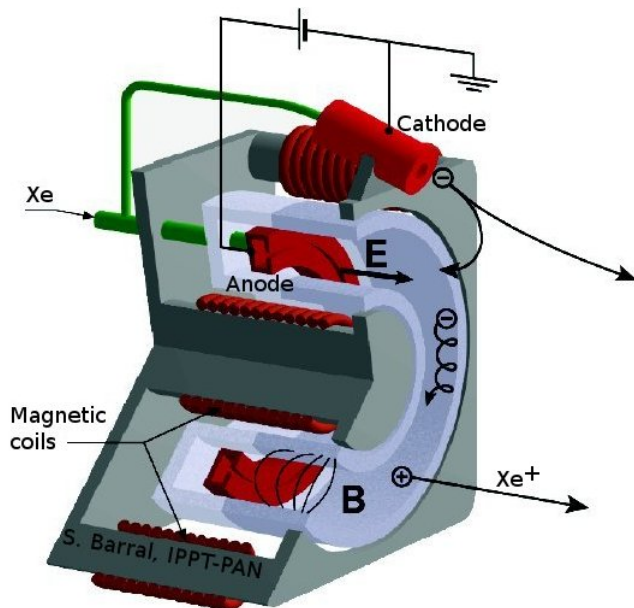
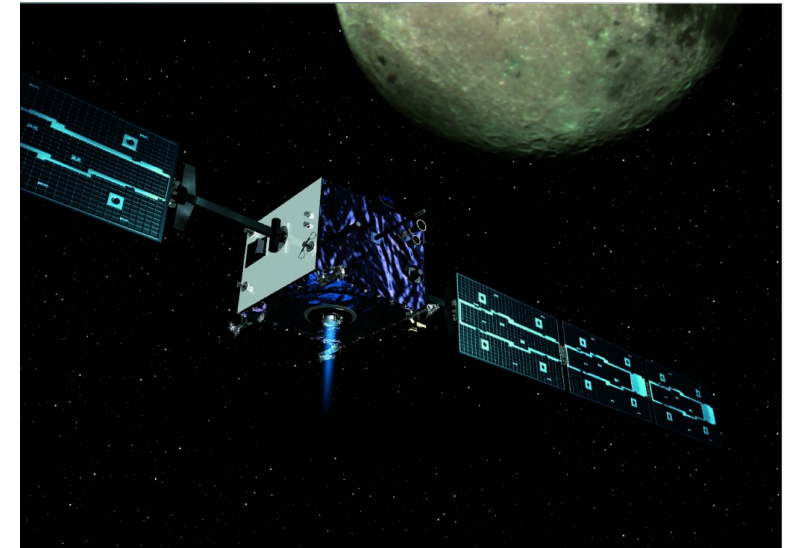
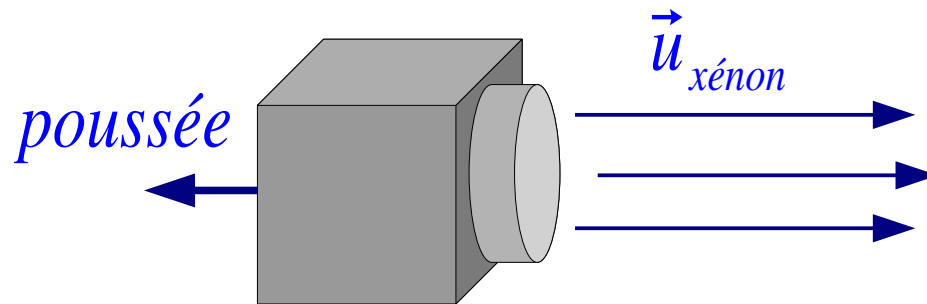


Plasmas pour la dé-pollution :
on cherche à éliminer les polluants par des réactions chimiques.
Le couplage plasma-catalyse permet une meilleure efficacité même à basse température.



Propulsion ionique

Dans l'espace, une poussée est obtenue en expulsant de la matière. L'efficacité de la poussée est proportionnelle à la vitesse des particules expulsées : elle est de l'ordre de 10 km/s pour les propulseurs à plasma.



Le propulseur à effet Hall permet des poussées faibles, mais très économes en matière :

Une tension de 300 V est mise entre une cathode extérieure et une anode en fond de canal. Le gaz xénon éjecté par l'anode est ionisé par les électrons venant de la cathode.

La présence d'un champ magnétique en sortie de canal permet de localiser dans cette zone, le champ électrique produit par la tension continue.

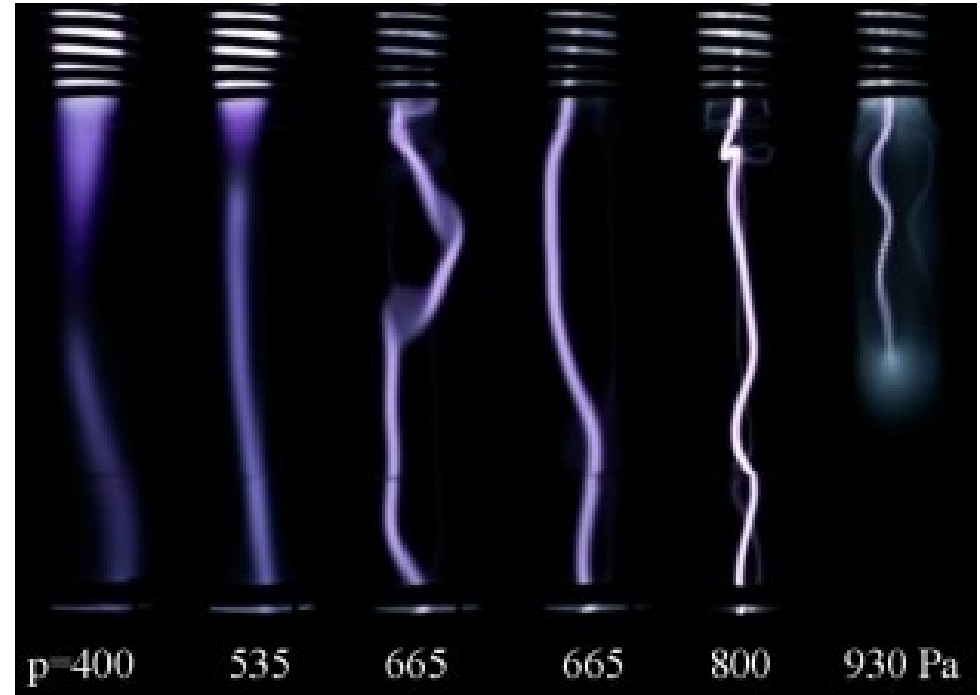
Les ions xénon atteignent des vitesses de l'ordre de 10 km/s.

Décharges à pression atmosphérique

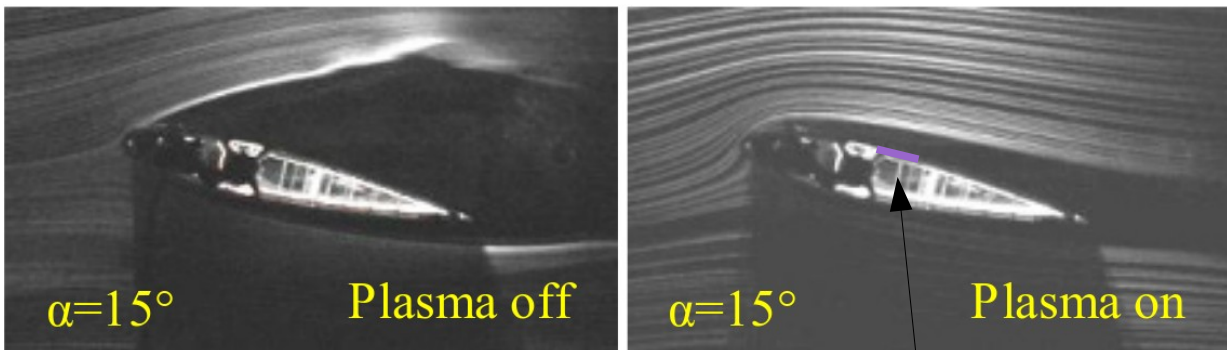
A haute pression de gaz, le plasma change de comportement. Plus la pression est haute, plus le plasma est filandreux.

- Arcs électriques (DC) : éclairs.
- Décharges AC (décharges coronale, décharges à barrière diélectrique).
- Jet à plasma (DC ou RF).

Décharges à barrière diélectrique (DBD) :
Elles évitent la forme filandreuse du plasma.
Elles sont capables de contrôler un écoulement aérodynamique à pression atmosphérique.

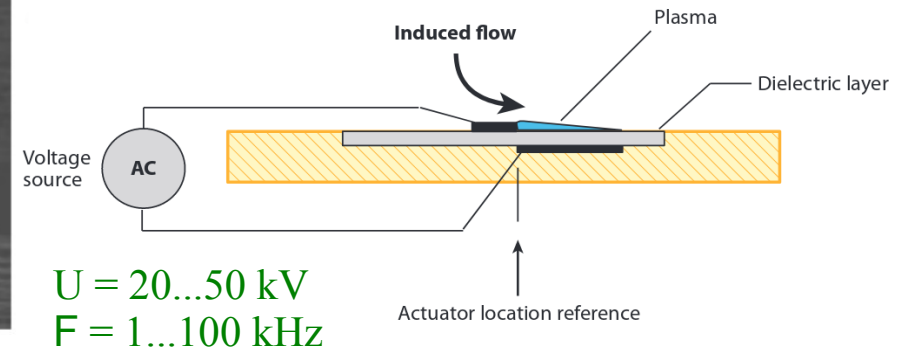


P. Boubert et al., Coria, plasmas.free.fr



Y. Akansu et al., Web of Conf. (2013)

DBD



T. Corke et al., Ann. Rev Fluid Mech. (2010)

Plasmas pour la médecine

L'application des plasmas pour la médecine est un domaine de recherches en développement.

Plasmas pour **traitement direct** :

- jets plasmas (continus ou impulsionnels) :
 - diamètre : quelques mm,
 - longueur : plusieurs dizaines de cm,
- décharges à barrière diélectrique.

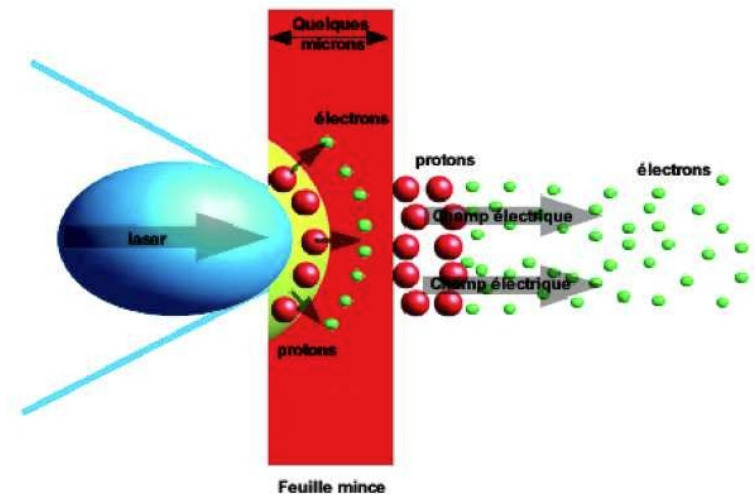
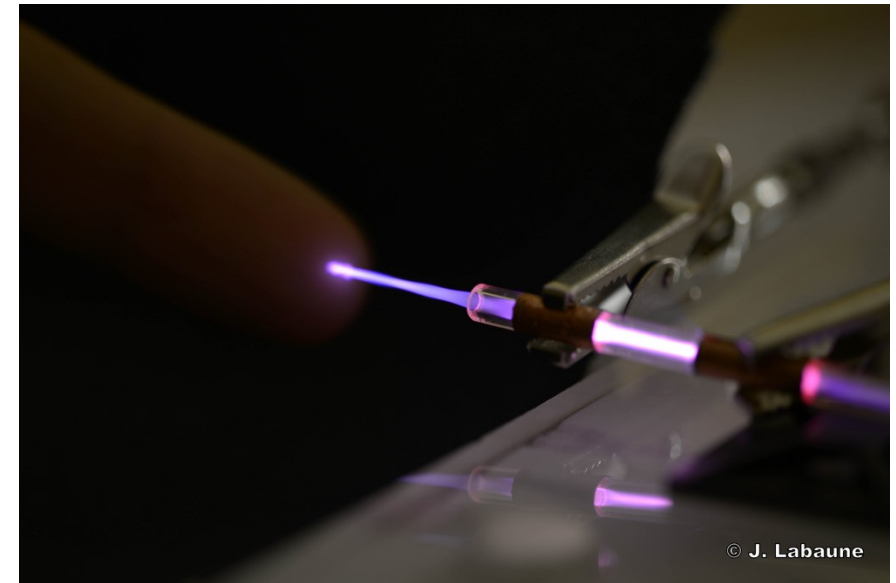
Applications :

- désinfection,
- cicatrisation de la peau,
- traitement des cancers.

Plasmas utilisés comme **sources de rayonnement** utilisées pour le traitement et le diagnostic.

- rayonnement UV, X...
- accélération de proton par laser impulsionnel pour la protonthérapie (traitement des cancers).

...

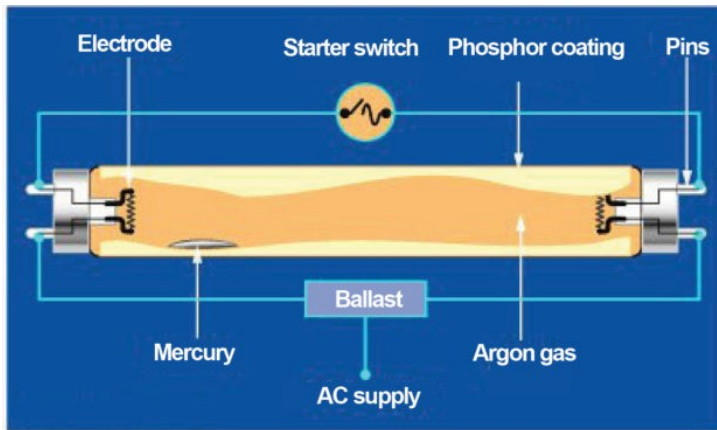
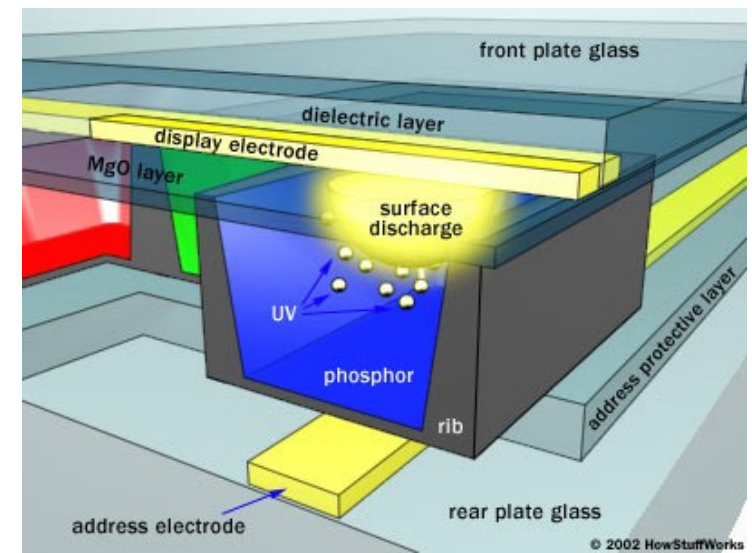


Plasmas issus de l'industrie



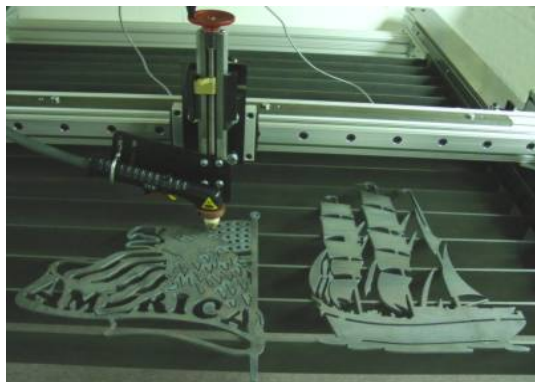
1^{er} écran à plasma, Fujitsu (1995)

Écrans à plasmas :
la lumière est produite par une décharge à barrière diélectrique.

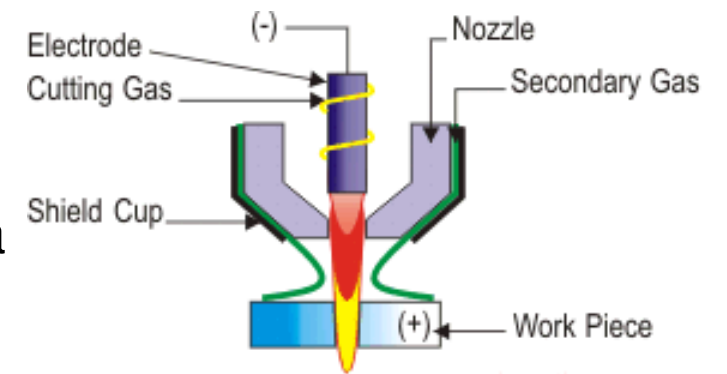


EE Publishers (2017)

Lampes fluorescentes :
La lumière est produite par une décharge AC dans un gaz rare. La lumière UV produite est transformée en lumière visible par une couche de phosphore



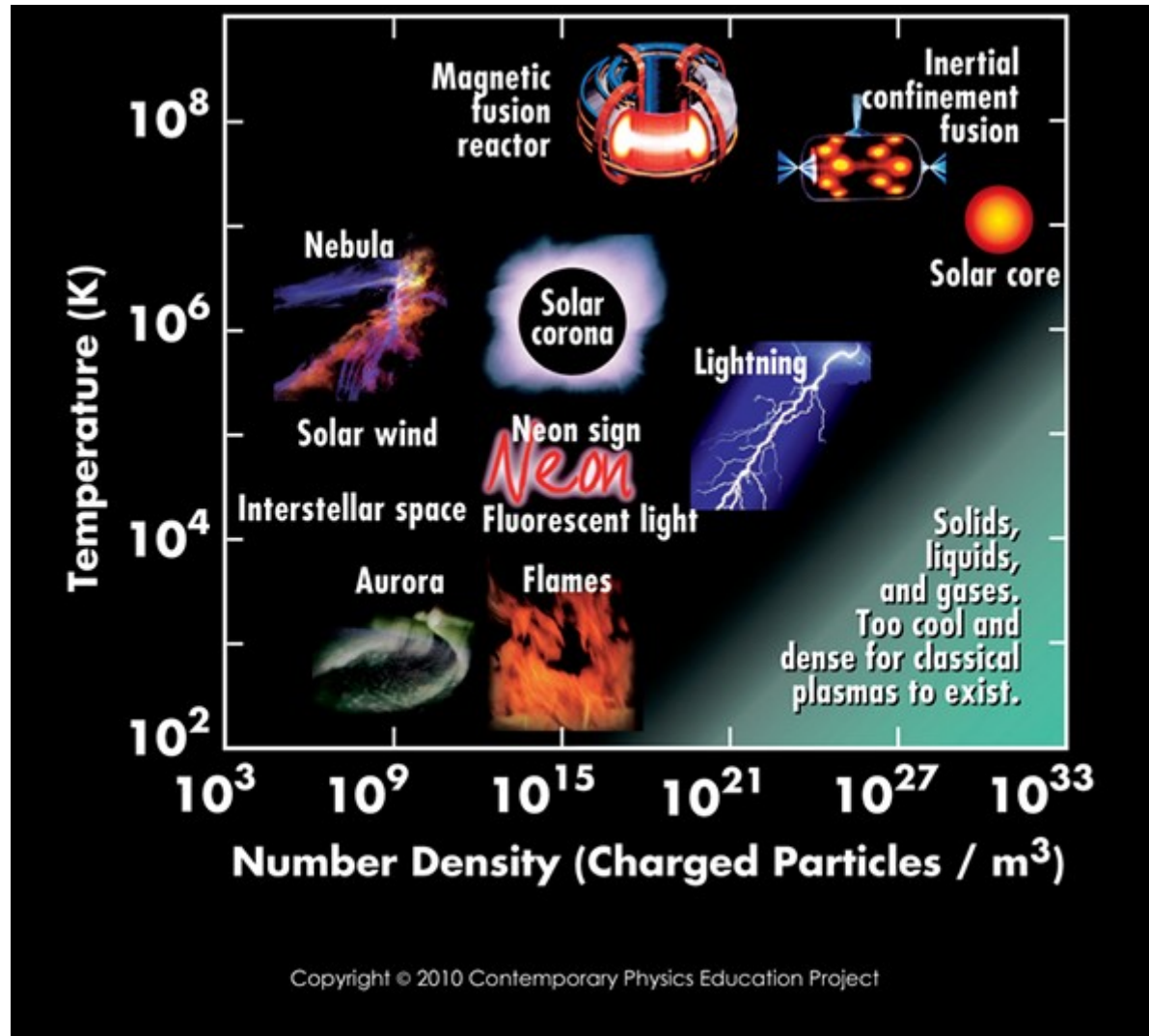
Découpe par plasma
La découpe est obtenue par un jet à plasma. La matériau découpé sert de seconde électrode.



Azom.com™

Diversité des plasmas

Les plasmas prennent des formes très diverses en fonction de leur densité de charge ou de leur température électronique.



Ordres de grandeurs :
température électronique :

$$k_B T_e > 1 \text{ eV} \Leftrightarrow 10^4 \text{ K}$$

air ambiant :

$$n_n \sim 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

eau liquide ou solide :

$$n_n \sim 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

Plan

- **1 Qu'est-ce qu'un plasma ?**
- **2 Diversité des plasmas**
- **3 Quelques propriétés des plasmas**
 - **La longueur de Debye**
 - **Rôle des collisions**
 - **La fréquence plasma**
 - **Description particulière, cinétique et fluide**
 - **L'amortissement Landau**

Longueur de Debye et séparation des charges

Sur quelle distance les charges positives et négatives peuvent-elles être séparées ?
On suppose une géométrie « slab » (en dalles) : le plasma est homogène suivant 2 directions ; les paramètres varient suivant la 3ème direction.

Le plasma est composé d'électrons ($-q_e$) et d'ions (q_e).

Le plasma n'est plus neutre sur une épaisseur d : $n_i = (1 - \delta)n_e$

$\delta = 1$: séparation totale de charges; $\delta = 0$: neutralité. $n_e - n_i = \delta n_e$

La charge par unité de surface de la tranche négative est : $q = d(n_i - n_e)q_e = -d\delta n_e q_e$

Le champ par unité de surface électrique produit par cette tranche est alors :

$$E = \frac{-1}{\epsilon_0} d \delta n_e q_e$$

La force électrique par unité de surface entre les tranches positive et négative :

$$F = -q E = -\frac{1}{\epsilon_0} d^2 \delta^2 n_e^2 q_e^2$$

L'énergie potentielle par unité de surface nécessaire pour séparer les charges :

$$E_q = d |F| = \frac{1}{\epsilon_0} d^3 \delta^2 n_e^2 q_e^2$$

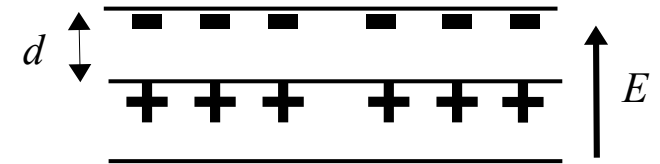
L'énergie cinétique interne par unité de surface pour les électrons :

$$E_i = d n_e k_B T_e$$

L'énergie potentielle ne pourra excéder l'énergie cinétique disponible :

L'épaisseur de séparation est limitée :

$$|E_q| \leq |E_i| \Rightarrow d \leq \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e q_e^2}}$$



Longueur de Debye et quasi-neutralité du plasma

L'épaisseur de séparation de charges est limitée :

$$d \leq \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e q_e^2}}$$

$$n_e - n_i = \delta n_e$$

Elle fait apparaître une longueur caractéristique du plasma : la longueur de Debye électronique :

$$\lambda_{De} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e q_e^2}}$$

Pour un plasma de densité et température électroniques : $n_e = 10^{17} \text{ m}^{-3}$ $T_e = 2 \text{ eV}$

La longueur de Debye électronique vaut : $\lambda_{De} = 33 \text{ } \mu\text{m}$

Quasi-neutralité : plus l'échelle sera grande, plus le plasma paraîtra neutre :

La séparation totale de charges ($\delta = 1$) n'est possible que sur la longueur de Debye λ_{De}

La séparation partielle de charges dépend de l'épaisseur : $\delta \leq \lambda_{De} / d$

Pour ce plasma, sur une échelle de : $d = 1 \text{ cm}$

La séparation de charge maximale est : $\delta \leq 3.3 \cdot 10^{-3}$

La longueur de Debye est propre à chaque espèce ; pour les ions : $\lambda_{Di} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_i}{n_i q_e^2}}$

Les dynamique des ions et des électrons sont fortement liées par la force électrique.

Écrantage de Debye des ions par les électrons

Le potentiel électrostatique dû à un ion a un effet à longue distance : il n'y a pas de longueur caractéristique :

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e}{r}$$

Les électrons ont alors pour énergie potentielle :

$$E_p = -q_e \phi(r)$$

On suppose qu'ils atteignent un équilibre de Boltzmann.

Leur température T_e est homogène. Leur densité à longue distance est $n_{e\infty}$ ($\phi_\infty = 0$).

$$n_e(r) = n_{e\infty} e^{\frac{-E_p(r)}{k_B T_e}} = n_{e\infty} e^{\frac{q_e \phi(r)}{k_B T_e}}$$

La densité électronique sera plus forte à proximité de l'ion.

Le potentiel sera modifié par la réaction des électrons qui « écrantent » l'ion.

Le problème doit être étudié d'un point de vue collectif.

On suppose la densité ionique homogène : $n_i = n_{e\infty}$

Le potentiel suit l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{-q_e}{\epsilon_0} (n_i - n_e(r))$$

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{-\rho}{\epsilon_0}$$

Le problème est simplifié en problème 1D (on suppose les quantités uniformes dans les 2 autres directions) :

$$\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) = q_e \frac{n_{e\infty}}{\epsilon_0} \left(e^{\frac{q_e \phi(r)}{k_B T_e}} - 1 \right)$$

Écrantage de Debye

L'équation sur le potentiel de l'ion écranté par les électrons :

$$\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) = \frac{q_e n_{e\infty}}{\epsilon_0} \left(e^{\frac{q_e \phi(r)}{k_B T_e}} - 1 \right)$$

On suppose des variations faibles de potentiel, $q_e \phi(r) \ll k_B T_e$:

$$e^{\frac{q_e \phi(r)}{k_B T_e}} = 1 + \frac{q_e \phi(r)}{k_B T_e}$$

L'équation se linéarise :

$$\frac{d^2}{dr^2} \phi(r) = \frac{q_e^2 n_{e\infty}}{\epsilon_0 k_B T_e} \phi(r)$$

Avec la contrainte $\phi(r) \rightarrow_{r \rightarrow \infty} 0$, le potentiel a pour forme :

$$\phi(r) = \phi_0 e^{\frac{-|r|}{\lambda_{De}}}$$

$$\lambda_{De} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_{e\infty} q_e^2}}$$

Alors que le potentiel de l'ion non écranté décroît en loi de puissance $\phi(r) \propto 1/r^2$,
Le potentiel de l'ion écranté par les électrons décroît exponentiellement.
La distance caractéristique est la longueur de Debye électronique.

Le paramètre plasma et les effets collectifs

Le raisonnement est valide s'il y a un nombre important d'électrons autour de l'ion.
Le paramètre plasma (ou nombre de Debye est le nombre moyen d'électrons distants de λ_{De} d'un point :

$$N_{De} = n_{e\infty} \frac{4\pi}{3} \lambda_{De}^3$$

Pour un plasma de décharge type : $n_{e\infty} = 10^{17} \text{ m}^{-3}$ $\lambda_{De} = 33 \mu\text{m}$

$$N_{De} \sim 10^4$$

Pour la plupart des plasmas ce nombre sera grand : les effets collectifs domineront
Seulement pour les plasmas les plus denses, les effets individuels dominant :

$$N_{De} < 1 \Leftrightarrow n_{e\infty} > \frac{16\pi^2}{9} \left(\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{q_e^2} \right)^3$$

C'est le cas essentiellement pour le cœur des étoiles.

Interaction plasma-paroi

Un plasma est en contact avec une paroi isolante.

On présuppose que le potentiel de la paroi U_p va s'adapter au potentiel du plasma $U_p = U_\infty$

Dans ce cas, les flux par unité de surface d'ions et d'électrons arrivant sur la paroi sont :

$$j_e = n_e u_{eth} \qquad j_i = n_i u_{ith}$$

Les densités ionique et électronique sont proches, mais la vitesse thermique électronique est très supérieure à la vitesse thermique ionique (à cause des masses).

Le flux électronique excède largement le flux ionique. $j_e \gg j_i$

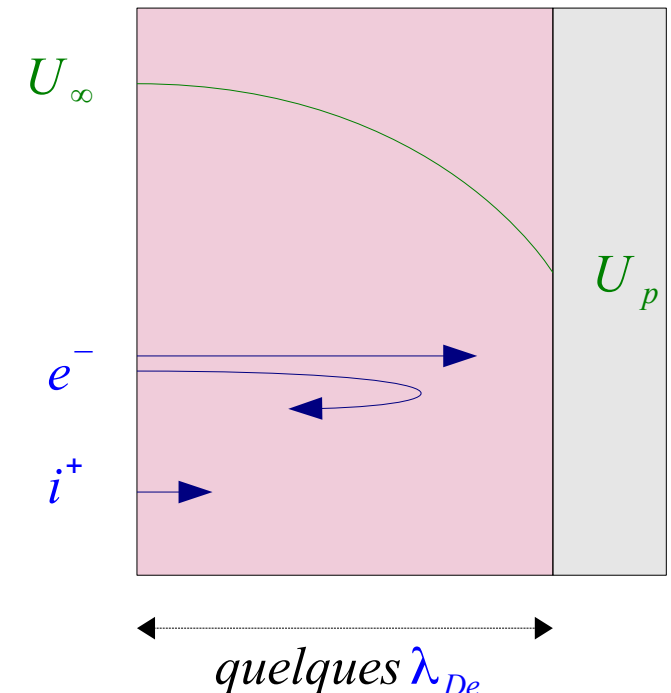
Pour éviter de se charger indéfiniment, la paroi va se polariser à un potentiel inférieur à celui du plasma :

$$U_p < U_\infty$$

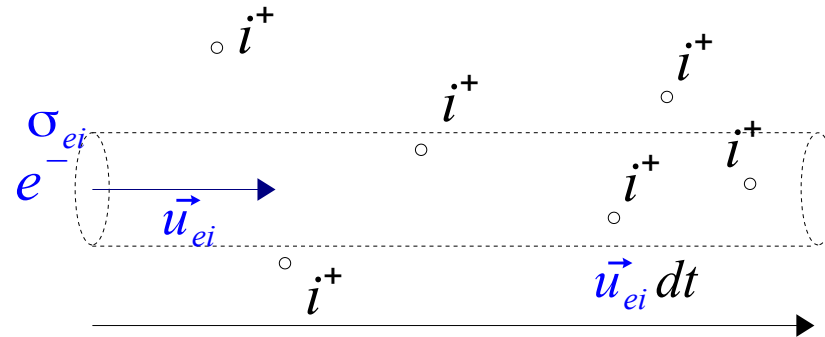
Entre la paroi et le plasma, il va se développer une **gaine**, zone où les potentiels de la paroi et du plasma vont se raccorder. Dans cette zone, les effets électriques vont dominer à travers l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 U(r) = \frac{-q_e}{\epsilon_0} (n_i - n_e(r))$$

Comme pour l'écrantage, la taille caractéristique de la gaine sera la longueur de Debye λ_{De} .



Fréquence de collisions et section efficace



Pour une section efficace : σ_{ei}

et une vitesse relative électron / ion : u_{ei}

le volume balayé par un électron par unité de temps :

$$\langle \sigma_{ei} u_{ei} \rangle$$

La fréquence de collisions des électrons sur les ions :

$$\nu_{ei} = n_i \langle \sigma_{ei} u_{ei} \rangle$$

Libre parcours moyen des électrons à travers les ions :

$$\lambda_{ei} = \frac{\langle u_{ei} \rangle}{\nu_{ei}} \sim \frac{1}{n_i \langle \sigma_{ei} \rangle}$$

Collisions sur les neutres

Pour les collisions élastiques des électrons ou des ions sur les neutres (sans ionisation), le modèle de la **sphère dure** peut être utilisée :

Une particule neutre n'a que des effets à très courte distance : la section efficace dépend de la taille « physique » des particules.

Pour un atome, le rayon est de l'ordre de : $r_n > 10^{-10} m$

Typiquement, les sections efficaces de collision électron-neutre vaudront :

$$\sigma_{en} \sim 10^{-20} \text{ à } 10^{-18} m^2$$



Comme les ions issus de l'ionisation ont la même taille que les neutres, alors que la taille de l'électron est négligeable, la distance de collision ion-neutre est typiquement le double de celle de collision électron-neutre :

$$\sigma_{in} \sim 4 \sigma_{en}$$



La fréquence de collisions dépend de la section efficace de collision, de la densité en neutres et de la vitesse des ions ou électrons par rapport aux neutres :

$$\nu_{en} = n_n \sigma_{en} u_{eth}$$

Collisions Coulombiennes : modèle simplifié

Quelle est la section efficace pour une collision Coulombienne électron-ion ?

Modèle très simplifié : on ne considère que des valeurs sommairement estimées.

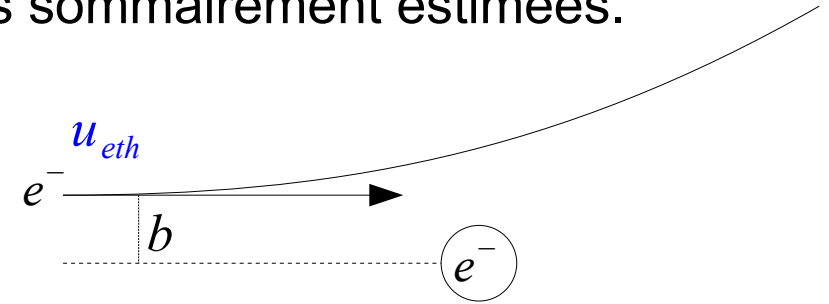
Pour une distance d'impact donné : b

et la vitesse thermique de l'électron : u_{eth}

$$u_{eth} = \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_e}}$$

La durée de l'interaction est : $t_i = \frac{b}{u_{eth}}$

La force sur l'électron est : $|F_i| = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 b^2}$



Variation de quantité de mouvement : $m_e \Delta u_{eth} = |F_i| t_i = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 b u_{eth}}$

La déflexion angulaire est importante si la variation est supérieure à la quantité de mouvement elle-même : $m_e \Delta u_{eth} \geq m_e u_{eth}$

soit : $b \leq b_{sup} = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e u_{eth}^2}$

La section efficace est estimée en utilisant la distance d'impact limite b_{sup} :

$$\sigma_{ee} = \pi b_{sup}^2 = \frac{q_e^4}{16\pi\epsilon_0^2 m_e^2 u_{eth}^4}$$

Plus la vitesse est grande, plus la section efficace est faible.

La fréquence de collisions est estimée à : $\nu_{ee} = n_e \sigma_{ee} u_{eth} = \frac{n_e q_e^4}{16\pi\epsilon_0^2 m_e^{1/2} (k_B T_e)^{3/2}}$

Collisions Coulombiennes : modèle de Rutherford

Le modèle de Rutherford est un modèle de l'interaction électron-électron : la déflexion est calculée en fonction de la vitesse relative, et la distance d'impact.

La section efficace, fonction de la vitesse, est calculée à partir de la déflexion et en intégrant sur la distance d'impact.

$$\sigma_{ee} = \frac{\sigma_{Th}}{2\pi^{1/2}} \left(\frac{k_B T_e}{m_e C^2} \right)^{-2} \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{db}{b}$$

σ_{Th} est la section efficace Thompson, basée sur le rayon classique de l'électron r_e :

$$\sigma_{Th} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = \frac{1}{6\pi\epsilon_0^2} \frac{q_e^4}{m_e^2 C^4} = 6.65 \cdot 10^{-29} m^2$$

$$r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e^2}{m_e C^2}$$

L'intégration sur la distance d'impact b est divergente, si on met pas de limites.

Sa valeur maximum sera la longueur de Debye $b_{max} = \lambda_D$, à cause de l'écrantage.

Sa valeur minimum b_{min} sera la plus grande des 2 limites :

soit la limite classique, celle pour laquelle la déflexion est de 1 rad, $b_0 = \frac{q_e^2}{2\pi\epsilon_0 m_e u_e^2}$

soit la limite quantique $b_{0q} = \hbar / m_e u_e$

À partir de ces limites, on introduit le logarithme Coulombien : $\ln \Lambda = \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{db}{b} = \ln \left(\frac{b_{max}}{b_{min}} \right)$

Généralement pour les plasmas : $3 \leq \ln \Lambda \leq 30$

Dans le modèle de Rutherford, la fréquence de collisions électron-électron vaut :

$$\nu_{ee} = \frac{n_e \ln \Lambda}{12\pi^{3/2} \epsilon_0^2} \frac{q_e^4}{m_e^{1/2} (k_B T_e)^{3/2}}$$

Fréquences de collisions typiques

La fréquence de collisions électron-électron :

$$\nu_{ee} = \frac{n_e \ln \Lambda}{12 \pi^{3/2} \epsilon_0^2} \frac{q_e^4}{m_e^{1/2} (k_B T_e)^{3/2}}$$

La fréquence de collisions proton-proton s'en déduit en remplaçant la charge de l'électron $-q_e$ par celle du proton $Z_i q_e$, la masse de l'électron m_e , par celle de l'ion m_i , et la température de l'électron T_e par celle de l'ion T_i :

$$\nu_{ii} = \frac{n_i \ln \Lambda}{12 \pi^{3/2} \epsilon_0^2} \frac{Z_i^4 q_e^4}{m_i^{1/2} (k_B T_i)^{3/2}}$$

Les collisions d'un électron sur des ions ne peut pas directement s'en déduire, à cause de la différence des masses. Le transfert d'énergie à chaque collision est de m_e/m_i .

Le calcul de Rutherford donne :

$$\nu_{ei} = \frac{n_i \ln \Lambda}{3 \pi^{3/2} \epsilon_0^2} \frac{m_e^{1/2} Z_i^2 q_e^4}{m_i (k_B T_e)^{3/2}}$$

La fréquence de collisions électron-ion est de l'ordre de 1000 plus faible que la fréquence de collisions électron-électrons :

$$\frac{\nu_{ei}}{\nu_{ee}} = 4 Z_i^2 \frac{n_i m_e}{n_e m_i}$$

Fréquences de collisions et libres parcours moyens typiques

Pour un plasma d'argon ionisé :

$$n_e = n_{Ar^+} = 10^{17} m^{-3} \quad n_{Ar} = 10^{19} m^{-3} \quad T_e = 2 eV \quad T_{Ar^+} = 300 K \quad m_{Ar} = 66.4 \cdot 10^{-27} kg$$

Les vitesses thermiques électronique et ionique :

$$u_{eth} = 590 km s^{-1} \quad u_{Ar^+ th} = 460 ms^{-1}$$

Fréquence de collisions et libre parcours moyen électron-électrons :

$$\nu_{ee} = 7 \cdot 10^5 s^{-1} \quad \lambda_{ee} = 0.84 m$$

La thermalisation des électrons ne se fait pas aux petites échelles.

Fréquence de collisions et libre parcours moyen électron-ions :

$$\nu_{eAr^+} = 40 s^{-1} \quad \lambda_{eAr^+} = 1.4 \cdot 10^4 m$$

Il n'y a quasiment aucun échange d'énergie entre les électrons et les ions.

Fréquence de collisions et libre parcours moyen ion-ions :

$$\nu_{Ar^+ Ar^+} = 1.8 \cdot 10^6 s^{-1} \quad \lambda_{Ar^+ Ar^+} = 2.5 \cdot 10^{-4} m$$

La fréquence de collisions entre ions est comparable à celle entre électrons, mais comme leur vitesse est beaucoup plus faible, le libre parcours moyen est une échelle intermédiaire : la **thermalisation entre ions est partielle.**

Fréquence de collisions et libre parcours moyen électron-neutres ($\sigma_{eAr} = 10^{-19} m^2$) :

$$\nu_{eAr} = 5.9 \cdot 10^5 s^{-1} \quad \lambda_{eAr} = 1 m$$

Les collisions électron-neutres nécessitent de longues distances pour avoir un effet.

Pour comparaison, dans l'air ambiant : $\nu_{N^2 N^2} = 0,77 \cdot 10^7 s^{-1}$ $\lambda_{N^2 N^2} = 5,9 \cdot 10^{-8} m$

La fréquence plasma

Nous considérons une oscillation plasma :

- les ions monochargés (plus lourds) restent constants et uniforme dans l'espace. n_i
- les électrons oscillent dans le temps. L'oscillation est traitée comme une perturbation :

$$n_e = n_{e0} + n_{e1} \quad n_{e1}(x, t) = \hat{n}_{e1} e^{i(kx - \omega t)}$$

La densité électronique moyenne est identique à celle des ions :

$$n_i = n_{e0}$$

Les autres quantités sont nulles à l'équilibre : $\vec{E}_0 = \vec{0}$ $\vec{E} = \vec{E}_1$ $\vec{u}_{e0} = \vec{0}$ $\vec{u}_e = \vec{u}_{e1}$

L'équation de Poisson relie le champ électrique à la perturbation :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q_e}{\epsilon_0} (n_i - n_e)$$

Pour que la divergence soit non nulle, l'onde doit être longitudinale :

$$\vec{E}(x, t) = \hat{E} e^{i(kx - \omega t)} \vec{e}_x \quad \nabla \cdot \vec{E} = ik \vec{e}_x \cdot \vec{E}$$

L'équation de Poisson est linéarisée :

$$ik E = \frac{-q_e}{\epsilon_0} n_{e1}$$

L'équation de la dynamique des électrons s'écrit :

$$m_e \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_e = -q_e \vec{E}$$

L'équation est linéarisée : $\vec{u}_e(x, t) = \hat{u}_e e^{i(kx - \omega t)} \vec{e}_x$ $\frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_e = -i\omega \vec{u}_e$

$$-i\omega m_e u_e = -q_e E$$

On combine cette équation linéaire avec la précédente sur le champ électrique :

$$\omega k m_e u_e = \frac{q_e^2}{\epsilon_0} n_{e1}$$

La fréquence plasma

L'équation de Poisson et l'équation de la dynamique ont permis d'écrire :

$$\omega k m_e u_e = \frac{q_e^2}{\epsilon_0} n_{e1}$$

Pour fermer le système, on utilise l'équation de continuité sur les électrons :

$$\frac{\partial}{\partial t} n_e + \vec{\nabla} \cdot (n_e \vec{u}_e) = 0$$

L'équation est linéarisée :

$$\frac{\partial}{\partial t} n_{e1} = -n_{e0} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_e$$

$$-i \omega n_{e1} = -n_{e0} i k u_e$$

$$k u_e = \frac{1}{n_{e0}} \omega n_{e1}$$

On combine cette dernière équation avec celle du haut :

$$\frac{m_e}{n_{e0}} \omega^2 n_{e1} = \frac{q_e^2}{\epsilon_0} n_{e1}$$

Le plasma oscille à une fréquence caractéristique, la fréquence plasma :

$$\omega = \omega_{pe} = \sqrt{\frac{q_e^2 n_{e0}}{\epsilon_0 m_e}}$$

La fréquence plasma ne dépend pas du nombre d'onde de la perturbation.

Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma

Dans un plasma où seuls les électrons réagissent, les équations de Maxwell sont :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{-q_e n_e}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_e + \frac{1}{C^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Dans ce plasma, l'équation d'une onde électromagnétique a pour forme :

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \vec{J}_e}{\partial t}$$

Les électrons subissent le champ électrique : $m_e \frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} = -q_e \vec{E}$

Comme le courant s'écrit : $\vec{J}_e = -q_e n_e \vec{u}_e$

le courant est relié au champ électrique par la relation : $\frac{\partial \vec{J}_e}{\partial t} = \frac{q_e^2 n_e}{m_e} \vec{E}$

On introduit une onde plane : $\vec{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \vec{e}_x$

Les gradients et dérivées temporelles s'écrivent simplement :

$$\nabla^2 \vec{E} = -k^2 \vec{E} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$$

L'équation d'onde pour cette onde plane dans le plasma a pour forme :

$$-k^2 \vec{E} = \frac{-\omega^2}{C^2} \vec{E} + \mu_0 \frac{q_e^2 n_e}{m_e} \vec{E}$$

On en déduit la relation de dispersion : $k^2 = \frac{\omega^2}{C^2} - \frac{q_e^2 n_e}{C^2 \epsilon_0 m_e}$ $\mu_0 \epsilon_0 C^2 = 1$

La relation de dispersion peut s'écrire en fonction de la fréquence plasma électronique :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{pe}^2}{C^2}$$

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{q_e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e}}$$

Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma

La relation de dispersion d'une onde électromagnétique dans un plasma :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{pe}^2}{C^2}$$

Si $\omega < \omega_{pe}$, une onde évanescente est possible : le plasma se comporte comme un **métal**.

Si $\omega \geq \omega_{pe}$, la propagation se fait avec un indice optique
$$N^2 = \frac{k^2 C^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$$

Pour les **hautes fréquences**, le plasma se comporte comme un **milieu diélectrique**.

Quand une onde électromagnétique pénètre dans un plasma :

- au bord la densité est faible $\omega \gg \omega_{pe}$: l'onde se propage avec un indice proche de 1,
- s'il existe une densité au centre du plasma telle que $\omega = \omega_{pe}$, l'onde sera réfléchiée.

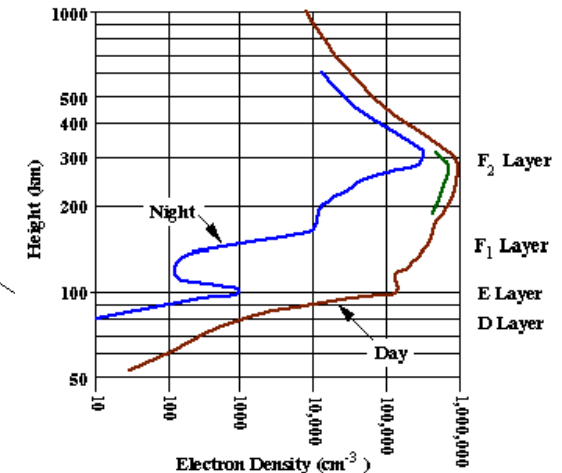
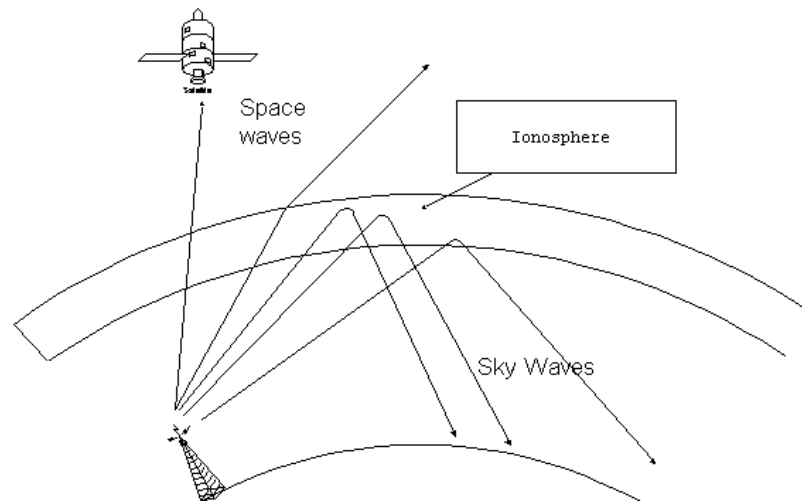
Exemple : l'ionosphère

$$n_{e\max} = 10^{12} \text{ m}^{-3}$$

$$F_{pe} = \frac{\omega_{pe}}{2\pi} = 9 \text{ MHz}$$

L'ionosphère permet la réflexion des ondes radio courtes.

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{q_e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e}}$$



Description particulière du plasma

Dans un plasma, la **dynamique des particules chargées** (indice i) dépend des champs électrique et magnétique. Les champs électrique et magnétique sont fixés par les équations de Maxwell :

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\vec{r}_i, \vec{u}_i} & \\
 \frac{d}{dt} \vec{r}_i = \vec{u}_i & & \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 m_i \frac{d}{dt} \vec{u}_i = q_i (\vec{E} + \vec{u}_i \times \vec{B}) & & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \\
 & \xleftarrow{\vec{E}, \vec{B}} & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \sum_i q_i n_i \vec{u}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
 & & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0
 \end{array}$$

Il calcule alternativement le déplacement des particules et les champs électrique et magnétique

Le système est **auto-cohérent** (à condition de décrire les conditions de bord).

Le système peut décrire les **collisions** entre particules chargées.

Il ne décrit pas les collisions des particules chargées avec les particules neutres.

Il ne décrit pas non les réactions entre espèces (ionisations, réactions chimiques)...

Limite : le plasma contient beaucoup trop de particules (au moins de l'ordre de 10^{15}) pour envisager de simuler le plasma complet.

Description cinétique : l'équation de Vlasov

Les particules sont décrites par leur distribution en position et en vitesse pour chaque espèce (électrons, ions) :

$$f_\alpha(\vec{r}, \vec{u}, t)$$

La distribution f_α décrit le nombre de particules de l'espèce autour d'une position \vec{r} et d'une vitesse \vec{u} et à un instant t donnés.

La distribution contient toute l'information de la dynamique de l'espèce.

En intégrant suivant la vitesse, on retrouve la densité :

$$n_\alpha(\vec{r}, t) = \iiint f_\alpha(\vec{r}, \vec{u}, t) d^3 \vec{u}$$

La vitesse moyenne en chaque point peut être déduite :

$$\vec{u}_\alpha(\vec{r}, t) = \frac{1}{n_\alpha(\vec{r}, t)} \iiint \vec{u} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 \vec{u}$$

Description cinétique : l'équation de Vlasov

Entre 2 instants différents, chaque particule aura changé de position à cause de sa vitesse, et changé de vitesse à cause de son accélération. La conservation des particules de chaque espèce est décrite par l'équation :

$$\partial_t f_\alpha + \vec{u} \cdot \nabla_{\vec{r}} f_\alpha + \vec{a} \cdot \nabla_{\vec{v}} f_\alpha = 0$$

En prenant en compte l'équation de la dynamique des particules, l'équation devient l'équation de Vlasov :

$$\partial_t f_\alpha + \vec{u} \cdot \nabla_{\vec{r}} f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \cdot \nabla_{\vec{v}} f_\alpha = 0$$

$$m_\alpha \frac{d}{dt} \vec{u}_\alpha = q_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B})$$

L'expression des équations de Maxwell-Boltzmann prend la forme :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \sum_\alpha \frac{1}{\epsilon_0} \rho_\alpha \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \sum_\alpha \vec{j}_\alpha + \frac{1}{C^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Les expressions de la densité de charges et du courant électrique se déduisent des distributions des espèces :

$$\rho_\alpha(\vec{r}, t) = q_\alpha n_\alpha(\vec{r}, t) = q_\alpha \iiint f_\alpha(\vec{r}, \vec{u}, t) d^3 \vec{u}$$

$$\vec{j}_\alpha(\vec{r}, t) = q_\alpha n_\alpha(\vec{r}, t) \vec{u}_\alpha(\vec{r}, t) = q_\alpha \iiint \vec{u} f_\alpha(\vec{r}, \vec{u}, t) d^3 \vec{u}$$

Description cinétique

L'équation cinétique de Vlasov décrit le même système que le système particulaire, mais permet de regrouper les particules très proches en position et en vitesse.

Le maillage de l'espace (en position et en vitesse) peut nécessiter des modèles pour décrire les **phénomènes à petite échelle (sous maille)** : les collisions, par exemple ne sont pas décrites directement.

La distribution étant de dimension 7 (3 en espace, 3 en vitesse et 1 en temps), le système reste très lourd à résoudre.

Si chaque direction spatiale ou composante en vitesse est divisée en 100 intervalles, la distribution est décrite par 10^{12} mailles à chaque instant pour chaque espèce.

Description fluide

L'équation de Vlasov va être intégrée suivant la vitesse pour diminuer la complexité du problème :

$$\partial_t f_\alpha + \vec{u} \cdot \nabla_{\vec{r}} f_\alpha + q_\alpha (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \cdot \nabla_{\vec{v}} f_\alpha = 0$$

Si on intègre l'équation directement suivant la vitesse, l'équation devient l'équation de la **conservation de la masse** appliquée à la densité (moment d'ordre 0 en vitesse) :

$$n_\alpha(\vec{r}, t) = \iiint f_\alpha(\vec{r}, \vec{u}, t) d^3 \vec{u} \quad \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_\alpha \vec{u}_\alpha) = 0$$

En intégrant suivant la vitesse, l'équation pondérée par la quantité de mouvement, on pourra faire apparaître l'équation de **conservation de la quantité de mouvement** (moment d'ordre 1 en vitesse) :

$$m_\alpha \vec{u}_\alpha(\vec{r}, t) = \frac{m_\alpha}{n_\alpha(\vec{r}, t)} \iiint \vec{u} f_\alpha(\vec{r}, \vec{u}, t) d^3 \vec{u}$$

L'application au moment d'ordre 2 permet de déduire l'équation sur la **conservation de l'énergie**, qui fera apparaître la température :

$$\gamma_\alpha k_B T_\alpha(\vec{r}, t) = \frac{1}{n_\alpha(\vec{r}, t)} \iiint \frac{1}{2} m_\alpha [\vec{u} - \vec{u}_\alpha(\vec{r}, t)]^2 f_\alpha(\vec{r}, \vec{u}, t) d^3 \vec{u} \quad \gamma_\alpha : \text{indice adiabatique}$$

On remplacera une équation sur l'ensemble de la distribution à un système d'équations appliquées à certains moments en vitesse de la distribution.

Équations du modèle fluide

Conservation des particules chargées :

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_\alpha \vec{u}_\alpha) = 0$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$m_\alpha n_\alpha \left(\frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + (\vec{u}_\alpha \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\alpha \right) = q_\alpha n_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) - \vec{\nabla} P_\alpha + \sum_{\beta \neq \alpha} m_\beta n_\beta \bar{\nu}_{\alpha\beta} (\vec{u}_\alpha - \vec{u}_\beta)$$

Équation d'état :

$$P_\alpha = \gamma_\alpha n_\alpha k_B T_\alpha$$

Conservation de l'énergie :

$$\gamma_\alpha n_\alpha \left[\frac{\partial T_\alpha}{\partial t} + (\vec{u}_\alpha \cdot \vec{\nabla}) T_\alpha \right] = -P_\alpha \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_\alpha - \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}_\alpha + S_\alpha$$

\vec{Q}_α : flux de chaleur
 S_α : source extérieure de chaleur

Fermeture du système : diffusion de la chaleur

$$\vec{Q}_\alpha = -n_\alpha \chi_\alpha \nabla T_\alpha$$

χ_α : diffusivité thermique

Équations de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \sum_\alpha \frac{1}{\epsilon_0} q_\alpha n_\alpha$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha \vec{u}_\alpha + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Modèle fluide

Le modèle fluide permet de **réduire la complexité** du système : pour chaque espèce, il y a plus de paramètres (densité, vitesse moyenne, température...), mais qui n'ont que 4 dimensions (3 spatiales + 1 temporelle). Si chaque dimension spatiale est découpée en 100 intervalles, chaque paramètre est représenté par 10^6 à chaque instant.

Le modèle fluide ne permet pas de prendre en compte des **effets purement cinétiques** comme l'amortissement Landau.

À cause de la plus faible collisionnalité du plasma par rapport aux fluides classiques, les effets purement cinétiques sont beaucoup plus importants.

La réduction du système oblige à faire des **approximations** et à développer des modèles simplifiés pour les collisions entre particules ou la diffusion de la chaleur.

Le modèle fluide n'est pas fermé : il nécessite l'ajout de termes pour prendre en compte les effets sous-maille.

Il est possible de développer des modèles **hybrides** où les particules à plus forte inertie sont traitées de manière cinétique (typiquement les ions) et les particules les plus légères (les électrons) de manière fluide : cela permet d'utiliser des pas de temps plus grands pour les composants traités cinétiquement.

Phénomène purement cinétique : l'amortissement Landau

Amortissement Landau : amortissement d'une onde électrique par les particules chargées d'un plasma.

Pour cet amortissement, les collisions sont négligées (aucune dissipation).

L'effet sera décrit par l'interaction d'une onde électrostatique (longitudinale) avec une distribution d'électrons de densité moyenne n_{e0} .

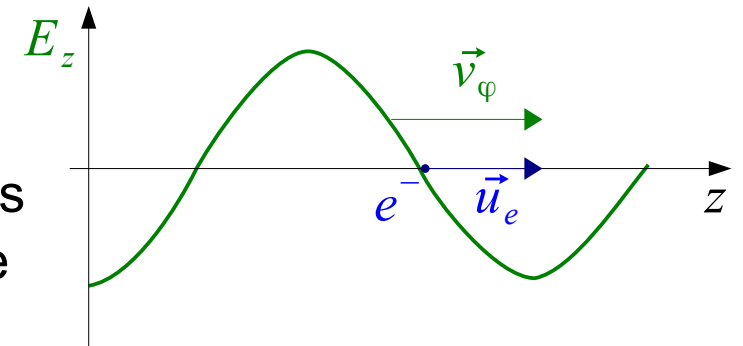
Le champ électrique est oscillant :

$$E_{\parallel}(z, t) = E_{\parallel 0} \cos(k_{\parallel} z - \omega t)$$

Comme la force subie par l'électron est oscillante, son effet sera en moyenne nulle, sauf pour les électrons dont la vitesse longitudinale u_e est infiniment proche de la vitesse de phase de l'onde $v_{\phi} = \omega/k_{\parallel}$, par effet de résonance onde-particule.

Les électrons très légèrement plus lents que l'onde seront en moyenne accélérés. Les électrons très légèrement plus rapides seront en moyenne ralentis.

Le gain ou la perte d'énergie sur l'ensemble de la distribution dépendra de la différence de population entre les électrons légèrement plus rapides et ceux légèrement plus lents. Le bilan en énergie va dépendre de la dérivée de la distribution en vitesse longitudinale des électrons, f_{\parallel} pour la vitesse égale à la vitesse de phase de l'onde.



Amortissement Landau : effet de résonance

Dérivée du gain d'énergie des électrons par unité de volume, pour l'ensemble de la distribution :

$$\frac{d}{dt} S_c = -\frac{\pi q_e^2 n_{e0} E_{\parallel 0}^2 \omega}{2 m_e k_{\parallel}^2} f'_{\parallel} \left(\frac{\omega}{k_{\parallel}} \right)$$

Le sens du transfert de l'énergie dépendra du signe de la dérivée de la distribution en vitesse de l'électron, pour la vitesse égale à la vitesse de phase de l'onde.

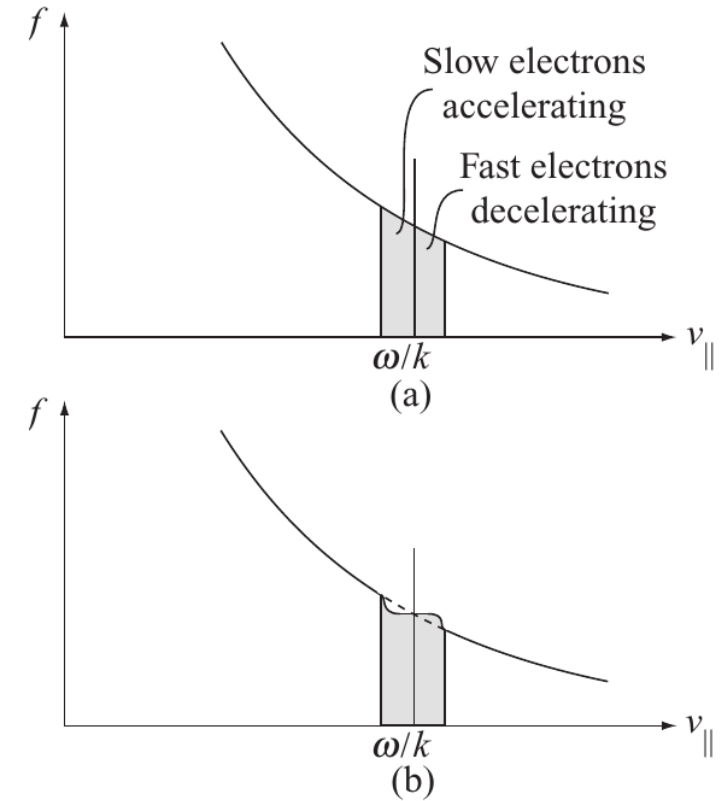
Pour une distribution maxwellienne :

$$f_{\parallel}(u) = \sqrt{\frac{m_e}{2\pi k_B T_e}} e^{\frac{-m_e u^2}{2k_B T_e}} \quad f'_{\parallel}(u) = \frac{-u}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{m_e}{k_B T_e} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{-m_e u^2}{2k_B T_e}}$$

La dérivée est négative partout : les électrons gagnent de l'énergie : l'onde est amortie.

Si la distribution n'est pas maxwellienne et présente des intervalles où dérivée de la distribution en vitesse est positive, les électrons transmettront de l'énergie à l'onde : une instabilité électrostatique pourra apparaître spontanément.

L'interaction entre l'onde et la distribution des électrons a pour effet de déformer la distribution en vitesse de l'électron.



L'amortissement Landau

- L'amortissement Landau est un effet de **résonance** entre la vitesse de phase d'une onde électrostatique et une population d'électrons du plasma. Il a pour effet d'amortir ou amplifier l'onde et de déformer la distribution en vitesses des électrons.
- L'amortissement Landau est le phénomène **purement cinétique** le plus emblématique en physique des plasmas : il n'est pas accessible par les modèles fluides.
- Il joue un rôle important dans le **développement d'instabilités électrostatiques** dans les plasmas.
- Le phénomène a été découvert par L. Landau en 1945 (J. of Phys. 1946).
- C'est l'un des phénomènes en physique classique les plus discutés depuis.
- Grâce à C. Villani (médaillé Fields 2010) et C. Mouhot, l'amortissement Landau est établi mathématiquement dans le cadre de l'équation de Vlasov non linéaire en 2009 (Acta Math. 2011).

Propriétés des plasmas

Le plasma est un **gaz ionisé** (au moins partiellement).

Il est généralement obtenu par **chauffage** ou par **décharge** électrique dans un gaz.

Les dynamiques des ions et des électrons sont fortement liées par les forces électromagnétiques.

La présence de charges libres induit que le plasma se comporte comme un **conducteur** pour des fréquences inférieures à la fréquence plasma.

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{q_e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e}}$$

Le plasma est **quasi-neutre** à des échelles plus grandes que la longueur de Debye.

$$\lambda_{De} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e q_e^2}}$$

Le plasma est généralement **peu collisionnel** : il n'y a pas d'équilibre thermodynamique local, surtout pour les électrons.

Les températures électronique et ioniques peuvent être très différentes localement.

Le plasma peut être modélisé par un **modèle fluide**. Mais ce type de modèle ne permet pas de rendre compte des **effets purement cinétiques**, comme l'amortissement Landau qui peuvent être essentiels pour la dynamique du plasma. Un modèle cinétique, basé sur la dynamique de la distribution en vitesses des particules chargées peut être nécessaire.

Ordres de grandeur pour des plasmas typiques

Plasma	n_e (m^{-3})	T (K)	B (T)	λ_D (m)	N_D	ω_p (s^{-1})	ν_{ee} (s^{-1})	ω_c (s^{-1})	r_L (m)
Gas discharge	10^{16}	10^4	—	10^{-4}	10^4	10^{10}	10^5	—	—
Tokamak	10^{20}	10^8	10	10^{-4}	10^8	10^{12}	10^4	10^{12}	10^{-5}
Ionosphere	10^{12}	10^3	10^{-5}	10^{-3}	10^5	10^8	10^3	10^6	10^{-1}
Magnetosphere	10^7	10^7	10^{-8}	10^2	10^{10}	10^5	10^{-8}	10^3	10^4
Solar core	10^{32}	10^7	—	10^{-11}	1	10^{18}	10^{16}	—	—
Solar wind	10^6	10^5	10^{-9}	10	10^{11}	10^5	10^{-6}	10^2	10^4
Interstellar medium	10^5	10^4	10^{-10}	10	10^{10}	10^4	10^{-5}	10	10^4
Intergalactic medium	1	10^6	—	10^5	10^{15}	10^2	10^{-13}	—	—

n_e : densité électronique (densité neutre gaz : 10^{25} solide : $10^{28} m^{-3}$)

T : température électronique

B : champ magnétique

λ_D : longueur de Debye électronique

N_D : nombre d'électrons dans la sphère de Debye

ω_p : fréquence plasma électronique (pulsation)

ν_{ee} : fréquence de collisions électron-électron

ω_c : fréquence cyclotronique électronique

r_L : rayon de Larmor électronique

Bibliographie

J.-M. Rax, Physique des Plasmas, Dunod (2005)

Chap. 3 : Phénomènes collectifs

Chap. 4 : Collisions et réactions

Paul M. Bellan, Fundamentals of Plasma Physics, Cambridge Univ. Press (2008)

1. Basics concepts

2. Derivation of fluid equations

J. A. Bittencourt, Fundamentals of Plasma Physics, Springer Ed. (2013)

1. Introduction

Constantes physiques

$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$: constante de Boltzmann

$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$: constante de Planck

$C = 2,99 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$: vitesse de la lumière dans le vide

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$: permittivité du vide

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$: perméabilité du vide

$q_e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$: charge élémentaire

$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$: masse de l'électron

$r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e^2}{m_e c^2} = 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ m}$: rayon classique de l'électron

$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$: nombre d'Avogadro

$m_u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$: unité de masse atomique

- Grandeurs standard

$T_0 = 273,15 \text{ K}$: température standard de l'air (0°C)

$P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$: pression standard de l'air

$n_0 = 2,69 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$: densité moléculaire d'un gaz parfait à T_0 et P_0

- Unités

$1 \text{ Torr} = \frac{1,013 \cdot 10^5}{760} \text{ Pa} = 133,3 \text{ Pa}$: pression correspondant à 1 mm de mercure

$1 \text{ eV} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-23}} \text{ K} = 1,16 \cdot 10^4 \text{ K}$

Plan

- 1 Qu'est-ce qu'un plasma ?
- 2 Diversité des plasmas
- 3 Quelques propriétés des plasmas
- Annexes
 - Distribution de Boltzmann
 - Amortissement Landau

Distribution de Boltzmann

Comment se caractérise l'équilibre thermodynamique entre 2 systèmes ?

Supposons 2 systèmes Σ_1 et Σ_2 , faiblement couplés (les états de chacun des 2 systèmes sont statistiquement indépendants).

L'énergie totale du système global, somme des énergies des 2 sous-systèmes est constant.

$$E = E_1 + E_2$$

Pour chaque sous-système, le nombre de micro-états est fonction de l'énergie du système : $g_1(E_1)$ $g_2(E_2)$

Un état du système global est décrit un couple d'états de chacun des sous-systèmes.

Comme les 2 sous-systèmes sont statistiquement indépendants, le nombre de micro-états du système global est le produit des nombres de micro-états de chaque sous-système. Il dépend de la répartition en énergie : $g(E_1) = g_1(E_1) g_2(E - E_1)$

Le second principe de la thermodynamique prescrit que la répartition en énergie à l'équilibre correspondra au cas le nombre d'états du système global est maximal :

$$\frac{dg}{dE_1} = g_2 \frac{dg_1}{dE} - g_1 \frac{dg_2}{dE} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{g_1} \frac{dg_1}{dE} = \frac{1}{g_2} \frac{dg_2}{dE}$$

L'entropie et la température apparaissent de manière naturelle :

$$S_1 = k_B \ln g_1 \quad T_1 = \frac{dE_1}{dS_1}$$

À l'équilibre thermodynamique, les 2 sous-systèmes ont la même température $T_1 = T_2$

Distribution de Boltzmann

Quelle est la distribution en énergie des particules dans un système à l'équilibre thermodynamique ?

La probabilité de trouver le système 1 dans un certain micro-état à une énergie donnée, est proportionnelle au nombre de micro-états possibles correspondant du système 2

Supposons que le sous-système Σ_1 soit beaucoup plus petit que le sous-système Σ_2 , qualifié alors de réservoir de température : le système est isotherme.

Pour le sous-système 2, l'entropie varie avec l'énergie du système 1 :

$$dS_2 = \frac{-1}{T} dE_1 \qquad dE_1 + dE_2 = 0 \qquad T = \frac{dE_2}{dS_2}$$

Le nombre de micro-états du système 1 varie avec l'entropie par la relation :

$$d g_2 = g_2 \frac{1}{k_B} dS_2 \qquad g_2 = e^{S_2/k_B}$$

Le nombre de micro-états est alors fonction directement de l'énergie du système :

$$d g_2 = g_2 \frac{-1}{k_B T_1} dE_1$$

le nombre de micro-états varie de manière exponentielle avec l'énergie E_1 :

$$g_2 \propto e^{\frac{-E_1}{k_B T_1}}$$

La probabilité de trouver le système 1 avec l'énergie E_1

$$P_1(E_1) \propto \frac{1}{k_B T_1} e^{\frac{-E_1}{k_B T_1}}$$

L'amortissement Landau

Le raisonnement qui suit n'est pas un modèle, mais une interprétation du phénomène.

L'onde est une onde électrostatique longitudinale :

$$E_{\parallel}(z, t) = E_{\parallel 0} \cos(k_{\parallel} z - \omega t)$$

Une particule se déplace dans la même direction :

$$u_{\parallel}(0) = u_z \qquad z(0) = z_i$$

L'équation du mouvement de la particule dans ce champ vaut :

$$a_{\parallel} = \frac{-q_e}{m_e} E_{\parallel 0} \cos(k_{\parallel} z(t) - \omega t)$$

Cette équation n'a pas de solution analytique. On supposera l'amplitude de l'onde suffisamment faible pour effectuer un développement par perturbations.

$$u_{\parallel} = u_{\parallel 0} + u_{\parallel 1} + \dots$$

$$z_{\parallel} = z_{\parallel 0} + z_{\parallel 1} + \dots$$

Amortissement Landau : mouvement perturbé de l'électron

L'ordre 0 correspond au mouvement de l'électron non perturbé par l'onde

$$z_0(t) = z_i + u_{\parallel 0} t \quad u_z = u_{\parallel 0}$$

L'accélération à l'ordre 1, est estimée à partir du mouvement à l'ordre 0 :

$$a_{\parallel 1} = \frac{-q_e}{m_e} E_{\parallel 0} \cos(k_{\parallel} z_i + k_{\parallel} u_z t - \omega t)$$

L'expression fait apparaître $\hat{\omega}$ la fréquence de l'onde vue dans le référentiel de l'électron non perturbé :

$$\hat{\omega} = \omega - k_{\parallel} u_z$$

La solution pour le terme de la vitesse à l'ordre 1 ($u_{\parallel 1}(0) = 0$) :

$$u_{\parallel 1} = \frac{q_e}{m_e} E_{\parallel 0} \frac{\sin(k_{\parallel} z_i - \hat{\omega} t) - \sin(k_{\parallel} z_i)}{\hat{\omega}}$$
$$z_{\parallel 1} = \frac{q_e}{m_e} E_{\parallel 0} \left[\frac{\cos(k_{\parallel} z_i - \hat{\omega} t) - \cos(k_{\parallel} z_i)}{\hat{\omega}^2} - \frac{t \sin(k_{\parallel} z_i)}{\hat{\omega}^2} \right]$$

Amortissement Landau : transfert d'énergie

La dérivée temporelle de l'énergie de l'électron est égale à la puissance de la force électrique :

$$\frac{d}{dt} E_c = -q_e u_{\parallel} E_{\parallel}$$

On utilise le développement jusqu'au deuxième ordre :

$$u_{\parallel} E_{\parallel} = (u_{\parallel 0} + u_{\parallel 1}) E_{\parallel}(z_0 + z_1, t)$$

$$u_{\parallel} E_{\parallel} = (u_{\parallel 0} + u_{\parallel 1}) \left[E_{\parallel}(z_0, t) + \frac{\partial}{\partial z} E_{\parallel}(z_0, t) z_1 \right]$$

$$\frac{d}{dt} E_c = -q_e \left[u_{\parallel 0} E_{\parallel}(z_0, t) + u_{\parallel 0} \frac{\partial}{\partial z} E_{\parallel}(z_0, t) z_1 + u_{\parallel 1} E_{\parallel}(z_0, t) \right]$$

Le but est de moyenner cet effet sur l'ensemble des électrons présents dans le plasma. La phase initiale de l'onde sur l'électron est aléatoire : on moyenne sur toutes les positions initiales de l'électron sur une longueur d'onde :

$$\frac{d}{dt} \bar{E}_c = \frac{k_{\parallel}}{2\pi} \int_0^{2\pi/k_{\parallel}} \frac{d}{dt} E_c dz_i$$

Les termes linéaires en $E_{\parallel 0}$ sont en moyenne nuls à cause du facteur oscillant.

Seuls certains termes quadratiques vont subsister, typiquement ceux de la forme :

$$\sin(k_{\parallel} z_i - \hat{\omega} t) \sin(k_{\parallel} z_i) = \frac{1}{2} [\cos(\hat{\omega} t) + \cos(2k_{\parallel} z_i - \hat{\omega} t)]$$

La dérivée temporelle de l'énergie moyennée sur la phase initiale se simplifie à :

$$\frac{d}{dt} \bar{E}_c = \frac{q_e^2}{2m_e} E_{\parallel 0}^2 \left[\frac{\omega}{\hat{\omega}^2} \sin(\hat{\omega} t) - \frac{\omega t}{\hat{\omega}} \cos(\hat{\omega} t) + t \cos(\hat{\omega} t) \right]$$

$$u_{\parallel 0} = u_z$$

$$u_{\parallel 1} = \frac{q_e}{m_e} E_{\parallel 0} \frac{\sin(k_{\parallel} z_i - \hat{\omega} t) - \sin(k_{\parallel} z_i)}{\hat{\omega}}$$

$$z_{\parallel 1} = \frac{q_e}{m_e} E_{\parallel 0} \left[\frac{\cos(k_{\parallel} z_i - \hat{\omega} t) - \cos(k_{\parallel} z_i)}{\hat{\omega}^2} - \frac{t \sin(k_{\parallel} z_i)}{\hat{\omega}} \right]$$

$$E_{\parallel}(z_0, t) = E_{\parallel 0} \cos(k_{\parallel} z_i - \omega' t)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} E_{\parallel}(z_0, t) = -k_{\parallel} E_{\parallel 0} \sin(k_{\parallel} z_i - \hat{\omega} t)$$

Transfert d'énergie d'énergie moyenné sur la distribution

$$\hat{\omega} = \omega - k_{\parallel} u_z$$

Dérivée temporelle de l'énergie moyennée sur la phase initiale :

$$\frac{d}{dt} \bar{E}_c = \frac{q_e^2}{2 m_e} E_{\parallel 0}^2 \left[\frac{\omega}{\hat{\omega}^2} \sin(\hat{\omega} t) - \frac{\omega t}{\hat{\omega}} \cos(\hat{\omega} t) + t \cos(\hat{\omega} t) \right]$$

Les cas pour lesquels $\omega' \sim 0$ vont dominer : ils correspondent à un effet de résonance entre l'onde et l'électron. Cette moyenne reste finie quand $\omega' \rightarrow 0$.

On moyenne maintenant sur la distribution en vitesse de l'électron que l'on suppose homogène : $f_e(\vec{u}_{\perp}, u_z)$

La distribution normalisée dans la direction parallèle est donnée par :

$$f_{\parallel}(u_z) = \frac{1}{n_{e0}} \iint f_e(\vec{u}_{\perp}, u_z) d^2 \vec{u}_{\perp}$$

La dérivée du gain d'énergie des électrons par unité de volume s'exprime alors :

$$\frac{d}{dt} S_c = \iiint_{\vec{u}} \frac{d}{dt} \bar{E}_c f_e(\vec{u}_{\perp}, u_z) d^2 \vec{u}_{\perp} du_z$$

$$\frac{d}{dt} S_c = n_{e0} \int_{u_z} \frac{d}{dt} \bar{E}_c f_{\parallel}(u_z) du_z$$

Comme le facteur entre crochet peut être vu comme une dérivée :

$$\frac{\omega}{\hat{\omega}^2} \sin(\hat{\omega} t) - \frac{\omega t}{\hat{\omega}} \cos(\hat{\omega} t) + t \cos(\hat{\omega} t) = -\frac{\partial}{\partial \hat{\omega}} \left[\frac{\omega \sin(\hat{\omega} t)}{\hat{\omega}} - \sin(\hat{\omega} t) \right] = \frac{1}{k_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial u_z} \left[\frac{\omega \sin(\hat{\omega} t)}{\hat{\omega}} - \sin(\hat{\omega} t) \right]$$

L'expression peut être intégrée par parties :

$$\frac{d}{dt} S_c = -\frac{q_e^2 n_{e0} E_{\parallel 0}^2}{2 m_e k_{\parallel}} \int_{u_{\parallel}} \left[\frac{\omega \sin(\hat{\omega} t)}{\hat{\omega}} - \sin(\hat{\omega} t) \right] f'_{\parallel}(u_z) du_z$$

Transfert d'énergie d'énergie moyenné sur la distribution

Dérivée du gain d'énergie des électrons par unité de volume :

$$\hat{\omega} = \omega - k_{\parallel} u_z$$

$$\frac{d}{dt} S_c = -\frac{q_e^2 n_{e0} E_{\parallel 0}^2}{2 m_e k_{\parallel}} \int_{u_{\parallel}} \left[\frac{\omega \sin(\hat{\omega} t)}{\hat{\omega}} - \sin(\hat{\omega} t) \right] f'_{\parallel}(u_z) du_z$$

Quand $t \rightarrow \infty$, pour les fréquences $\hat{\omega} \gg 1/t$, l'intégration va décroître rapidement à cause du facteur oscillant : la fréquence résonnante $\hat{\omega} \sim 0$ va dominer, soit $u_z \sim \omega/k_{\parallel}$.

Pour $\omega' \sim 0$,

- la distribution en vitesse variera lentement autour de la résonance. On prendra :

$$f_{\parallel}(u_z) \sim_{\hat{\omega} \sim 0} f_{\parallel}(\omega/k_{\parallel})$$

- le premier terme entre crochets va dominer sur le second :

$$\frac{d}{dt} S_c = -\frac{q_e^2 n_{e0} E_{\parallel 0}^2 \omega}{2 m_e k_{\parallel}^2} f'_{\parallel}\left(\frac{\omega}{k_{\parallel}}\right) \int \frac{\sin(x)}{x} dx \quad x = -\hat{\omega} t = (k_{\parallel} u_z - \omega) t$$

La dérivée du gain d'énergie des électrons par unité de volume devient :

$$\frac{d}{dt} S_c = -\frac{\pi q_e^2 n_{e0} E_{\parallel 0}^2 \omega}{2 m_e k_{\parallel}^2} f'_{\parallel}\left(\frac{\omega}{k_{\parallel}}\right)$$

Pour les temps longs, le transfert d'énergie devient indépendant du temps.