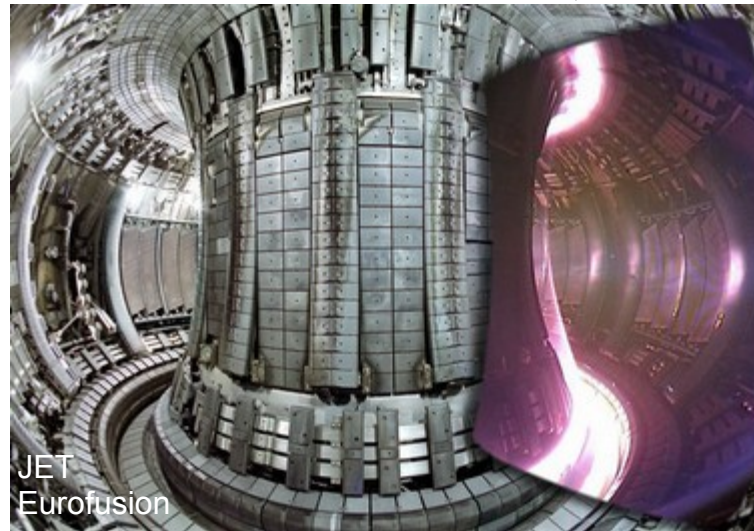


INTRODUCTION AUX PLASMAS POUR LA FUSION PAR CONFINEMENT MAGNÉTIQUE II – Stabilité MHD et Transport

Cyrille Honoré cyrille.honore@polytechnique.edu

Laboratoire de Physique des Plasmas
CNRS – SU – UPSud – ObsPM,
École Polytechnique – IPParis
91128 Palaiseau cedex, France



INSTITUT
POLYTECHNIQUE
DE PARIS



SORBONNE
UNIVERSITÉ



UNIVERSITÉ
PARIS SUD
l'Observatoire
de Paris

Plan

- **I Fusion et confinement magnétique**

- **II Stabilité MHD et transport**
 - **II.1 Équations de la Magnéto-HydroDynamique**
 - **1.a Système d'équations de la MHD**
 - **1.b Topologie de l'équilibre MHD**
 - **II.2 Équilibre MHD du tokamak**
 - **II.3 Instabilités MHD**
 - **II.4 Limites de fonctionnement du tokamak**
 - **II.5 Transport, turbulence et simulation gyrocinétique**

- **III Chauffage et diagnostics de mesure**

**Cours développé initialement
par Pascale Hennequin, Laure Vermare et Pierre Morel**

Équilibre magnétohydrodynamique du plasma

Dans un tokamak :

- le champ magnétique toroïdal est fixé par les bobines extérieures,
- Le champ magnétique poloïdal dépend du courant induit dans le plasma, donc du mouvement des particules chargées.

La dynamique des particules et la forme du champ magnétique sont interdépendantes :

- un état stationnaire du fluide est-il possible ? Comment la pression cinétique du plasma est-elle contenue ?
- cet équilibre est-il stable ?

La **Magnéto-Hydro-Dynamique (MHD)** décrit par un modèle fluide, la dynamique entre le courant électrique produit par le mouvement des particules du plasma et le champ magnétique.

Échelles caractéristiques des fluides

Échelle de longueur fluide caractéristique pour un plasma de tokamak : a la taille de la machine dans la direction poléoïdale :

À cette échelle, le plasma est quasi neutre :

$$\lambda_{De} \ll a$$

Les rayons de Larmor ioniques et électroniques sont négligeables à cette échelle.

$$\rho_{ce} \ll \rho_{ci} \ll a$$

Échelle de temps fluide : $\frac{a}{u_{eth}}$ temps mis par un électron pour traverser la chambre

La période cyclotronique ionique est négligeable.

$$\omega_{ci}^{-1} \ll \frac{a}{u_{eth}}$$

L'inertie des électrons est négligeable à cette échelle : la somme des forces s'appliquant sur eux s'annule.

$$\omega_{ce}^{-1} \ll \frac{a}{u_{eth}} \quad \omega_{pe}^{-1} \ll \frac{a}{u_{eth}}$$

Le plasma est peu collisionnel :

$$\frac{a}{u_{eth}} \ll \nu_{ei}^{-1}$$

Systeme à 2 fluides : vitesses typiques

Vitesse moyenne pour chaque espèce \vec{u}_e \vec{u}_i :

$$\vec{u}_e = \frac{\iiint f_e(\vec{r}, \vec{u}, t) \vec{u} d^3 \vec{u}}{\iiint f_e(\vec{r}, \vec{u}, t) d^3 \vec{u}} \quad \vec{u}_i = \frac{\iiint f_i(\vec{r}, \vec{u}, t) \vec{u} d^3 \vec{u}}{\iiint f_i(\vec{r}, \vec{u}, t) d^3 \vec{u}}$$

Ces vitesses moyennes sont bien plus faibles que les vitesses thermiques.

$$u_e \ll u_{eth} \quad u_i \ll u_{ith}$$

Le décentrage de la distribution en vitesses est principalement dû à la dérive de champs croisés :

$$\vec{u}_e \sim \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2} \quad \vec{u}_i \sim \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2}$$

La différence entre les vitesses moyennes ionique et électronique est petite devant ces vitesses moyennes, puisque la vitesse de champs croisés est commune aux 2 espèces :

$$|\vec{u}_i - \vec{u}_e| \ll |\vec{u}_e|$$

La différence entre ces vitesses est liée au courant électrique :

$$\vec{j} = q_e (n_i \vec{u}_i - n_e \vec{u}_e)$$

Hypothèses sur la dynamique à grande échelle

- Les électrons sont considérés sans inertie :

$$\omega_{ce}^{-1} \ll \frac{a}{u_{eth}} \quad \omega_{pe}^{-1} \ll \frac{a}{u_{eth}}$$

- Les vitesses thermiques des ions et électrons sont très inférieures à la vitesse de la lumière : $v_{ith} \ll C$. Les particules seront non relativistes.

Le courant de déplacement est négligeable dans l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Les phénomènes tels les ondes électromagnétiques sont négligés.

Les forces électriques sont négligeables devant les forces magnétiques et de pression :

Le terme de divergence du champ électrique sera négligé dans l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} q_e (n_i - n_e) = 0$$

Cette hypothèse correspond à la neutralité stricte du plasma :

$$n_i = n_e$$

L'hypothèse est plus restrictive que la propriété de quasi neutralité du plasma : $|n_e - n_i| \ll n_e$

Équations de la dynamique

Conservation des ions et des électrons : le milieu est complètement ionisé (ni ionisation ni recombinaison).

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_e \vec{u}_e) = 0$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_i \vec{u}_i) = 0$$

Conservation de la quantité de mouvement des ions :

$$m_i n_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\vec{u}_i \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_i \right) = q_e n_i (\vec{E} + \vec{u}_i \wedge \vec{B}) - \vec{\nabla} P_i - m_e n_e \bar{v}_{ei} (\vec{u}_i - \vec{u}_e)$$

$-\vec{\nabla} P_i$: force de pression

$-m_e n_e \bar{v}_{ei} (\vec{u}_i - \vec{u}_e)$: effet des collisions des électrons sur les ions

L'inertie des électrons est négligée :

les forces s'appliquant sur l'électron s'équilibrent

$$\vec{0} = -q_e n_e (\vec{E} + \vec{u}_e \wedge \vec{B}) - \vec{\nabla} P_e - m_e n_e \bar{v}_{ei} (\vec{u}_e - \vec{u}_i)$$

Équations de la chaleur

Équations d'état des ions et des électrons :

$$P_i = \frac{3}{2} n_i k_B T_i$$

$$P_e = \frac{3}{2} n_e k_B T_e$$

Équations sur la conservation de l'énergie :

$$\frac{3}{2} n_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial t} + (\vec{u}_i \cdot \vec{\nabla}) T_i \right) = -P_i \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_i - \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}_i + S_i$$

$$\frac{3}{2} n_e \left(\frac{\partial T_e}{\partial t} + (\vec{u}_e \cdot \vec{\nabla}) T_e \right) = -P_e \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_e - \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}_e + S_e$$

Le flux de chaleur \vec{Q}_α fonction de la diffusivité thermique χ_α :

$$\vec{Q}_\alpha = -n_\alpha \chi_\alpha \nabla T_\alpha$$

Les sources ou puits de chaleurs S_α seront liés :

- au **chauffage ohmique** par le courant toroïdal,
- aux **chauffages additionnels** (par ondes ou par injection de particules énergétiques),
- à la puissance produite par les réactions de **fusion**,
- aux pertes par **radiations** (dont rayonnement de freinage – ou Bremsstrahlung),
- aux pertes aux **parois**.

Équations de Maxwell

Les équations de Maxwell se simplifient du fait des hypothèses :

Équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Équation de Maxwell-Ampère :

on néglige le courant de déplacement.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 q_e (n_i \vec{u}_i - n_e \vec{u}_e)$$

Équation de Maxwell-Thomson :

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Équation de Maxwell-Gauss :

on néglige complètement la charge électrique : $n_i = n_e$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

Modèle à deux fluides

Le systèmes d'équation de la MHD à 2 fluides :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_e \vec{u}_e) = 0$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_i \vec{u}_i) = 0$$

$$m_i n_i \left(\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} + (\vec{u}_i \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_i \right) = q_e n_i (\vec{E} + \vec{u}_i \wedge \vec{B}) - \vec{\nabla} P_i - m_e n_e \bar{\nu}_{ei} (\vec{u}_i - \vec{u}_e)$$

$$\vec{0} = -q_e n_e (\vec{E} + \vec{u}_e \wedge \vec{B}) - \vec{\nabla} P_e - m_e n_e \bar{\nu}_{ei} (\vec{u}_e - \vec{u}_i)$$

$$P_i = \frac{3}{2} n_i k_B T_i$$

$$P_e = \frac{3}{2} n_e k_B T_e$$

$$\frac{3}{2} n_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial t} + (\vec{u}_i \cdot \vec{\nabla}) T_i \right) = -P_i \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_i - \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}_i + S_i$$

$$\frac{3}{2} n_e \left(\frac{\partial T_e}{\partial t} + (\vec{u}_e \cdot \vec{\nabla}) T_e \right) = -P_e \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_e - \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}_e + S_e$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 q_e (n_i \vec{u}_i - n_e \vec{u}_e)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Pour fermer le système, il faut connaître les expressions de : \vec{Q}_e \vec{Q}_i S_e S_i

Réduction du système à un seul fluide

Pour réduire la complexité du système, on va le réduire à un seul fluide.

La densité du fluide unique est la densité commune :

$$n = n_i = n_e$$

La masse volumique du fluide est celle des ions (masse des électrons négligeable) :

$$\rho = m_i n$$

Comme les ions portent la quantité de mouvement, leur vitesse sera la vitesse du fluide :

$$\vec{u} = \vec{u}_i$$

La vitesse macroscopique des électrons est proche de celle des ions :

$$\vec{u}_e \sim \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2} \sim \vec{u}_i$$

La différence est néanmoins essentielle pour définir le courant électrique :

$$\vec{j} = q_e n (\vec{u}_i - \vec{u}_e) \qquad \vec{u}_e = \vec{u} - \frac{\vec{j}}{q_e n}$$

La pression du fluide sera la pression totale :

$$P = P_i + P_e$$

Conservation de la masse et du moment global

Conservation de la masse des ions :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

La dérivée convective suit les ions :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f$$

La soustraction de l'équation de conservation des électrons, de celle des ions implique une condition sur le courant :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_e \vec{u}_e) &= 0 \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_i \vec{u}_i) &= 0 \end{aligned}$$

Les équations de conservation du moment des ions et des électrons sont additionnées :

- les forces électriques se compensent ;
- les forces de Lorentz additionnées deviennent la force de Laplace;
- les effets des collisions se compensent ;
- les termes de pression s'additionnent :

$$\rho \frac{du}{dt} = \vec{j} \wedge \vec{B} - \vec{\nabla} P$$

$$\begin{aligned} m_i n_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\vec{u}_i \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_i \right) &= +q_e n_i (\vec{E} + \vec{u}_i \wedge \vec{B}) - \vec{\nabla} P_i - m_e n_e \bar{\nu}_{ei} (\vec{u}_i - \vec{u}_e) \\ \vec{0} &= -q_e n_e (\vec{E} + \vec{u}_e \wedge \vec{B}) - \vec{\nabla} P_e - m_e n_e \bar{\nu}_{ei} (\vec{u}_e - \vec{u}_i) \end{aligned}$$

Conservation du moment parallèle des électrons

Dans la direction parallèle, les forces sur les électrons se neutralisent. La pression n'aura pas de gradient dans la direction parallèle. Seules la force électrique et les effets des collisions interviennent :

$$E_{\parallel} = -\frac{m_e v_{ei}}{q_e} (u_{e\parallel} - u_{i\parallel}) \qquad \vec{0} = -q_e n_e (\vec{E} + \vec{u}_e \wedge \vec{B}) - \nabla P_e - m_e n_e v_{ei} (\vec{u}_e - \vec{u}_i)$$

La force électrique est proportionnelle au courant parallèle. La résistivité associée dépend de la collisionnalité :

$$E_{\parallel} = \eta j_{\parallel} \qquad \eta = \frac{m_e v_{ei}}{q_e^2 n} \qquad \vec{j} = q_e n (\vec{u} - \vec{u}_e)$$

Comme le courant perpendiculaire est faible, pour simplifier les expressions, on posera :

$$\eta \vec{j} \sim \eta j_{\parallel} \vec{e}_{\parallel}$$

La conservation du moment des électrons s'écrit alors :

$$\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} = \frac{1}{q_e n} (\vec{j} \wedge \vec{B} - \vec{\nabla} P_e) + \eta \vec{j}$$

Conservation du moment parallèle des électrons

La conservation du moment des électrons s'écrit :

$$\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} = \frac{1}{q_e n} (\vec{j} \wedge \vec{B} - \vec{\nabla} P_e) + \eta \vec{j}$$

La différence des vitesses fluides ions – électrons est négligeable devant chaque vitesse :

$$\frac{1}{q_e n} |\vec{j} \wedge \vec{B}| \ll |\vec{u} \wedge \vec{B}|$$

Le gradient de pression en moyenne entre le centre et le bord du plasma est négligeable devant les forces magnétiques :

$$\begin{aligned} |\vec{\nabla} P_e| &\sim |\vec{\nabla} P_i| \sim \frac{n k_B T_i}{a} \\ \frac{|\vec{\nabla} P_i|}{q_e n |\vec{u} \wedge \vec{B}|} &\sim \frac{k_B T_i}{q_e a u B} = \frac{k_B T_i}{m_i} \frac{m_i}{q_e B} \frac{1}{a u} \sim \frac{\rho_{ci th} u_{ith}}{a u} \ll 1 \end{aligned}$$

La conservation de la quantité de mouvement des électrons se simplifie :

$$\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} = \eta \vec{j}$$

C'est la **loi d'Ohm généralisée**.

A l'échelle fluide, les collisions peuvent être négligeables :

$$\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

C'est la **loi d'Ohm idéale**.

Adiabaticité

Aux échelles de temps fluides, on néglige les échanges de chaleur :

$$\frac{3}{2} n_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial t} + (\vec{u}_i \cdot \vec{\nabla}) T_i \right) = - P_i \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_i$$

Ceci équivaut à une hypothèse d'adiabaticité :

$$\frac{d}{dt} \frac{P_i}{\rho^{\gamma}} = 0 \quad \gamma = \frac{5}{3}$$

L'hypothèse d'adiabaticité s'applique aussi aux électrons :

$$\frac{d}{dt} \frac{P}{\rho^{\gamma}} = 0$$

Systeme d'equations de la magnétohydrodynamique

Conservation des ions :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

Conservation du moment global :

$$\rho \frac{du}{dt} = \vec{j} \wedge \vec{B} - \vec{\nabla} P$$

Loi d'Ohm résistive

$$\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} = \eta \vec{j}$$

ou idéale :

$$\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

Adiabaticité :

$$\frac{d}{dt} \frac{P}{\rho^\gamma} = 0$$

Équations de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Topologie des tubes de flux magnétique

Flux magnétique à travers une surface quelconque :

$$\psi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Variation temporelle du flux magnétique suivant les particules :

$$\frac{d\psi}{dt} = \iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} + \oint_C \vec{B} \cdot (\vec{u} \wedge d\vec{l})$$

Théorème d'induction : $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \vec{B} + \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B})$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\eta}{\mu_0} \iint_s \nabla^2 \vec{B} \cdot d\vec{s} + \iint_s \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{s} + \oint_C \vec{B} \cdot \vec{u} \wedge d\vec{l}$$

Théorème de Stokes : $\iint_s \vec{\nabla} \wedge \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{l}$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\eta}{\mu_0} \iint_s \nabla^2 \vec{B} \cdot d\vec{s} + \oint_C (\vec{u} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} + \oint_C \vec{B} \cdot (\vec{u} \wedge d\vec{l})$$

Identité vectorielle : $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{c})$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\eta}{\mu_0} \iint_s \nabla^2 \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

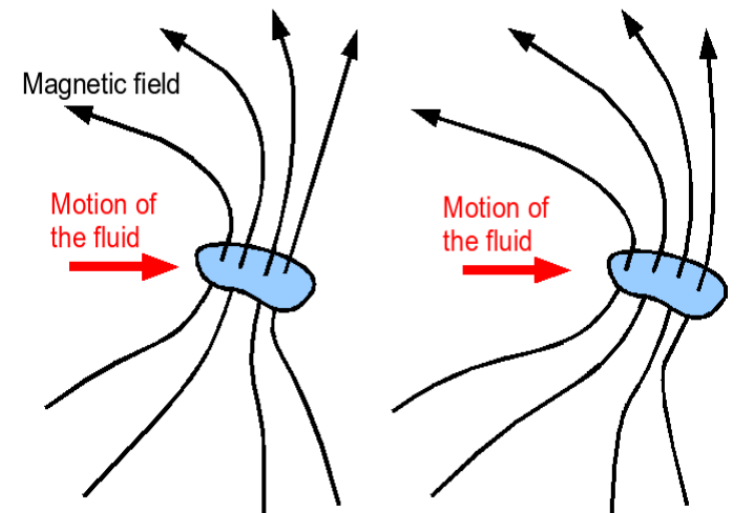
MHD idéale : les surfaces de flux sont gelées dans le flux de plasma.

$$\frac{d\psi}{dt} = 0$$

MHD résistive : le champ magnétique diffuse à travers le plasma sur une échelle de temps de l'ordre de la seconde.

$$\tau_B = \frac{\mu_0}{\eta} a^2$$

$$\begin{aligned} \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} &= \eta \vec{j} \\ \nabla \wedge \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$



Équations magnétohydrodynamiques stationnaire

Recherche des conditions d'un équilibre magnéto-hydrodynamique.

Le champ magnétique sera indépendant du temps :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

Ceci implique l'absence de champ électrique : $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \vec{E} = 0$
 $\vec{E} = \vec{0}$

L'équilibre sera aussi un équilibre statique :

$$\vec{u} = \vec{0}$$

Le système d'équations de l'équilibre magnétohydrodynamique :

- Équilibre des forces
(force de Laplace et de pression)
- Équation de Maxwell-Ampère
- Équation de Maxwell-Thomson

$$\vec{j} \wedge \vec{B} = \nabla P$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\rho \frac{du}{dt} = \vec{j} \wedge \vec{B} - \nabla P$$

Surfaces de flux magnétique

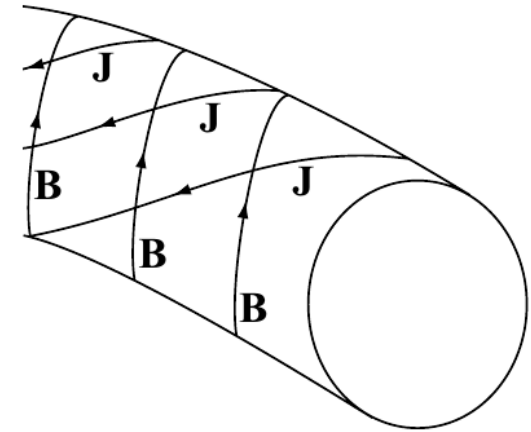
L'équation d'équilibre des forces $\vec{j} \wedge \vec{B} = \nabla P$ implique :

$$\vec{j} \cdot \nabla P = 0$$

$$\vec{B} \cdot \nabla P = 0$$

La pression est constante sur les surfaces de flux magnétique et de courant électrique.

Un gradient de pression n'est possible que si les courants magnétiques et électriques ne sont pas colinéaires.



J. Freidberg

Équilibre entre pression magnétique et pression cinétique

On utilise l'équation de Maxwell-Ampère : $\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$
 pour éliminer le courant dans l'équation de conservation du moment : $\vec{j} \wedge \vec{B} = \nabla P$

$$\frac{1}{\mu_0} (\nabla \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} = \nabla P$$

On applique la relation remarquable :

$$\nabla \left(\frac{B^2}{2} \right) = \vec{B} \wedge (\nabla \wedge \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}$$

pour aboutir à la relation d'équilibre sur la pression :

$$\nabla_{\perp} \left(P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) - \frac{B^2}{2\mu_0} \vec{k}_B = 0$$

où \vec{e}_B est la direction du champ magnétique : $\vec{e}_B = \frac{1}{B} \vec{B}$

\vec{k}_B est la courbure de la ligne de champ magnétique :

$$\vec{k}_B = \frac{1}{R_B} \vec{e}_n$$

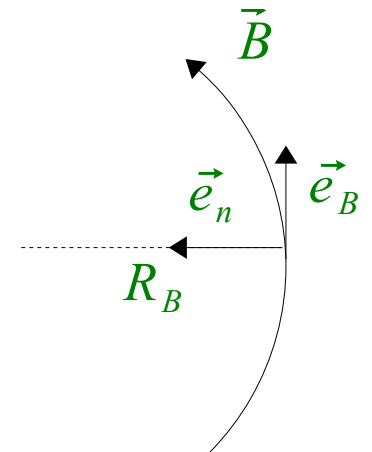
R_B est le rayon de courbure de la ligne de champ magnétique.

∇_{\parallel} est la composante du gradient dans la direction parallèle à \vec{B} :

$$\nabla_{\parallel} = \vec{e}_B (\vec{e}_B \cdot \nabla)$$

∇_{\perp} est le complément du gradient dans la direction perpendiculaire :

$$\nabla_{\perp} = \nabla - \vec{e}_B (\vec{e}_B \cdot \nabla)$$



Rapport entre pressions cinétique et magnétique

Équilibre sur la pression : $\vec{\nabla}_\perp \left(P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) - \frac{B^2}{2\mu_0} \vec{k}_B = 0$

La relation établit un équilibre entre la pression cinétique P et la pression magnétique qui apparaît comme son complémentaire :

$$P_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Le terme supplémentaire de la relation d'équilibre de pression est une tension induite par la courbure des lignes de champ : $-\frac{B^2}{2\mu_0} \vec{k}_B$

On se place dans le cas où l'effet de courbure est négligeable. En suivant la direction perpendiculaire à \vec{B} en direction de l'extérieur, on atteint la limite du plasma : $P=0$.

A cette position, $B = B_a$

Entre le plasma et le bord, on établit : $P + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{B_a^2}{2\mu_0}$

Ceci implique : $P \leq \frac{B_a^2}{2\mu_0}$

La pression cinétique reste toujours inférieure à la pression magnétique au bord (aux effets de courbure près).

On définit β une quantité adimensionnelle qui compare les pressions cinétique et magnétique :

$$\beta = \frac{2\mu_0 P}{B^2}$$

Configuration simple d'équilibre : le « θ pinch » (pincement)

La géométrie est cylindrique.

Le champ magnétique est axial : $\vec{B} = B_z(r) \vec{e}_z$

Le courant est azimutal : $\vec{j} = j_\theta(r) \vec{e}_\theta$

Champ et courant varient radialement.

L'équation de Maxwell-Ampère $\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ implique :

$$\frac{dB_z}{dr} = -\mu_0 j_\theta$$

Le champ magnétique décroît en direction de l'axe.

Comme le champ magnétique n'est pas courbé :

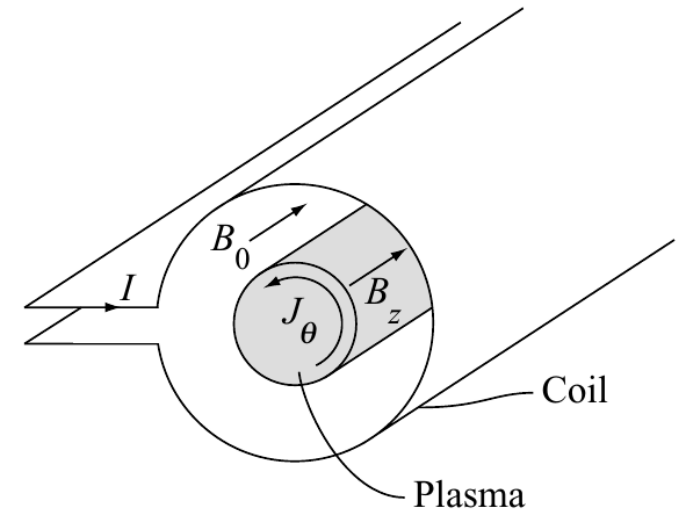
$$\frac{d}{dr} \left(P + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) = 0$$

La pression cinétique croît en direction de l'axe.

B_{za} est le champ magnétique hors du plasma ($P(a) = 0$) :

$$P(r) = \frac{B_{za}^2 - B_z(r)^2}{2\mu_0}$$

La pression cinétique est partout inférieure à la pression magnétique hors du plasma.



Configuration simple d'équilibre : le « z pinch »

La géométrie est cylindrique. Courant et champ varient radialement.

Le champ magnétique est azimutal : $\vec{B} = B_\theta(r) \vec{e}_\theta$

Le courant est axial : $\vec{j} = j_z(r) \vec{e}_z$

L'équation de maxwell-Ampère implique :

$$\mu_0 j_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_\theta)$$

L'équilibre des pressions s'écrit : $\vec{\nabla}_\perp \left(P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) - \frac{B^2}{2\mu_0} \vec{k}_B = 0$

$$\frac{d}{dr} \left(P + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) = - \frac{B_\theta^2}{2\mu_0 r}$$

Le terme de tension étant négatif, son effet est dirigé vers l'axe.

Pour une forme quadratique de courant dans le plasma (I_z est le courant total) :

$$j_z(r) = \frac{2I_z}{\pi a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \text{ pour } r \leq a \qquad j_z(r) = 0 \text{ pour } r \geq a$$

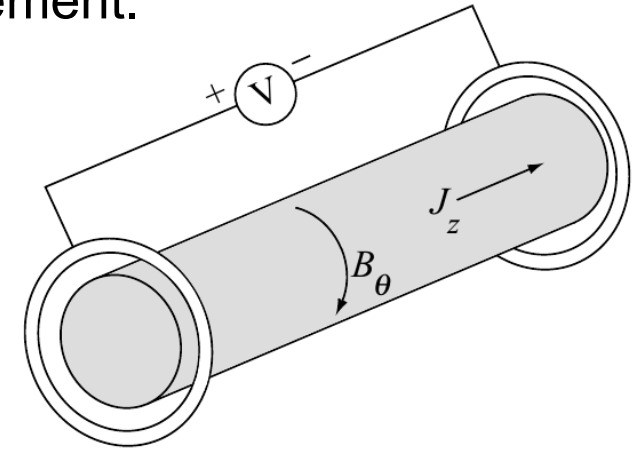
le champ magnétique a pour forme :

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I_z}{\pi a} \frac{r}{a} \left(1 - \frac{r^2}{2a^2} \right) \text{ pour } r \leq a \qquad B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I_z}{2\pi r} \text{ pour } r \geq a$$

la pression cinétique s'exprime :

$$P(r) = \frac{\mu_0 I_z^2}{12\pi^2 a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2 \left(5 - 2 \frac{r^2}{a^2} \right) \text{ pour } r \leq a \qquad P(r) = 0 \text{ pour } r \geq a$$

A l'extérieur du plasma, la pression magnétique est compensée par la tension de courbure.



Plan

- I Fusion et confinement magnétique

- II Stabilité MHD et transport
 - II.1 Équations de la Magnéto-HydroDynamique
 - II.2 Équilibre MHD du tokamak
 - 2.a Équilibre des pressions dans un tore
 - 2.b Forme des surfaces de flux
 - 2.c Contrôle de l'équilibre
 - II.3 Instabilités MHD
 - II.4 Limites de fonctionnement du tokamak
 - II.5 Transport, turbulence et simulation gyrocinétique

- III Chauffage et diagnostics de mesure

La pression cinétique dans un tore

La surface d'un tore de grand rayon R_0 et petit rayon r , diffère entre les côtés extérieur et intérieur :

$$S_{ext} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta R r$$

$$S_{ext} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\pi (R_0 + r \cos \theta) r d\theta \quad R = R_0 + r \cos \theta$$

$$S_{ext} = 2\pi r (\pi R_0 + 2r)$$

$$S_{int} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\pi (R_0 - r \cos \theta) r d\theta \quad R = R_0 - r \cos \theta$$

$$S_{int} = 2\pi r (\pi R_0 - 2r) \leq S_{ext}$$

Force totale due à la pression cinétique :

la composante verticale est nulle par symétrie du tore.

La composante radiale est différente entre le côté extérieur et le côté intérieur :

$$F_{ext} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P \cos \theta 2\pi (R_0 + r \cos \theta) r d\theta$$

$$F_{ext} = \pi P r (4R_0 + \pi r)$$

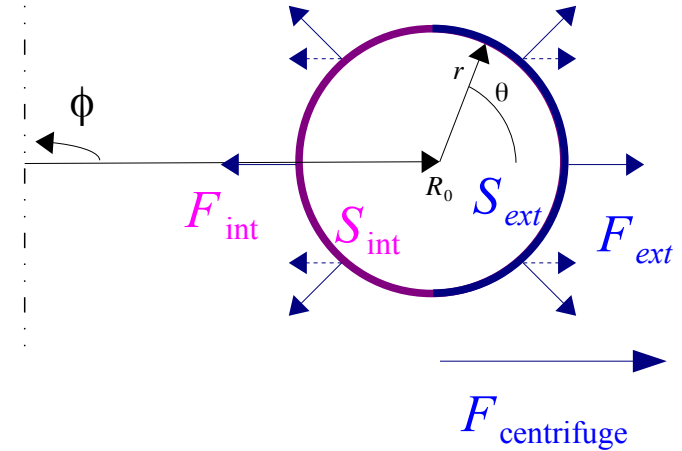
$$F_{int} = -\pi P r (4R_0 - \pi r)$$

L'intégrale de la pression cinétique sur l'ensemble du tore a une résultante centrifuge :

$$F_{centrifuge} = F_{ext} + F_{int} = 2\pi^2 r^2 P$$

La pression cinétique tend à pousser le plasma vers l'extérieur.

Cette résultante est inhérente à la forme torique du plasma.



La pression magnétique : composante toroïdale

La pression magnétique peut se décomposer suivant les 2 composantes du champ :

$$P_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{B_\phi^2}{2\mu_0} + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0}$$

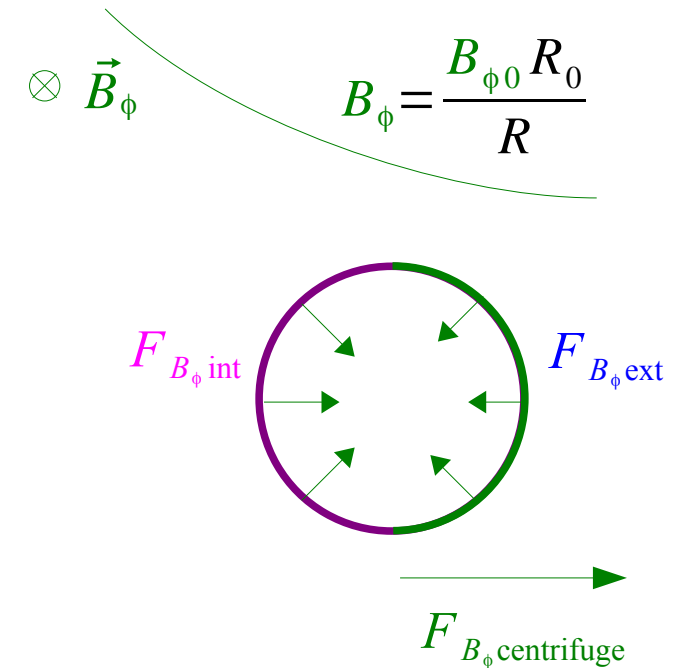
La force résultante de la pression magnétique pour la composante toroïdale, diffère entre les côtés extérieur et intérieur :

$$F_{B_\phi \text{ ext}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_{B_\phi} \cos \theta \, 2\pi (R_0 + r \cos \theta) r \, d\theta$$

$$P_{B_\phi} = \frac{B_\phi^2}{2\mu_0} = \frac{B_{\phi 0}^2 R_0^2}{2\mu_0 R^2} = P_{B_{\phi 0}} \frac{R_0^2}{R^2}$$

$$F_{B_\phi \text{ ext}} = -P_{B_{\phi 0}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \, 2\pi \frac{R_0^2}{R_0 + r \cos \theta} r \, d\theta$$

$$F_{B_\phi \text{ int}} = P_{B_{\phi 0}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \, 2\pi \frac{R_0^2}{R_0 - r \cos \theta} r \, d\theta > -F_{B_\phi \text{ ext}}$$



L'intégrale de la pression magnétique sur l'ensemble du tore a une résultante centrifuge : La pression magnétique, pour sa composante toroïdale tend à pousser le plasma vers l'extérieur.

Cette résultante est inhérente à la décroissance radiale du champ magnétique toroïdale

La pression magnétique : composante poloïdale

Si le courant plasma (toroïdal) \vec{I}_ϕ est **uniforme** dans la section poloïdale du plasma, comme ce courant a une forme torique, le champ magnétique poloïdal \vec{B}_θ qu'il génère hors du plasma décroît avec le grand rayon :

$$B_\theta \sim \frac{\mu_0 I_\phi}{2R}$$

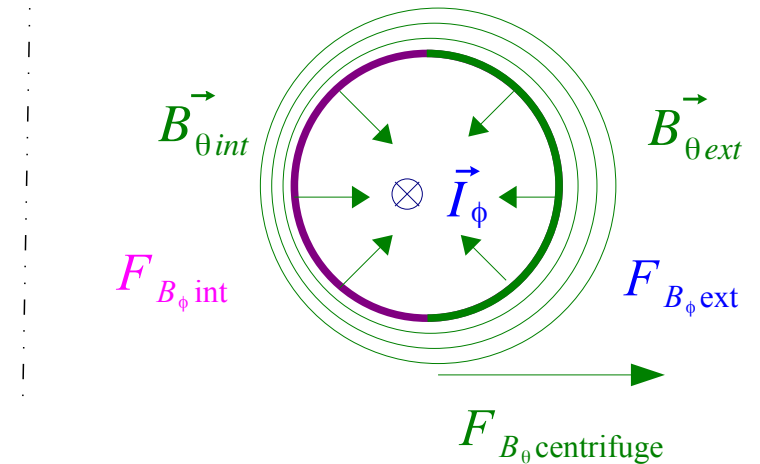
Le champ magnétique poloïdal varie avec le grand rayon de manière semblable à sa composante toroïdale. L'intégrale de la pression magnétique poloïdale sera plus grande côté intérieur que côté extérieur :

$$F_{B_\theta \text{int}} + F_{B_\theta \text{ext}} > 0$$

L'intégrale de la pression magnétique poloïdale sur l'ensemble du tore a une résultante centrifuge.

Si le courant plasma toroïdal est uniforme sur le plasma, la pression magnétique poloïdale tend à pousser le plasma vers l'extérieur.

Cette résultante pourra être modifiée si la forme du courant toroïdal \vec{I}_ϕ est décentré ou si un champ poloïdal est ajouté à celui généré par le plasma.



Stabilisation passive : la paroi conductrice

Les pressions cinétiques et magnétiques tendent à pousser le plasma vers l'extérieur.

Le plasma est entouré par une paroi résistive : le champ magnétique poloïdal ne pourra pénétrer le métal de la paroi.

Quand le plasma est poussé vers l'extérieur, les lignes de champ de la composante poloïdale du champ magnétique sont compressées entre le plasma et la paroi : le champ magnétique poloïdal augmente côté extérieur et baisse côté intérieur.

La force résultant de la pression magnétique poloïdale change de direction : elle devient centripète.

La méthode est inadaptée pour les temps longs : elle est valable que sur des temps inférieurs au temps nécessaire à la paroi pour développer une résistante.

La méthode a été utilisée sur les premiers tokamaks pour obtenir un équilibre MHD

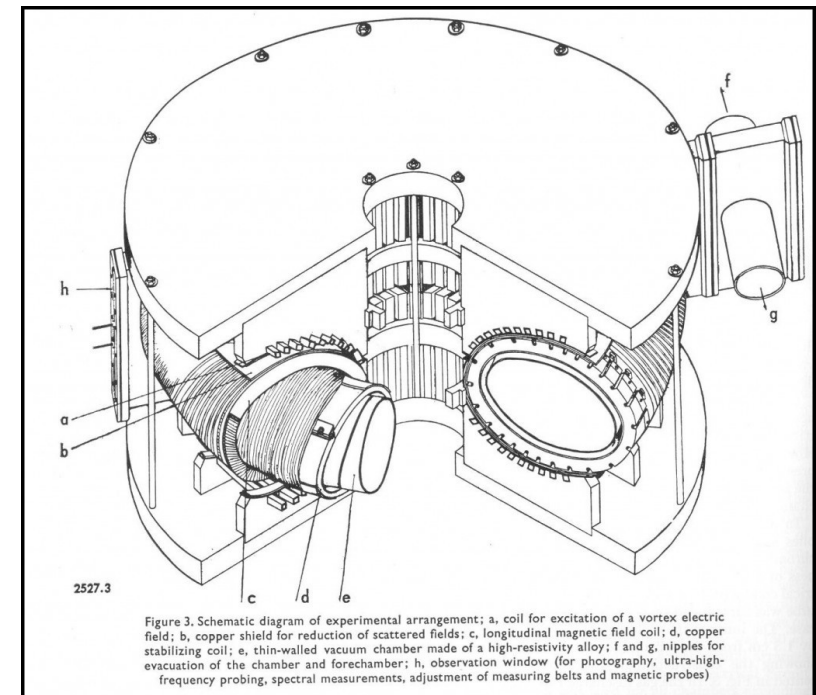
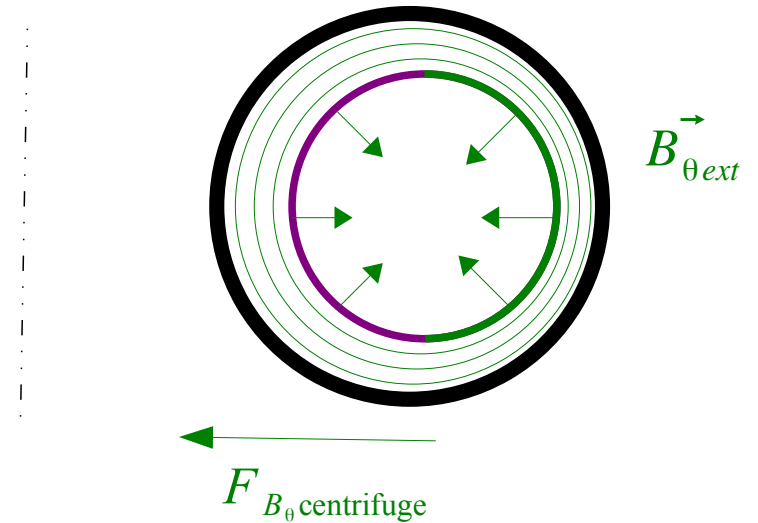


Figure 3. Schematic diagram of experimental arrangement; a, coil for excitation of a vortex electric field; b, copper shield for reduction of scattered fields; c, longitudinal magnetic field coil; d, copper stabilizing coil; e, thin-walled vacuum chamber made of a high-resistivity alloy; f and g, nipples for evacuation of the chamber and forechamber; h, observation window (for photography, ultra-high-frequency probing, spectral measurements, adjustment of measuring belts and magnetic probes)

Tokamak T1 : chambre vide en alliage à forte résistivité

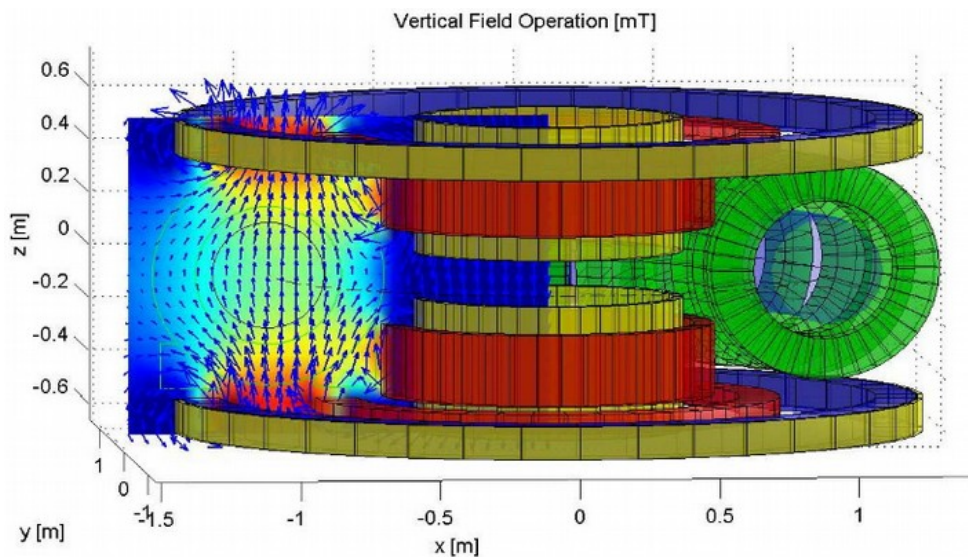
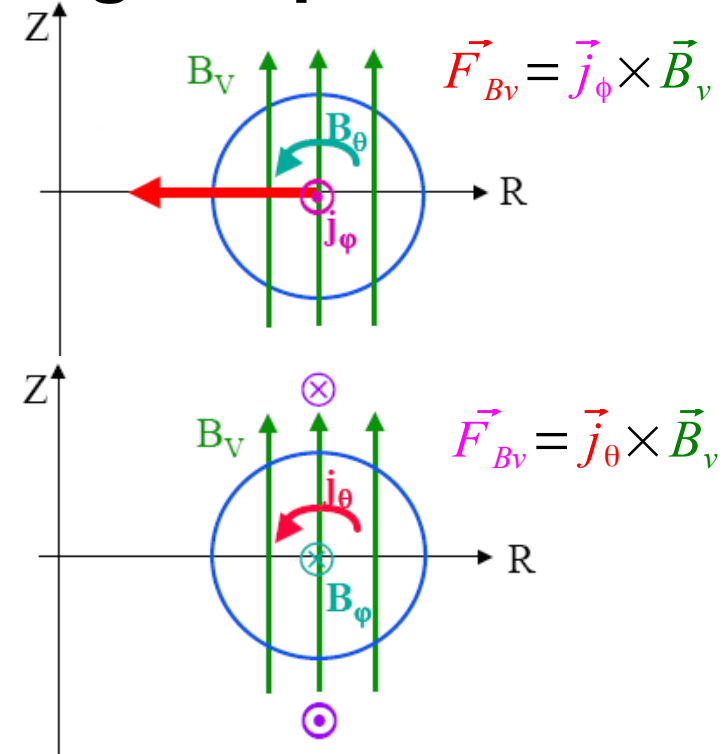
Stabilisation active : ajout d'un champ magnétique vertical

Le plasma peut aussi être stabilisé par l'ajout d'un champ magnétique vertical

L'effet est présent par la force de Laplace.

$$\vec{F}_{Bv} = \vec{j} \wedge \vec{B}_v$$

La force due au croisement du champ magnétique vertical avec le courant plasma toroïdale crée une force centripète. Le croisement avec le courant poloïdal n'a pas d'effet sur la forme du plasma

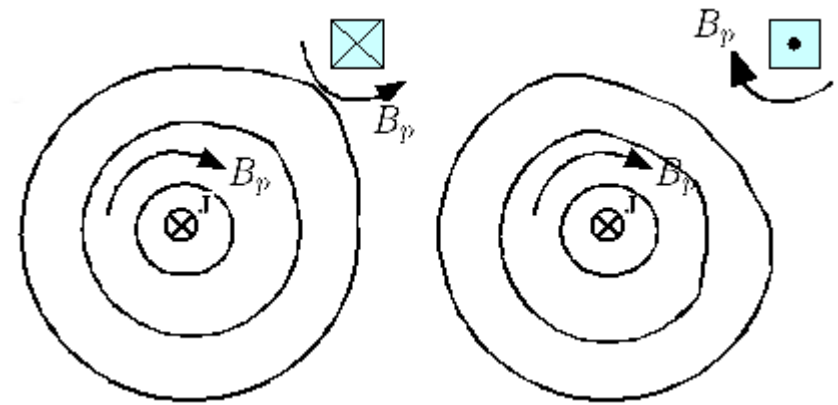


Ce champ magnétique vertical pourra être créé par des 2 bobines toroïdales horizontales, placées en bobines de Helmholtz.

S. H. Müller IAEA (2005) CRPP-EPFL : TORPEX

Contrôle et modelage actifs par des bobines toroïdales

Le courant dans des bobines toroïdales extérieures a pour effet d'attirer, si le courant tourne dans le même sens que le courant toroïdal du plasma, ou de le repousser dans le cas contraire.



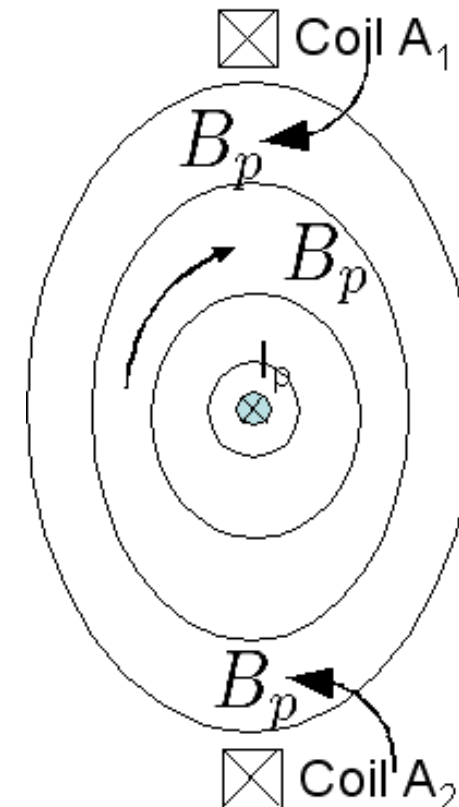
Contrôle de la position du plasma

Cette propriété permet de contrôler la position du plasma dans la chambre, d'éviter qu'il n'approche des parois.

Modelage du plasma

Cette propriété permet aussi de donner au plasma une forme choisie (« plasma shaping »).

Des bobines placées au dessus et en dessous du plasma, avec un courant dans le même sens que le courant toroïdal du plasma permettent par exemple l'élongation du cœur du plasma.



Arthur G. Peeters,
Warwick Univ.

Équation de Grad-Shafranov

On recherche un équilibre axisymétrique (indépendant de ϕ).

On introduit 2 flux définis à travers un disque toroïdal :

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_R} \vec{B}_\theta \cdot \vec{ds}$$

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_R} \vec{j}_\theta \cdot \vec{ds}$$

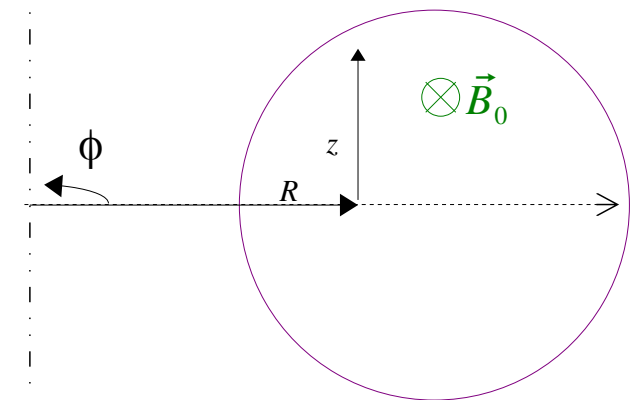
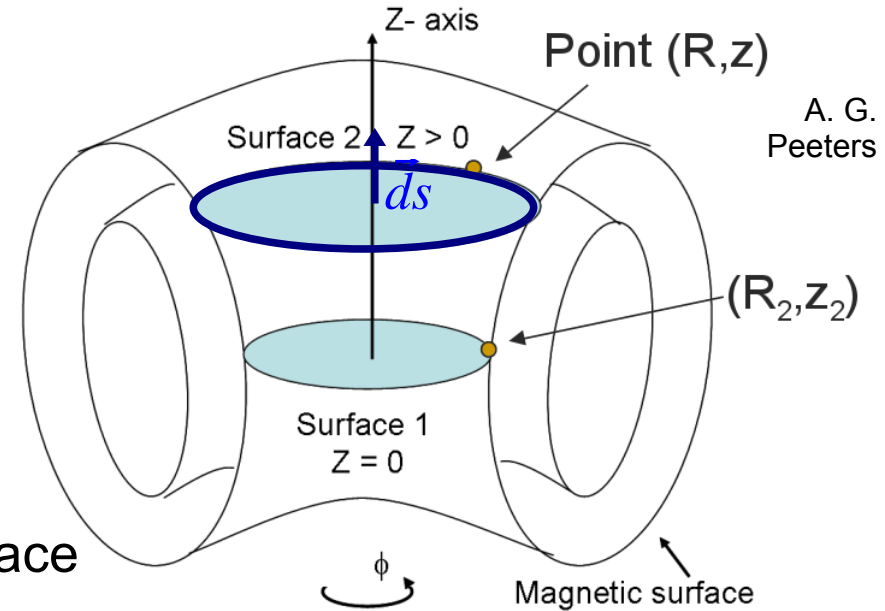
ψ et ξ sont constants sur une surface de flux magnétique.

P et ξ peuvent alors être exprimés en fonction de ψ : $P = P(\psi)$ $\xi = \xi(\psi)$

On montre que ces 3 variables constantes sur la surface de flux sont l'équation de Grad-Shafranov :

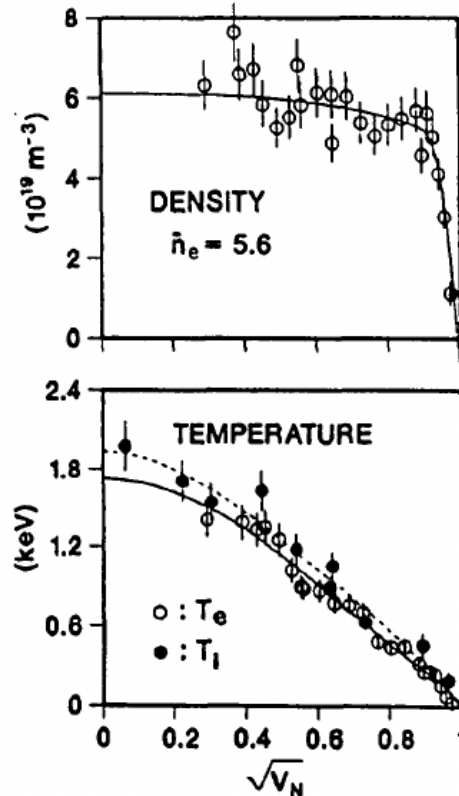
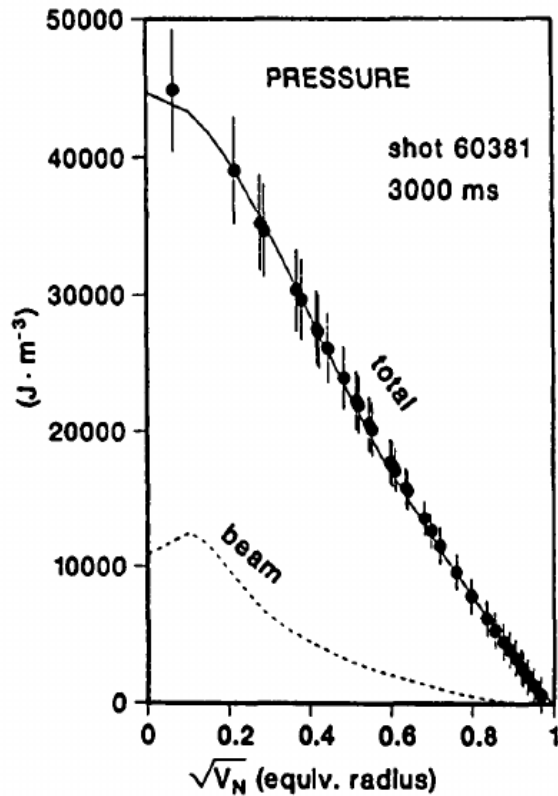
$$R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\mu_0 R^2 \frac{dP}{d\psi} - \mu_0^2 \xi \frac{d\xi}{d\psi}$$

Si on connaît un profil de la pression et un profil du courant poloïdal, et la forme du champ magnétique poloïdal au bord, on peut reconstruire les surfaces de flux magnétique du plasma.

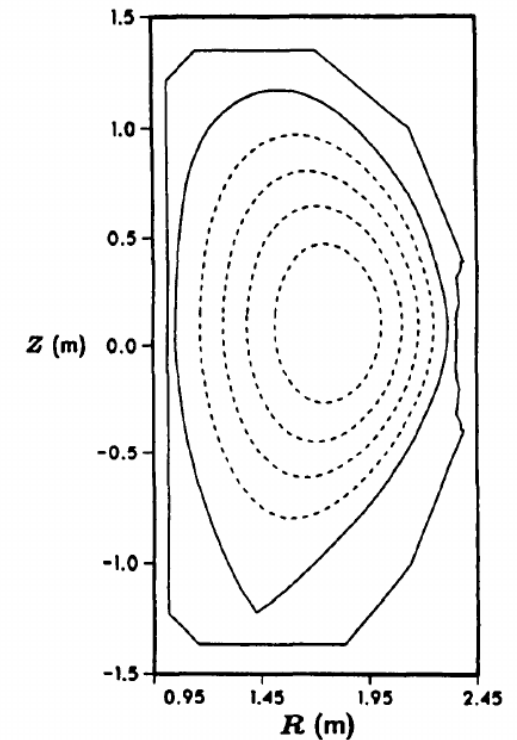
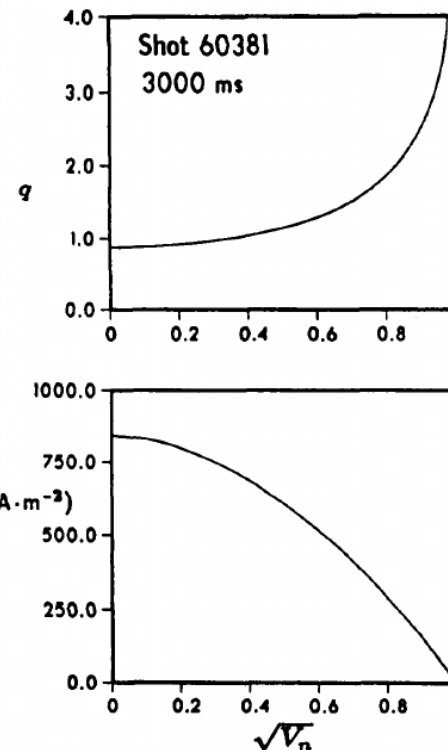


Rôle de la modélisation MHD

L'équation de Grad-Shafranov permet de reconstruire la forme des surfaces de flux, à partir des données du champ magnétique au bord, et de la forme du profil radial de la pression et du courant.



Profil radial de P
estimé à partir de ceux de T_e et n_e



Profil de q et j_ϕ ,
et surfaces de flux ψ
reconstruits

Forme du plasma : Forme circulaire à limiteur

Dans la forme la plus simple, les surfaces de flux de l'équilibre MHD prend une forme de tores emboîtés quasi concentriques.

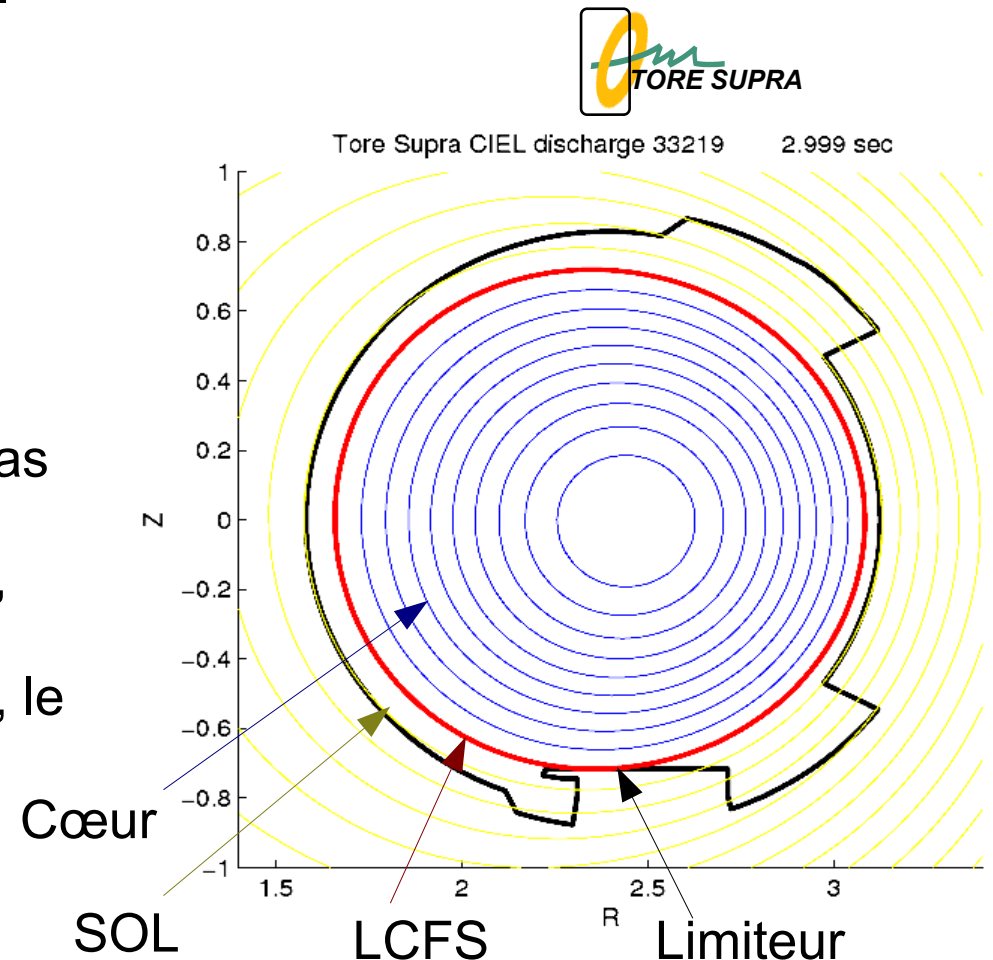
Les tubes ne peuvent pas être réellement concentriques à cause de la force centrifuge due aux pressions cinétique et magnétique toroïdale.

Le Tokamak Tore Supra a cette configuration.

Pour cette configuration, une surface de flux jouera un rôle particulier, c'est la première qui effleure la paroi intérieure de la chambre : elle est la dernière surface magnétique fermée (LCFS, Last Closed Flux Surface). la paroi en contact s'appelle le limiteur.

Toutes les surfaces à l'intérieur ne touchent pas les bords : c'est le cœur du plasma.

Les surfaces à l'extérieur interceptent la paroi, c'est la « Scrape Off Layer » (SOL, couche « éraflante »). Du fait du contact avec la paroi, le plasma y est très différent de celui du cœur.



Équilibre MHD typique dans Tore Supra

Exemple d'équilibre MHD de Tore Supra

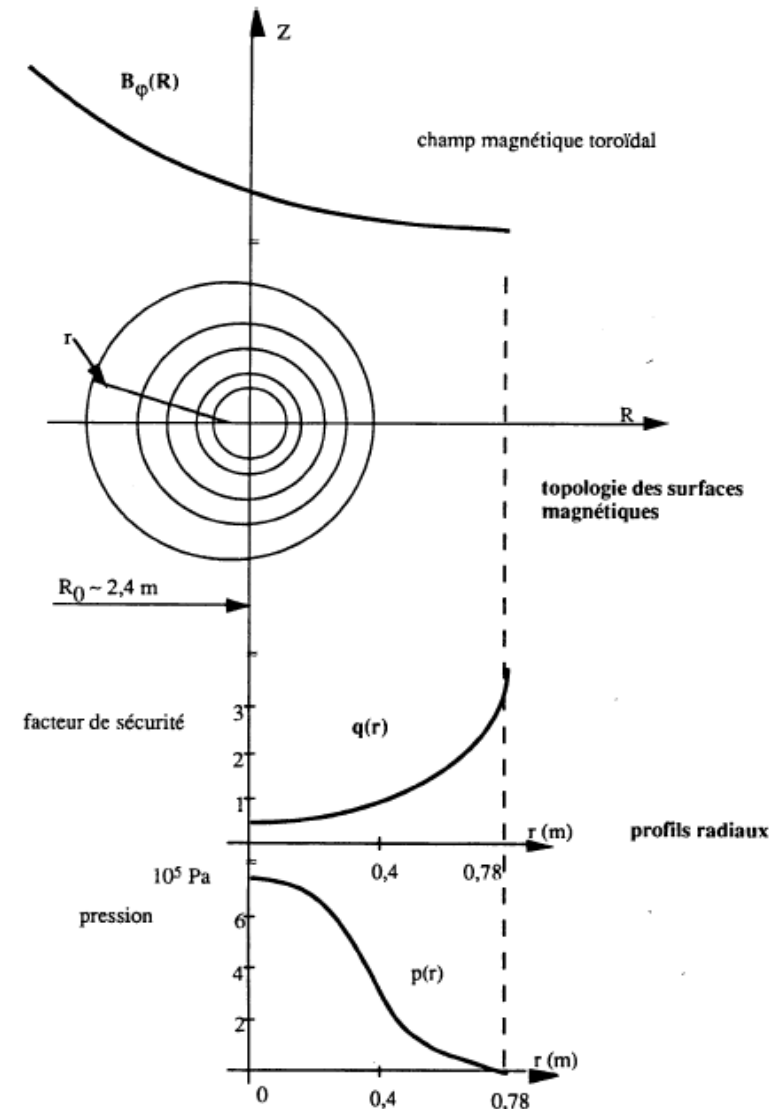
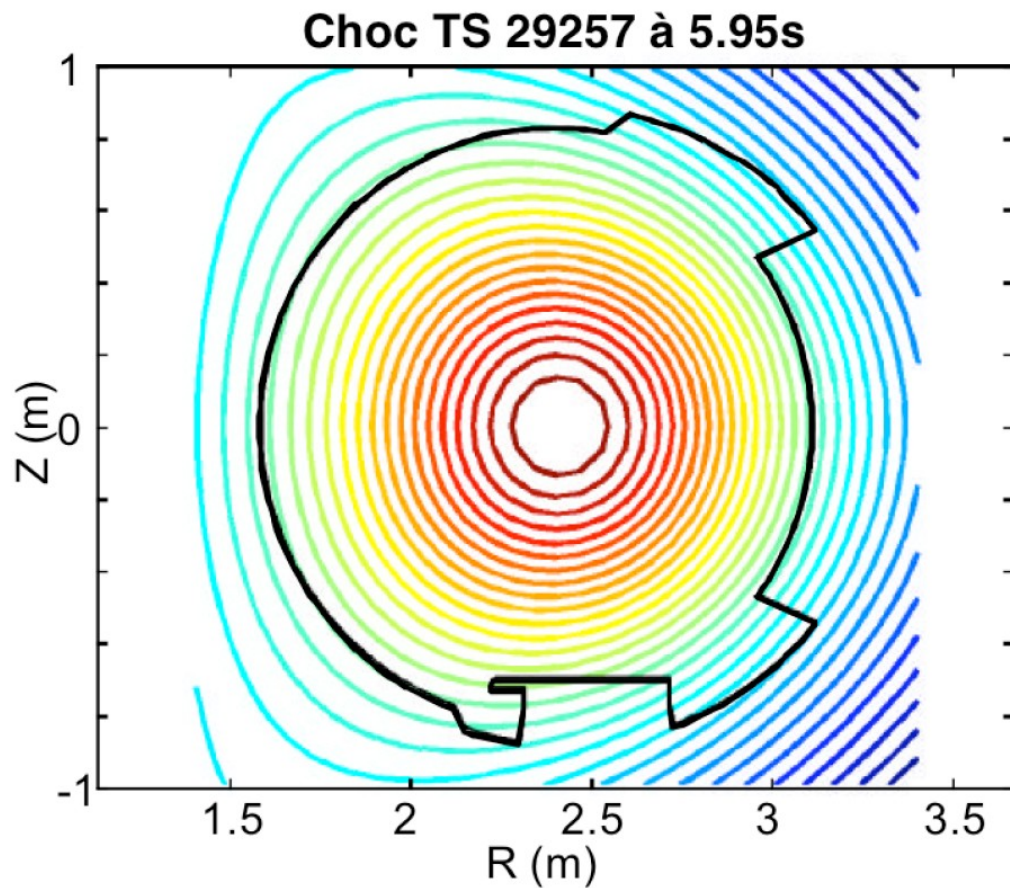


FIG. 1.6 – Équilibre magnétique typique du tokamak Tore Supra.

Plasma avec divertor

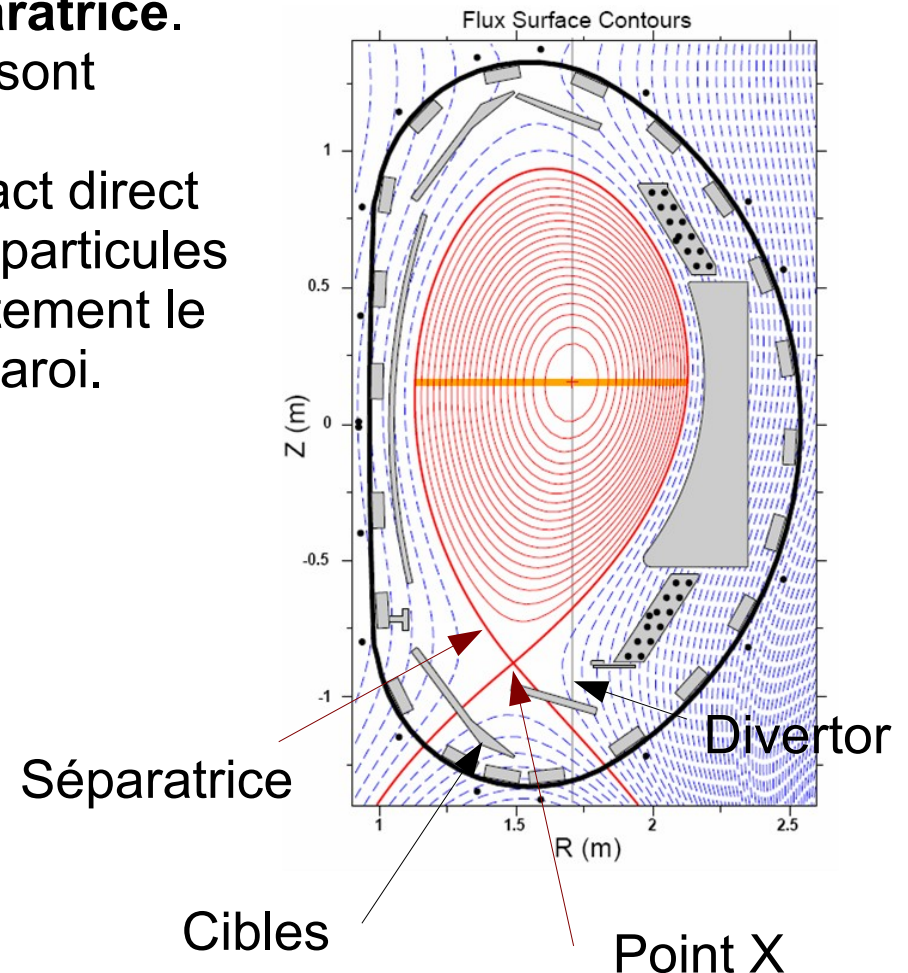
Pour favoriser la stabilité du plasma, il est intéressant d'allonger le plasma verticalement. Les bobines toroïdales de modelage du plasma, permettent de créer un **point X** pour le champ magnétique poloïdal.

Cette configuration magnétique s'appelle un **divertor** (« déviateur »).

La surface de flux passant par le point X est la **séparatrice**.

La boucle principale contient le cœur du plasma où sont emboîtées les surfaces de flux fermées.

Cette configuration permet de ne plus avoir de contact direct entre le cœur du plasma et la paroi (les cibles). Les particules neutres arrachées de la paroi n'atteignent pas directement le cœur. Le plasma de cœur est mieux protégé de la paroi.



Élongation du plasma

L'élongation verticale du plasma a plusieurs intérêts.

Elle permet de plus facilement créer le « divertor » en point X au dessus ou en dessous.

Pour un même profil de q , le courant plasma toroïdal peut être plus grand.

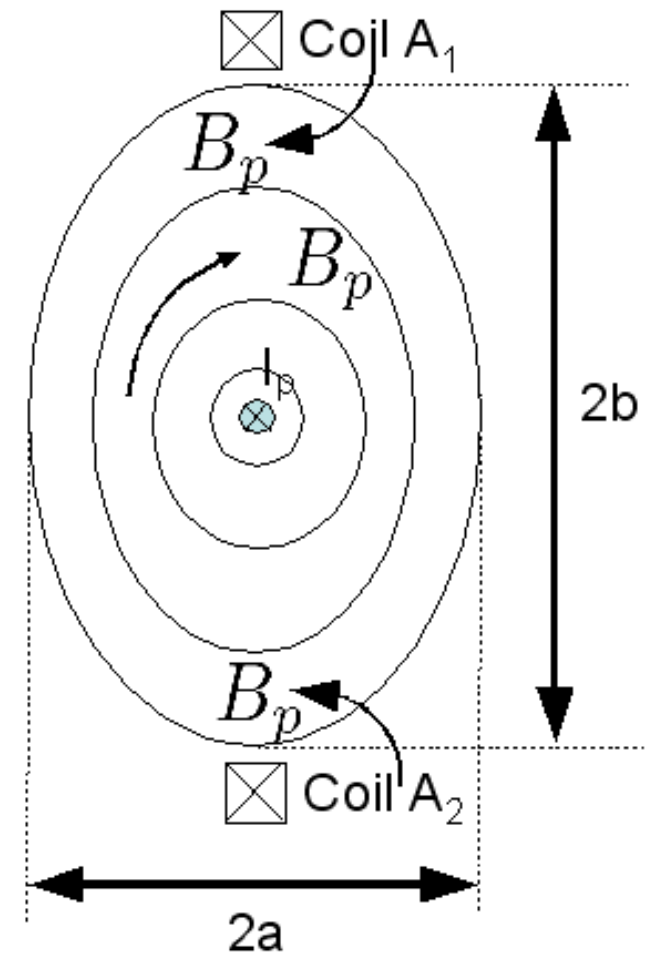
Plasma circulaire : $q = \frac{r B_\theta}{R B_\phi} = \frac{2 \pi r^2 B_\phi}{\mu_0 R I_\phi}$ $B_\theta(r) = \frac{\mu_0}{2 \pi r} I_\phi(r)$

Plasma allongé : $q = \frac{2 \pi a b B_\phi}{\mu_0 R I_\phi}$

Si les courants dans les 2 bobines au dessus et en dessous du plasma sont les mêmes, le plasma n'est pas déséquilibré verticalement.

On peut jouer sur la différence de courant entre les 2 bobines pour corriger la position verticale du plasma.

Élongation du plasma : $\kappa_a = b/a$



Exemple de contrôle du plasma : JT-60SA

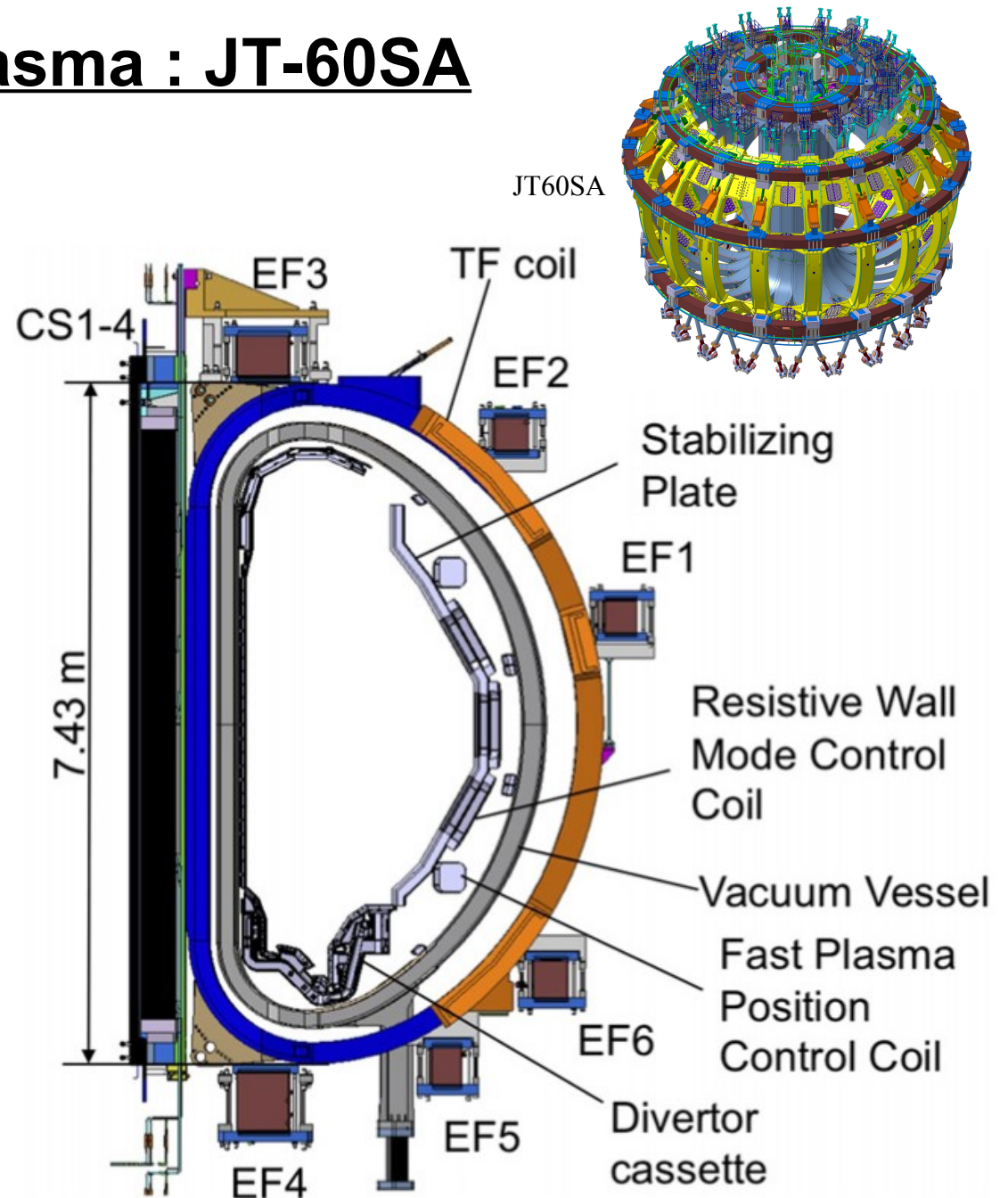
Le champ magnétique toroïdal est généré par les bobines de forme poloïdale (TF).

Le courant plasma toroïdal est induit dans le plasma par le solénoïde central (CS).

La position et l'équilibre sont contrôlés activement par les bobines EF (« Equilibrium Field ») et les bobines de contrôle rapide, placées à l'intérieur de la chambre près du plasma.

L'équilibre est contrôlé passivement une paroi résistive (« stabilizing plate »).

Un « divertor » est placé dans la zone basse de la chambre



Plan

- **I Fusion et confinement magnétique**

- **II Stabilité MHD et transport**
 - **II.1 Équations de la Magnéto-HydroDynamique**
 - **II.2 Équilibre MHD du tokamak**
 - **II.3 Instabilités MHD**
 - **3.a Instabilités de courant et de pression**
 - **3.b Instabilités résistives**
 - **II.4 Limites de fonctionnement du tokamak**
 - **II.5 Transport, turbulence et simulation gyrocinétique**

- **III Chauffage et diagnostics de mesure**

Instabilités MHD

Instabilités idéales générées par la pression :

Ils s'agit d'instabilités liées à la pression et la partie perpendiculaire du courant, liés par l'équation : $\vec{j}_\perp \wedge \vec{B} = \nabla P$ (par définition $\vec{j}_\parallel \wedge \vec{B} = 0$).

La croissance de l'instabilité dépend du gradient de pression et de la courbure du champ magnétique. Ces instabilités se divisent en 2 sous-classes :

- le mode « **d'interchange** »
- le mode « **ballooning** » (ballonnement)

Ces instabilités sont généralement internes : elles ne modifient pas la forme extérieure du plasma, mais elles peuvent avoir des conséquences sur la qualité du confinement.

Pour les éviter, il faut rester sous **un seuil sur le rapport de pressions β** .

Instabilités idéales générées par le courant :

Elles sont liées à la partie parallèle du courant, \vec{j}_\parallel . Elles sont indépendantes de β . Mais, pour les éviter, il faudra éviter de dépasser un **seuil sur le facteur de sécurité q** .

Ce sont essentiellement des modes de torsion (« kink ») externes. Elles sont dangereuses, car la forme extérieure du plasma peut changer et cela peut entraîner un arrêt brutal de la décharge (« **disruption** »).

Instabilités résistives :

Instabilités liées à la présence d'une résistivité non nulle du plasma : la structure des surfaces de flux magnétique peut être déformée. Il s'agit par exemple des modes de déchirement (« **tearing** »), localisés autour d'une surface de flux interne au plasma.

Modèle simple du mode de torsion « kink »

Pour modéliser le plus simplement le mode de torsion, on considère un fil initialement rectiligne de courant I_0 , aligné sur un champ magnétique B_0 (direction \vec{e}_z).

Le fil subit une déformation de forme hélicoïdale. Le décalage du fil est donné par :

$$\vec{\xi}(z, t) = \xi(t) \vec{e}_n(z) = \xi(t) [\cos kz \vec{e}_x + \sin kz \vec{e}_y]$$

La modification du courant par rapport au courant initial est :

$$\vec{I}_\xi(z, t) = I_0 \frac{d\vec{\xi}(t)}{dz} = I_0 k \xi(t) [-\sin kz \vec{e}_x + \cos kz \vec{e}_y]$$

Cette modification ajoute une force de Laplace (par unité de longueur) :

$$\frac{d\vec{F}}{dz} = \vec{I}_\xi(z, t) \wedge B_0 \vec{e}_z = I_0 B_0 k \xi(t) [\sin kz \vec{e}_y + \cos kz \vec{e}_x] = I_0 B_0 k \xi \vec{e}_n$$

La force déplace le fil de courant (principe fondamental de la dynamique) :

$$\frac{d\vec{F}}{dz} = \frac{dm}{dz} \frac{d^2\xi}{dt^2} \vec{e}_n$$

La masse par unité de longueur, peut être ramenée à la densité de courant J_0

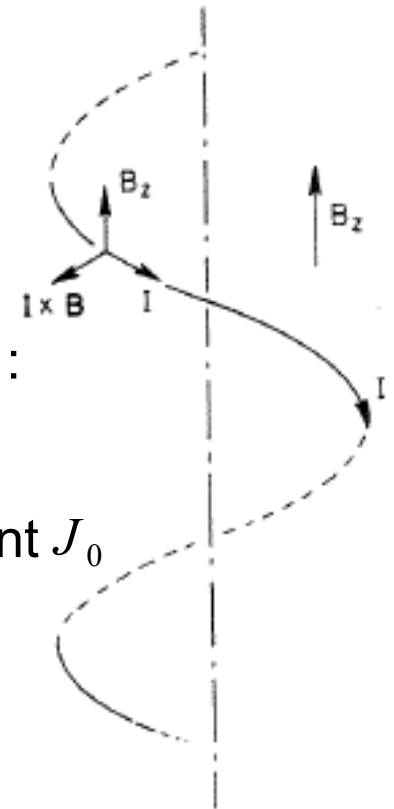
$$dm/dz = S n_0 m_i \quad S, \text{ surface du fil : } I_0 = S J_0 \quad dm/dz = I_0 n_0 m_i / J_0$$

La dynamique du déplacement du fil de courant est donnée par :

$$\frac{dm}{dz} \frac{d^2\xi}{dt^2} = I_0 B_0 k \xi \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{J_0 B_0 k}{n_0 m_i} \xi$$

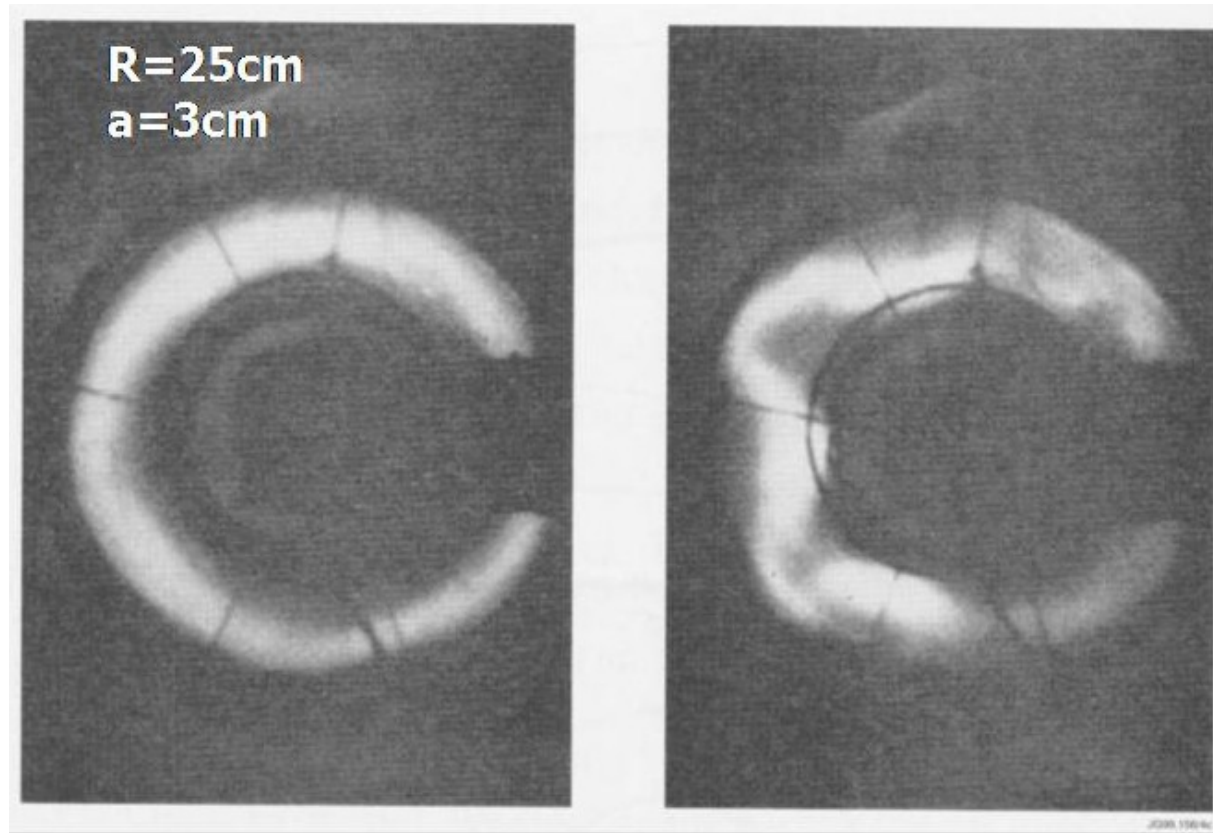
La torsion de la boucle croît exponentiellement:

$$\xi(t) = \xi(0) e^{\gamma t} \quad \gamma = \sqrt{\frac{J_0 B_0 k}{n_0 m_i}}$$



Instabilités MHD idéales

L'instabilité de torsion a été observée sur une décharge z-pinch dans un tube de pyrex de forme torique (UK, 1952).



Dans un tokamak, la paroi conductrice jouera un rôle stabilisateur pour éviter le développement de cette instabilité.

Il impose que la valeur du facteur de sécurité ne soit pas trop grande : $q \leq 3$

Pour un tokamak de rapport d'aspect $\epsilon = r/R \sim 0,3$

Le rapport entre les champs magnétiques vaut :

$$\frac{B_{\theta}}{B_{\phi}} = \frac{r}{Rq} \sim 0,1$$

Instabilité d'interchange

L'instabilité d'interchange est due à la dérive de gradient et de courbure de champ :

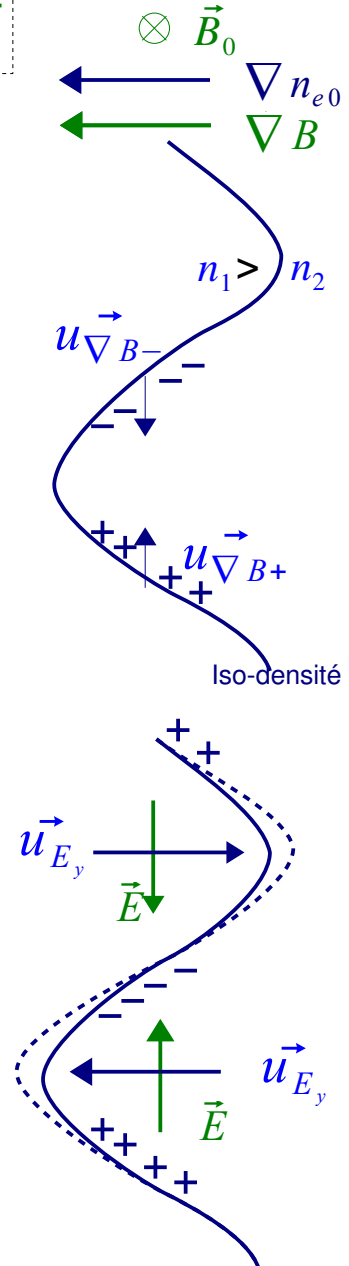
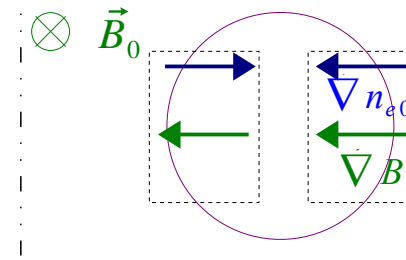
$$\vec{u}_{\nabla B \alpha} = \left(\frac{u_{\parallel \alpha}^2}{\omega_{c \alpha}} + \frac{u_{\perp \alpha}^2}{2 \omega_{c \alpha}} \right) \frac{\vec{B} \wedge \vec{\nabla} B}{B^2}$$

On considère le côté extérieur du tokamak, où les gradients de densité et de champ magnétique toroïdal sont orientés dans le même sens. La densité est altérée par une oscillation : la ligne iso-densité n'est pas une ligne verticale droite dans la section poloïdale, mais elle aussi oscille. La densité est légèrement plus grande à gauche de la ligne. La dérive de gradient et de courbure de champ magnétique a pour effet de séparer légèrement les charges le long de la ligne iso-densité, à cause de la différence de densités entre les 2 côtés de la ligne. Cette séparation de charges fait apparaître un champ électrique oscillant le long de la ligne iso-densité. Ce champ électrique induit une dérive de champs croisés $\vec{E} \times \vec{B}$, oscillante, elle aussi :

$$\vec{u}_{E_y} = \frac{\vec{E}_z \wedge \vec{B}}{B^2}$$

Cette dérive a pour effet d'accentuer l'oscillation de la ligne iso-densité : Le phénomène est instable.

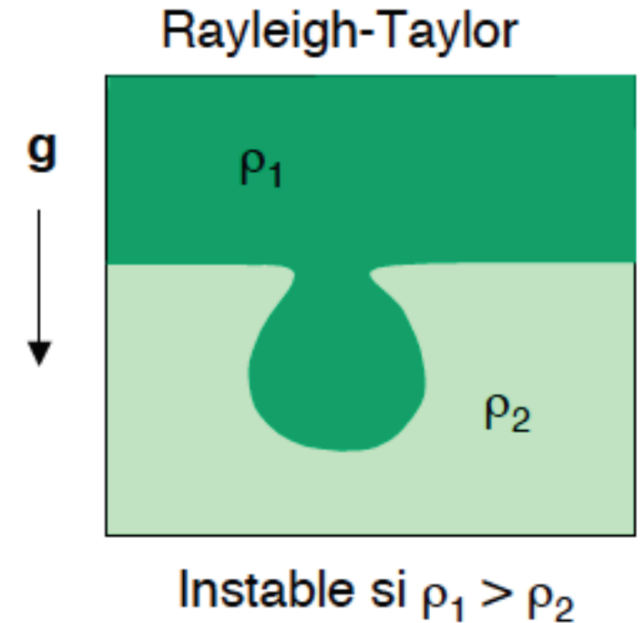
Si les gradients ont des directions opposées (c'est le cas côté intérieur du tore), la dérive a au contraire un effet stabilisant.



L'instabilité d'interchange et Rayleigh-Taylor

L'instabilité d'interchange est analogue à l'instabilité de Rayleigh-Taylor en hydrodynamique.

L'instabilité de Rayleigh-Taylor est l'instabilité qui apparaît quand on place deux fluides de densités différentes l'un au dessus d'un autre : c'est instable quand le fluide le plus dense est au dessus, c'est à dire quand le gradient de densité et la force de pesanteur s'oppose.



L'analogie vient de ce que la dérive due au gradient et à la courbure de champ magnétique est analogue à la dérive due à une force comme la gravitation :

$$u_{\nabla B \alpha}^{\rightarrow} = \left(\frac{u_{\parallel \alpha}^2}{\omega_{c\alpha}} + \frac{u_{\perp \alpha}^2}{2\omega_{c\alpha}} \right) \frac{\vec{B} \wedge \vec{\nabla} B}{B^2} \quad u_{g \perp \alpha}^{\rightarrow} = u_{gxB}^{\rightarrow} = \frac{m_\alpha}{q_\alpha} \frac{\vec{g} \wedge \vec{B}}{B^2}$$

l'analogie est vérifiée pour :

$$\vec{g} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\frac{u_{\parallel \alpha}^2}{\omega_{c\alpha}} + \frac{u_{\perp \alpha}^2}{2\omega_{c\alpha}} \right) \vec{\nabla} B$$

La gravitation a alors la direction opposée au gradient de champ magnétique : elle est dirigée radialement vers l'extérieur.

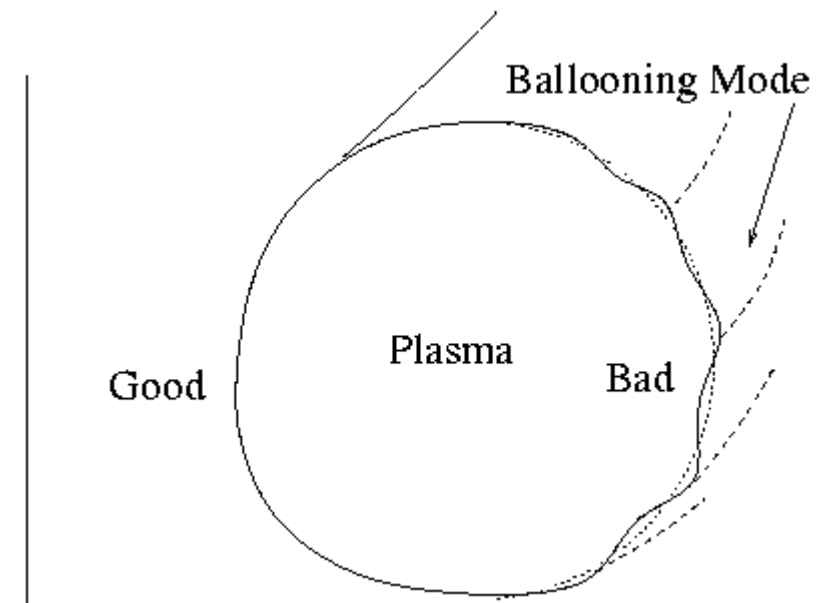
Instabilité de ballonnement

L'instabilité de ballonnement est une instabilité d'interchange généralisée.

Il prend en compte aussi un gradient de pression et l'effet de la dérive due à la courbure et au gradient de champ magnétique.

Elle ajoute une **déformation de la ligne de champ poloïdale**, qui introduit des zones de courbure accentuée. Ces variations de courbure ajoute de l'instabilité quand le gradient de pression et le gradient de champ magnétique ont la même direction.

Comme l'instabilité d'interchange, le mode de ballonnement est instable côté extérieur du tore, du côté des faibles champs magnétiques.



I.H. Hutchinson, introduction to plasmas (2001)

Instabilité de déchirement

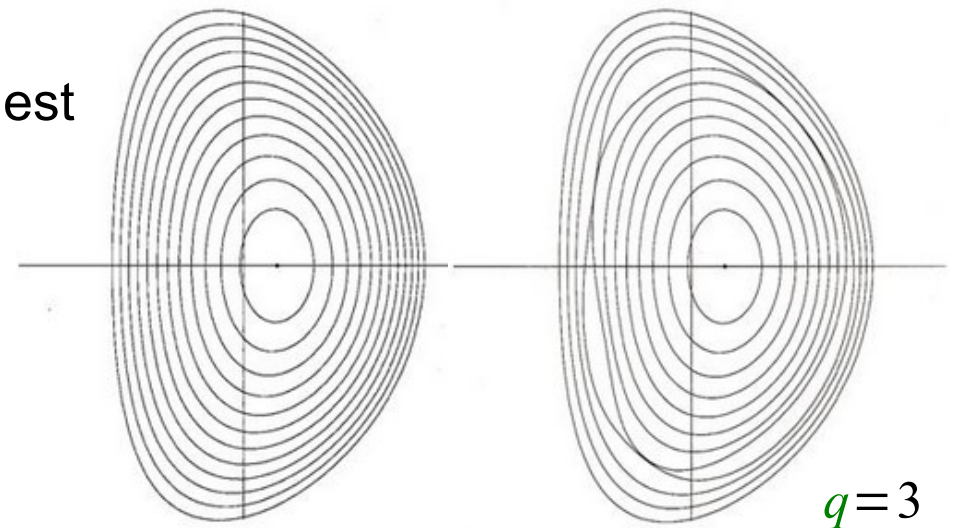
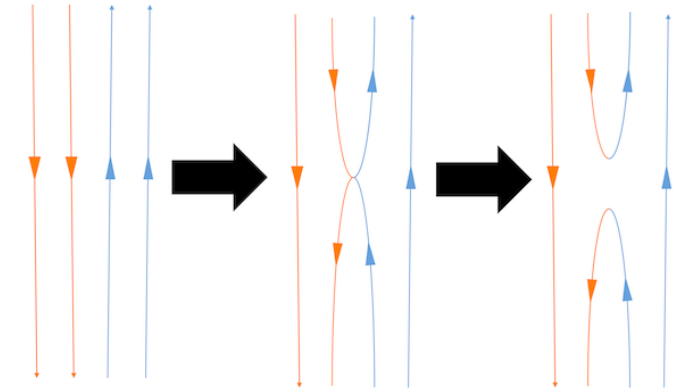
Le mode de déchirement est impossible en MHD idéal. Il est lié à la reconnexion des lignes de champ magnétique, qui apparaît sous certaines conditions et nécessite la prise en compte d'une résistivité finie du plasma.

Ces reconnexions peuvent apparaître au cœur du plasma de tokamak mais à condition que la valeur de q à la position soit rationnelle (un rapport de nombre entiers pas trop grands) :

$$q = \frac{n}{m}$$

Le nombre de structures possibles poloïdalement est alors un multiple de n .

Ces structures sont appelées **îlots magnétiques**.



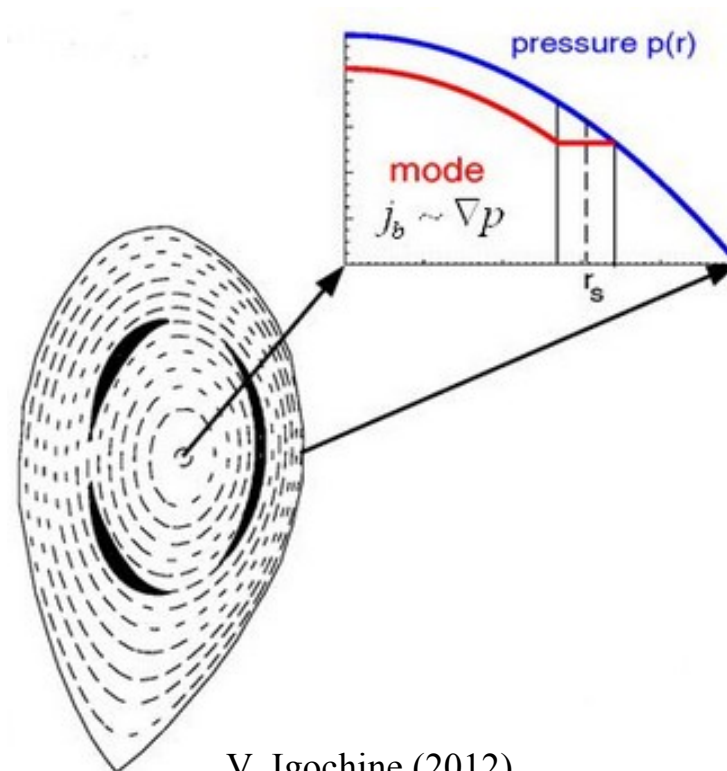
P. R. Garabedian, ISHW (2011)

Mode de déchirement et confinement

Les modes de déchirement ont un effet sur le confinement du plasma.

Comme les surfaces de flux ne sont plus emboîtées les unes dans les autres, mais sont connectées sur une certaine épaisseur du plasma, la pression devient constante dans cette zone. Plus l'îlot est large radialement, plus la zone d'homogénéité de la pression est grande.

De ce fait, la pression au centre du plasma est plus faible que sans îlots magnétiques.

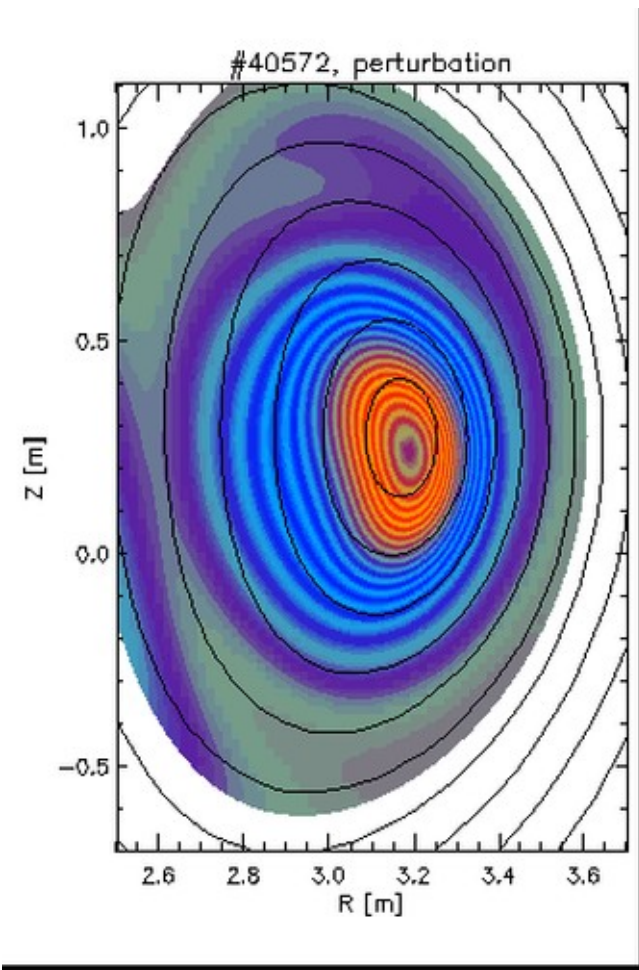
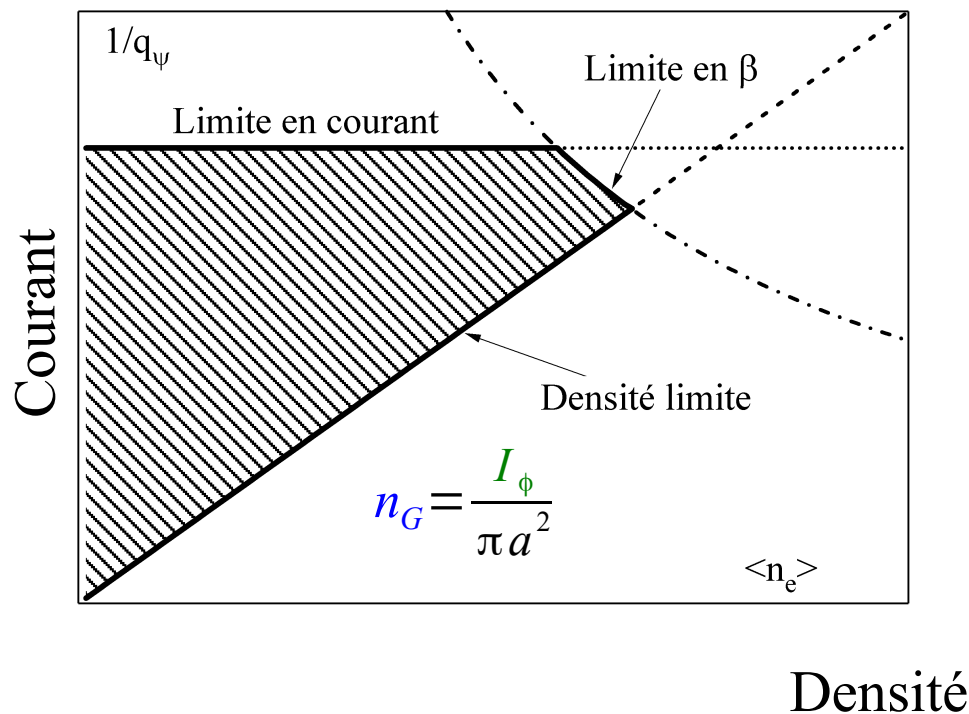


V. Igochine (2012)

Diagramme de stabilité

À cause des instabilités MHD, il existe des limites sur la stabilité du plasma en pression (β) et en facteur de sécurité q .

Il existe aussi une limite opérationnelle sur la densité, appelée densité de Greenwald n_G , fonction du courant plasma et de la taille du plasma. Cette limite déterminée phénoménologiquement semble aussi liée à des instabilités MHD.



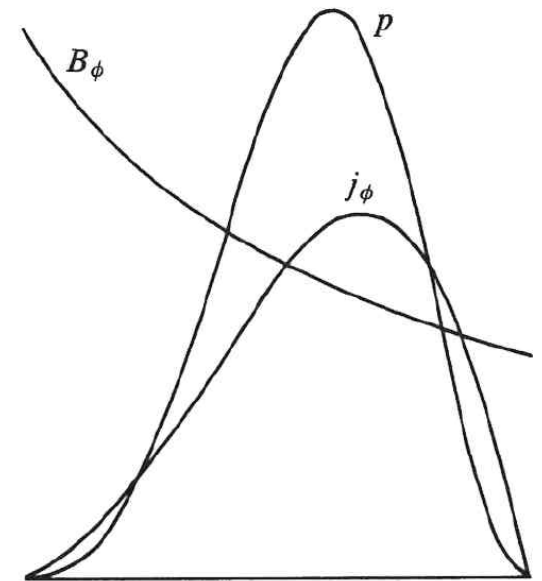
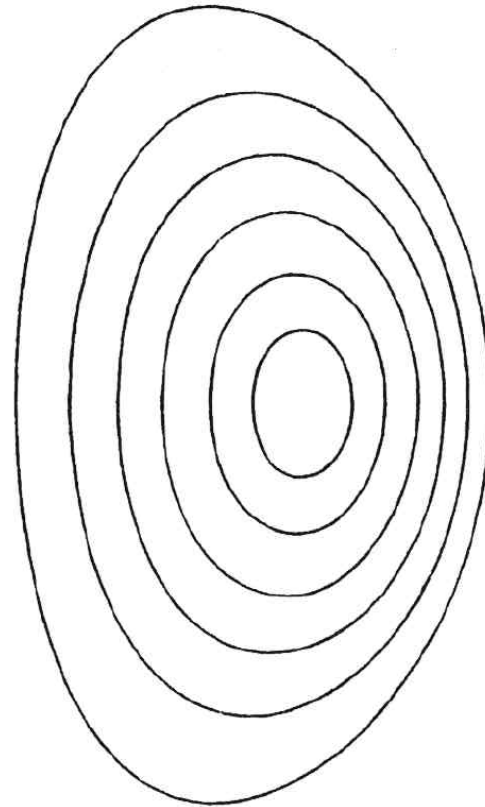
Rôle de la modélisation MHD

La modélisation MHD est indispensable pour les plasmas de tokamaks :

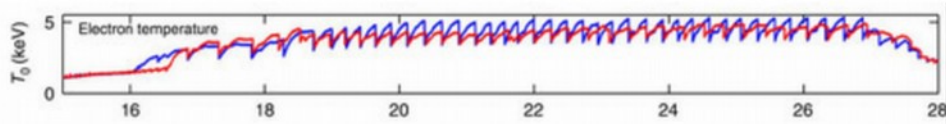
- modéliser l'équilibre macroscopique du plasma : pour déterminer
 - la forme des surfaces de flux,
 - le profil du courant plasma, j_ϕ
 - le profil de q , le facteur de sécurité
 - le profil de la pression cinétique, P
 - de là, le profil de la densité n_e ,
 - et de température T_e

Au delà, la modélisation permet :

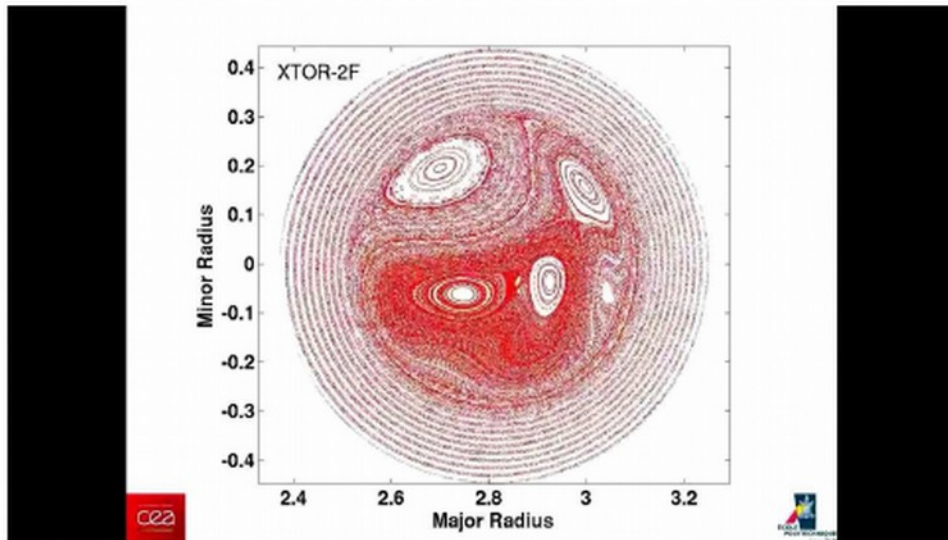
- d'évaluer la stabilité de cet équilibre
- de modéliser les instabilités
- d'évaluer le risque de « disruption » (extinction brutale du plasma)



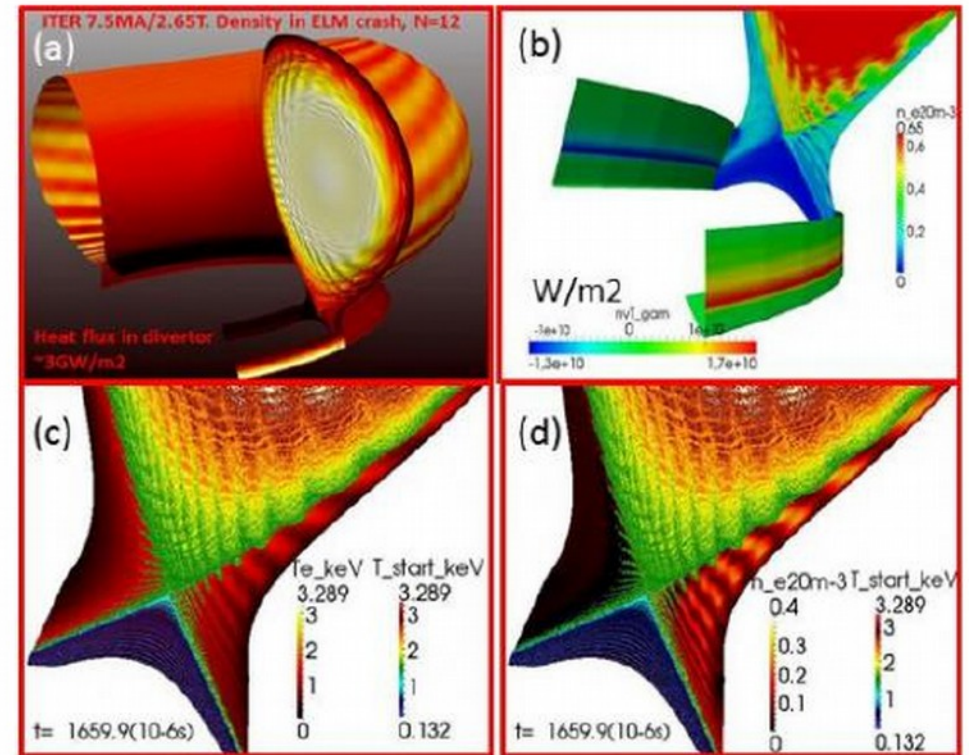
Simulations MHD



"Dents de scie" : $T_e(t)$ d'après J.P.Graves, et al, *Nature Comm.* 3, 624 (2012)



Simulation XTor, crash de dent de scie CPhT/CEA



Simulation Jorek, Edge Localized Mode CEA

- ★ dynamique du champ magnétique vs dynamique du plasma
- ★ plasma pris dans son ensemble
- ★ phénomènes cinétiques à petite échelle négligés

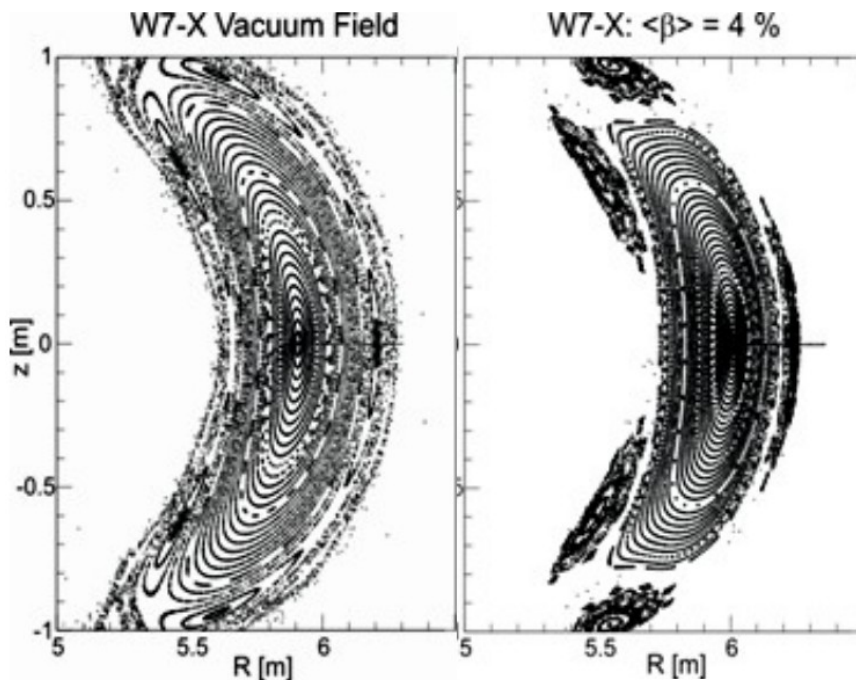
grandes échelles uniquement

Stabilité MHD intrinsèque pour les stellarators

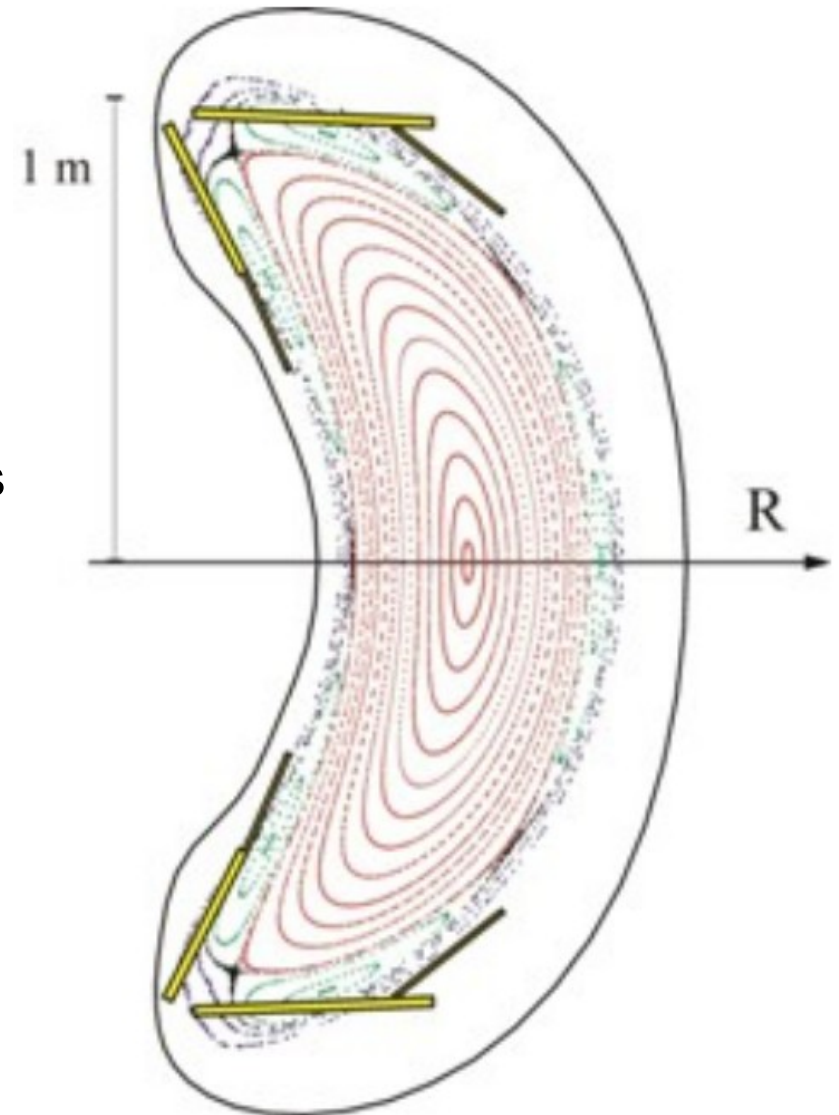
Pour les stellarators, la configuration magnétique est fixée par les bobines extérieures : les courants dans le plasma sont très faibles.

La stabilité MHD est fixée par les champs extérieurs : elle a été optimisée dès la conception du stellarator. À la différence du tokamak, la modélisation MHD est intrinsèquement 3D : pas d'axis-symétrie.

Pour le stellarator W7-X, un divertor a été conçu sous forme d'îlots magnétiques.



PIES : code d'équilibre MHD 3D appliqué à W7-X



Plan

- **I Fusion et confinement magnétique**

- **II Stabilité MHD et transport**
 - **II.1 Équations de la Magnéto-HydroDynamique**
 - **II.2 Équilibre MHD du tokamak**
 - **II.3 Instabilités MHD**
 - **II.4 Limites de fonctionnement du tokamak**
 - **4.a Limites en courant**
 - **4.b Limites en Béta**
 - **II.5 Transport, turbulence et simulation gyrocinétique**

- **III Chauffage et diagnostics de mesure**

Limites de fonctionnement

koslowski 2013 Bad Honef

instabilités : oscillation, saturation, globale

Effet : perte de confinement ou perte du plasma

beta limite : interchange

limite en densité : instabilité radiative

prad prop densité² densité-de-courant

Plan

- **I Fusion et confinement magnétique**

- **II Stabilité MHD et transport**
 - **II.1 Équations de la Magnéto-HydroDynamique**
 - **II.2 Équilibre MHD du tokamak**
 - **II.3 Instabilités MHD**
 - **II.4 Limites de fonctionnement du tokamak**
 - **II.5 Transport, turbulence et simulation gyrocinétique**
 - **5.a Diffusion des particules par collision et transport néoclassique**
 - **5.b Turbulence et transport anormal**
 - **5.c Contrôle de la turbulence**
 - **5.d Simulation gyrocinétique**

- **III Chauffage et diagnostics de mesure**

Transport de l'énergie

Pour atteindre l'ignition, il faut appliquer le critère de Lawson :

$$n_e T_i \tau_e \geq 3 \cdot 10^{21} \text{ keV m}^{-3} \text{ s}$$

Pour le confinement magnétique, les conditions correspondent :

$$n_e \sim 10^{20} \text{ m}^{-3}$$

$$T_i \sim 10 \text{ keV}$$

$$\tau_e \sim 1 \text{ s}$$

Le temps de confinement dépend du transport de l'énergie entre le cœur et le bord du plasma.

Comme les particules sont confinées par le champ magnétique autour des surfaces de flux, **les collisions sont nécessaires pour expliquer le transport des particules et de la chaleur par diffusion du centre vers le bord du plasma.**

L'effet des collisions sera modélisé par une marche au hasard.

Le pas temporel sera l'inverse de la fréquence de collision.

Le pas spatial sera lié au libre parcours moyen. Mais la forme des trajectoires des particules dans le tokamak va jouer un rôle important.

Confinement des particules

Entre 2 collisions, les ions ou les électrons, ont le temps de parcourir un grand nombre de tours (pour les circulantes) ou d'oscillations (pour les piégées) toroïdaux et mêmes poloïdaux.

Les ions et les électrons auront des positions toroïdale et poloïdale uniformément aléatoire d'une collision à l'autre.

Du fait des corrections dues aux dérives, le pas radial est plus grand que le rayon de Larmor. Il est de l'ordre de :

$$\delta_{r\alpha} \sim q \rho_{c\alpha}$$

Pour un plasma de tokamak typique :

$$B = 4 T \quad q = 3 \quad T_D = T_e = 10 keV$$

Les rayons de Larmor :

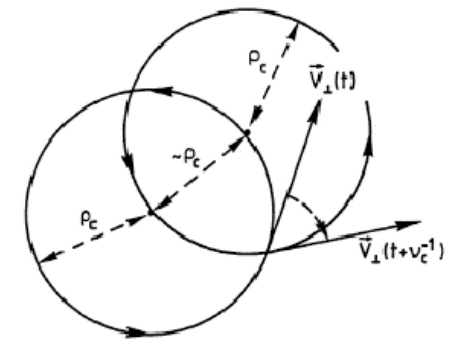
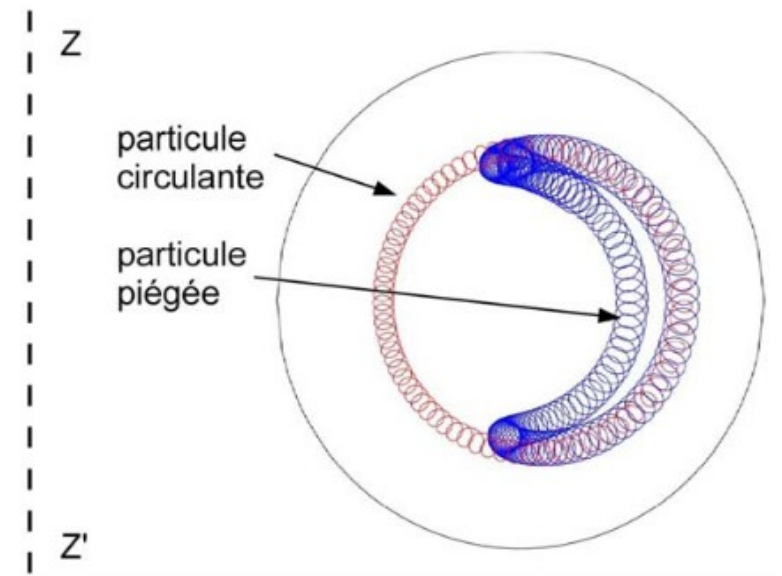
$$\rho_{cD} = 2 mm \quad \rho_{ce} = 50 \mu m$$

Les particules suivent une marche aléatoire avec un pas spatial différent dans la direction parallèle et dans la direction radiale. Pour la direction radiale :

$$\delta_{rD} \sim 6 mm \quad \delta_{re} = 150 \mu m$$

Le pas temporel est donné par l'inverse de la fréquence de collisions :

$$\nu_{DD}^{-1} = 33 \cdot 10^{-3} s \quad \nu_{ee}^{-1} = 5 \cdot 10^{-4} s$$



Modèle de marche au hasard dans un gradient

Le transport par marche au hasard dans un gradient est orienté par ce gradient.

La marche au hasard est symétrique : à chaque pas de temps δ_t , la particule fait un pas δ_x ou $-\delta_x$ chacun de probabilité 0,5 .

Profil de la densité : $n(x)$

Flux traversant la position x_0 dans le sens croissant :

$$\begin{aligned}\Gamma_+ &= \int_{x_0-\delta_x}^{x_0} \frac{1}{2} \frac{n(x)}{\delta_t} dx \\ &= \frac{1}{2\delta_t} \int_{x_0-\delta_x}^{x_0} \left(n(x_0) + (x-x_0) \frac{dn}{dx}(x_0) \right) dx \\ &= \frac{1}{2\delta_t} \left(n(x_0)\delta_x - \frac{\delta_x^2}{2} \frac{dn}{dx}(x_0) \right) dx\end{aligned}$$

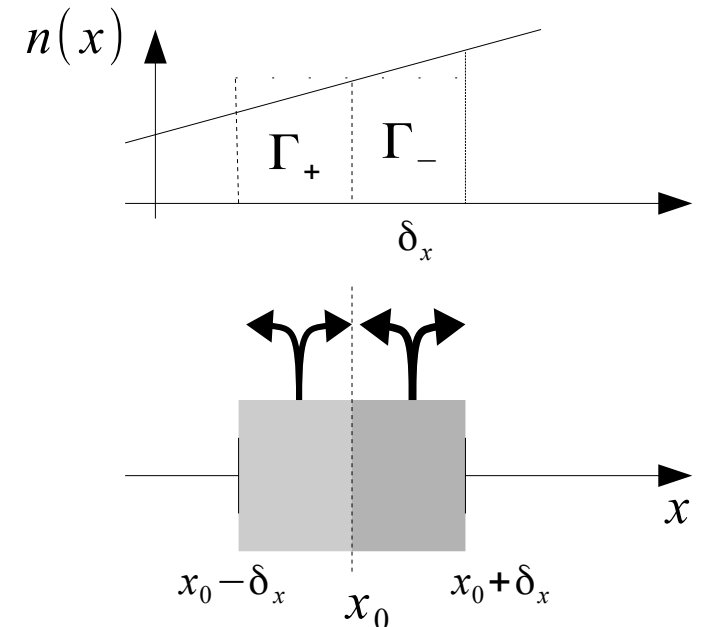
Flux opposé :

$$\begin{aligned}\Gamma_- &= \int_{x_0}^{x_0+\delta_x} \frac{1}{2} \frac{n(x)}{\delta_t} dx \\ &= \frac{1}{2\delta_t} \left(n(x_0)\delta_x + \frac{\delta_x^2}{2} \frac{dn}{dx}(x_0) \right) dx\end{aligned}$$

Flux total : $\Gamma = \Gamma_+ - \Gamma_- = -\frac{\delta_x^2}{2\delta_t} \frac{dn}{dx}(x_0) = -\frac{D}{2} \frac{dn}{dx}(x_0)$

Le flux est proportionnel au gradient de densité $\frac{dn}{dx}$ et au coefficient de diffusion $D = \frac{\delta_x^2}{\delta_t}$.

Le coefficient de diffusion lie la variance du déplacement moyen au temps : $\langle \Delta_x(t)^2 \rangle = Dt$



Transport par diffusion due aux gradients

En tridimensionnel, le flux de particules s'écrit :

$$\vec{\Gamma}_\alpha = -D_\alpha \nabla n_\alpha$$

En prenant compte de l'anisotropie entre les directions parallèles et perpendiculaires :

$$\vec{\Gamma}_\alpha = -D_{\parallel\alpha} \nabla_{\parallel} n_\alpha - D_{\perp\alpha} \nabla_{\perp} n_\alpha$$

Équation fluide sur le **flux de chaleur** :

$$\frac{3}{2} n_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial t} + \vec{\nabla} T_\alpha \cdot \vec{q}_{T\alpha} = S_\alpha$$

avec pour le flux de chaleur : $\vec{q}_{T\alpha} = -n_\alpha \chi_\alpha \nabla T_\alpha$

en prenant en compte l'anisotropie : $\vec{q}_{T\alpha} = -n_\alpha (\chi_{\parallel\alpha} \nabla_{\parallel} T_\alpha + \chi_{\perp\alpha} \nabla_{\perp} T_\alpha)$

Pour la marche au hasard : $\chi_\alpha = \frac{3}{2} D_\alpha$

Pour l'énergie, $E_\alpha = \frac{3}{2} n_\alpha k_B T_\alpha$

le flux s'écrit :

$$\vec{q}_{E\alpha} = -\frac{3}{2} D_\alpha T_\alpha \vec{\nabla} n_\alpha - n_\alpha \chi_\alpha \vec{\nabla} T_\alpha$$

en prenant en compte l'anisotropie :

$$\vec{q}_{E\alpha} = -\frac{3}{2} T_\alpha (D_{\parallel\alpha} \vec{\nabla}_{\parallel} n_\alpha + D_{\perp\alpha} \vec{\nabla}_{\perp} n_\alpha) - n_\alpha (\chi_{\parallel\alpha} \vec{\nabla}_{\parallel} T_\alpha + \chi_{\perp\alpha} \vec{\nabla}_{\perp} T_\alpha)$$

Les flux de particules et de chaleur sont fonction de la diffusion des particules par collisions.

Ordres de grandeurs des diffusions

Les diffusions parallèle et perpendiculaire diffèrent :

$$\begin{aligned}
 D_{\parallel D} &= u_{thD}^2 \nu_{DD}^{-1} & D_{\parallel e} &= u_{the}^2 \nu_{ee}^{-1} & \frac{D_{\perp e}}{D_{\parallel e}} &= q^2 \omega_{ce}^2 \nu_{ee}^{-2} \\
 D_{\perp D} &= (q \rho_{cD})^2 \nu_{DD} & D_{\perp e} &= (q \rho_{ce})^2 \nu_{ee} & &
 \end{aligned}$$

Estimation des diffusions par collisions :

$$\begin{aligned}
 D_{\parallel D} &= 3 \cdot 10^{10} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} & D_{\parallel e} &= 2 \cdot 10^{12} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \\
 D_{\perp D} &= 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} & D_{\perp e} &= 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}
 \end{aligned}$$

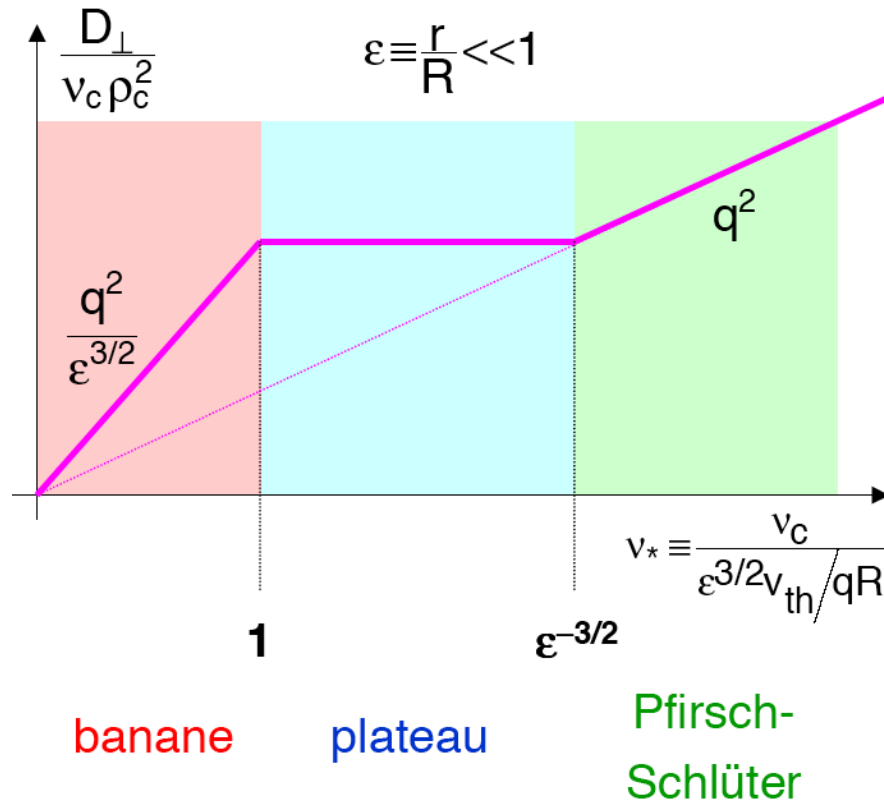
Estimation du temps de confinement : $\tau = \frac{a^2}{D}$ $a = 1 \text{ m}$ $\langle \Delta_x(t)^2 \rangle = D t$

$$\tau_D = 10^3 \text{ s} \qquad \tau_e = 2 \cdot 10^4 \text{ s}$$

Le temps de confinement de l'énergie estimé sera du même ordre.

Modèle néoclassique du transport collisionnel

Le modèle néoclassique est un modèle de transport basé sur les collisions. Il prend plus rigoureusement en compte l'effet des dérives sur les orbites de particules. Il prend en compte aussi le rôle particulier des particules piégées. Les valeurs obtenues sont plus grandes, mais restent du même ordre que celles obtenues par le modèle simplifié de marche au hasard



$$q^2 \rho_c^2 v \leq D_{\perp} \leq \frac{q^2}{\epsilon^{3/2}} \rho_c^2 v$$

Transport anormal

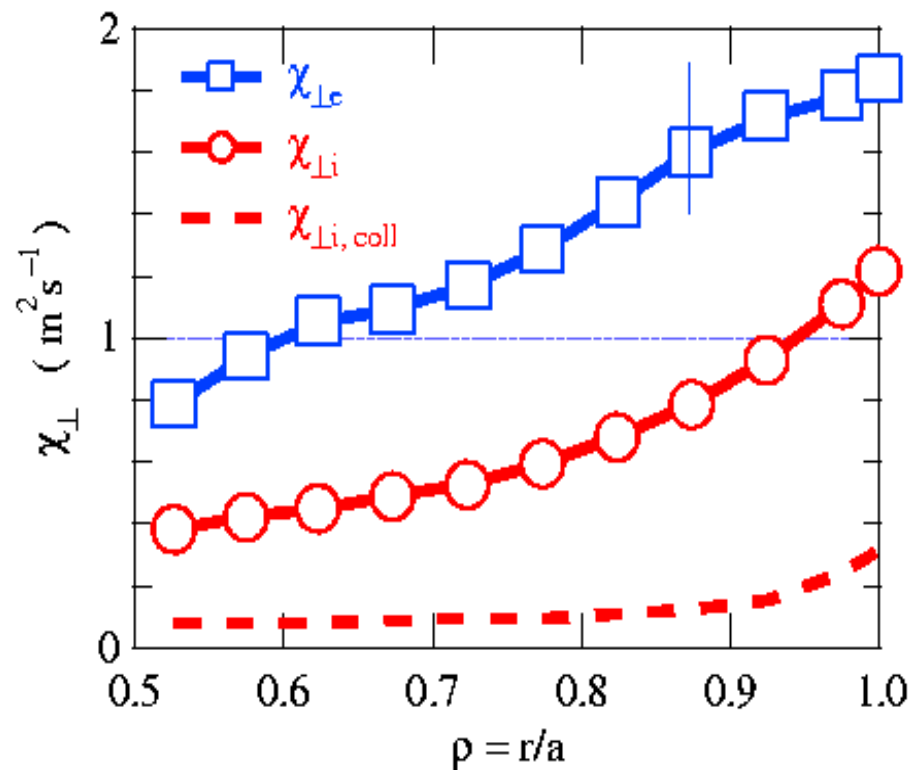
Le confinement de l'énergie observé dans les expériences est bien moins bon que le confinement des particules estimé par le modèle néoclassique : d'un facteur 100 pour les ions, d'un facteur 1000 sur les électrons.

Le confinement expérimental est estimé à partir du bilan énergétique sur le plasma.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Bilan de chaleur : } \mathbf{div} \mathbf{q} = \text{Sources - Pertes} \\ \text{Thermodynamique : } \mathbf{q} = -n \chi_{\perp} \nabla T \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{chauffages} \\ \text{rayonnement} \end{array}$$

$\chi_{\perp}^{\text{exp}} \approx 1 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$

$\chi_{\perp}^{\text{NC}} \approx 10^{-2} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ions
 $5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ électrons



Transport dû à la turbulence du plasma

Le confinement est détérioré par des **instabilités à petites échelles** ; petites par rapport aux échelles de la MHD.

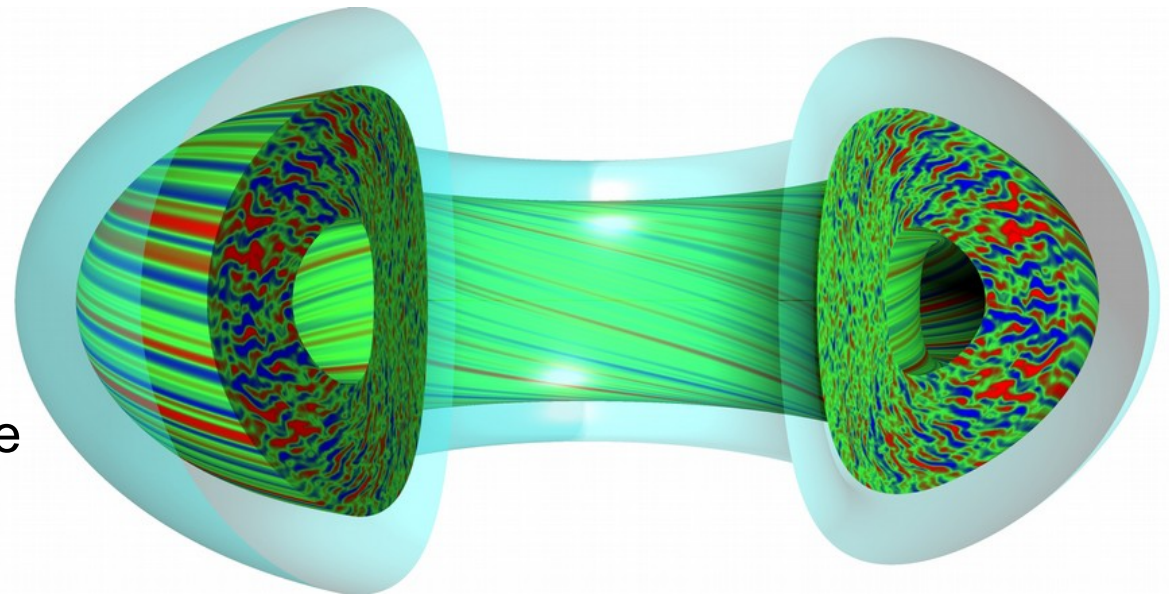
Ces instabilités sont générées par les **gradients de densités et de températures, ioniques et électroniques**, entre le cœur et le bord du plasma.

Ces instabilités développent une micro-turbulence autour de l'échelle du rayon de Larmor ionique.

Cette turbulence induit une diffusion à plus grande échelle que le rayon de Larmor ionique.

Cette turbulence est reproduite par des simulations qui donnent accès à des échelles plus petites que les simulations : ce sont les **simulations gyrocinétiques**.

La carte représente les fluctuations de potentiel.



La simulation a pour but de déterminer la valeur des coefficients de transport en fonction des paramètres du plasma. Ces coefficients de transport seront appliqués aux simulations MHD.

Elle permet aussi de mettre en relief d'autres formes de transport (dit non local).

Mode de dérive

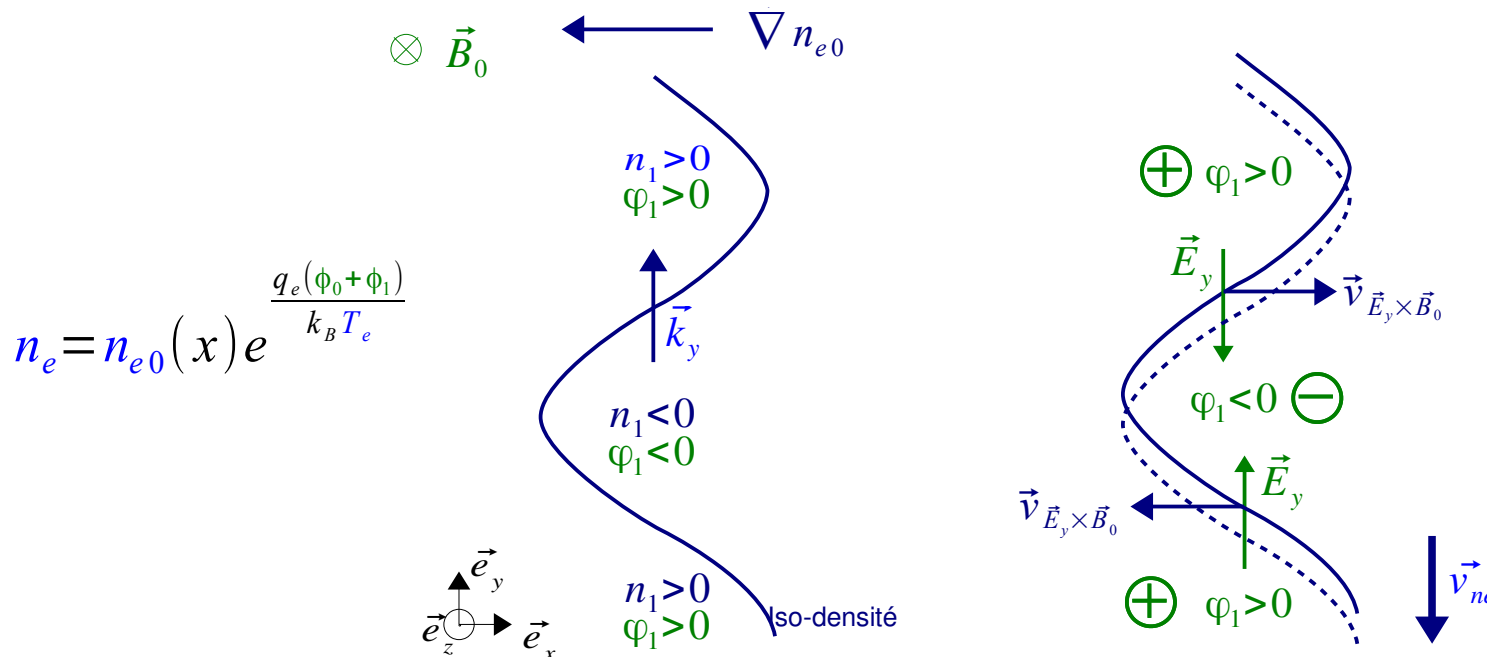
Un plasma magnétisé avec un gradient de densité peut générer des instabilités de dérive.

On ajoute une oscillation de densité : la ligne iso-densité oscille.

Si les électrons sont adiabatiques, les variations positives de densités correspondent à des variations positives de potentiel.

$$n_e = n_{e0}(x) + n_{e1}(y)$$

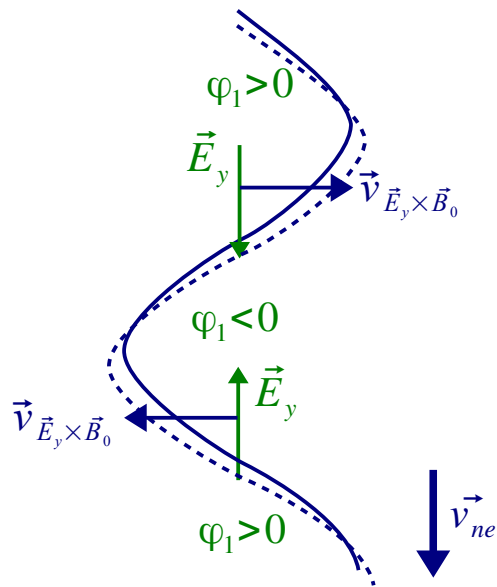
Ces variations de potentiel induisent par la dérive ExB un déplacement de la ligne iso-densité : l'oscillation se propage.



Mode de dérive : croissance

Normalement : résistivité \rightarrow instabilité des modes de dérive
Les modes de dérives sont amplifiés par l'instabilité d'interchange.

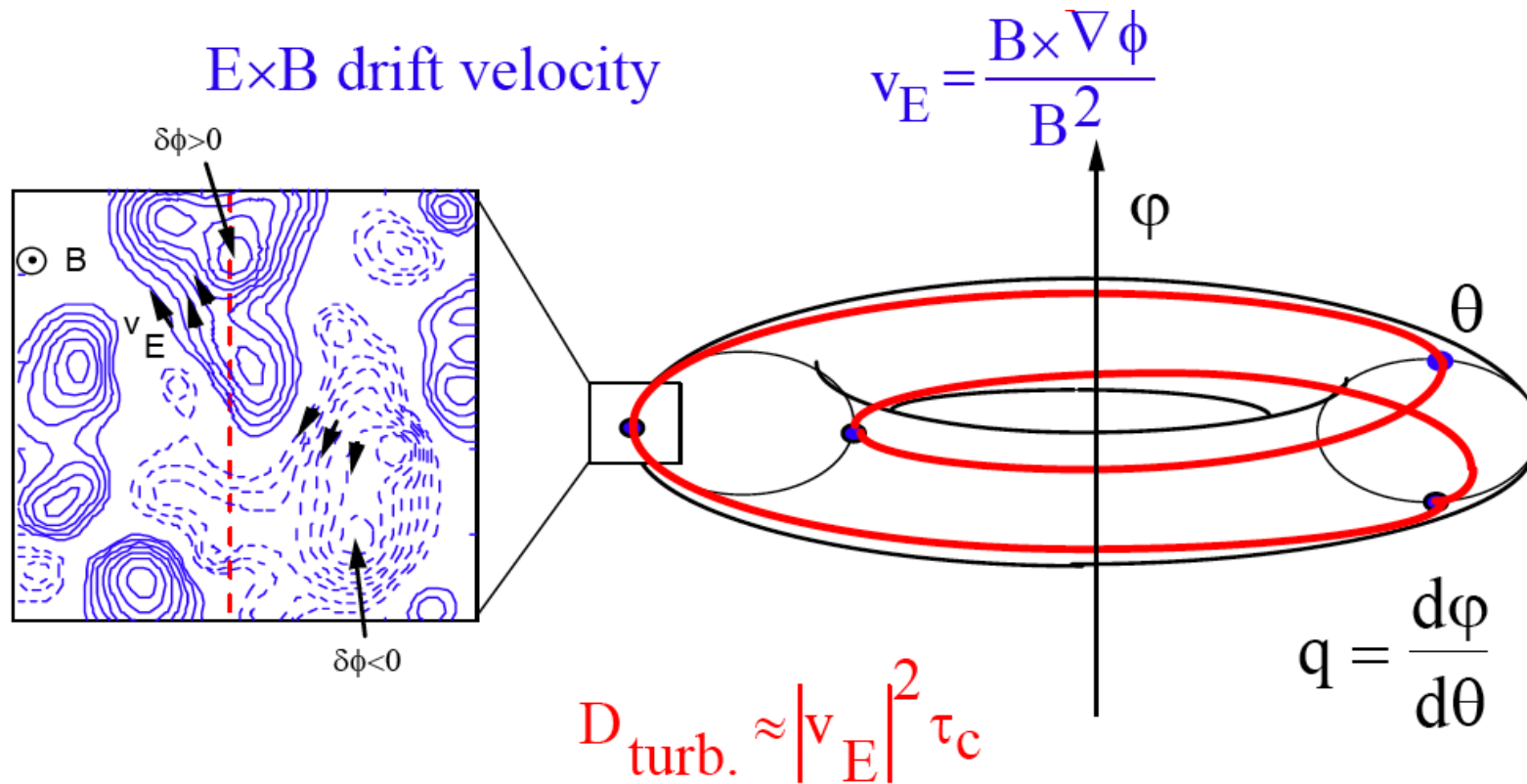
Si un phénomène induit un déphasage entre la densité et le potentiel, l'oscillation peut être amplifiée.



Mode de dérive

Le transport turbulent est entre autres engendré par la dérive créée par les fluctuations de potentiel turbulent.

Le transport se fait aux échelles les plus grandes de cette turbulence.

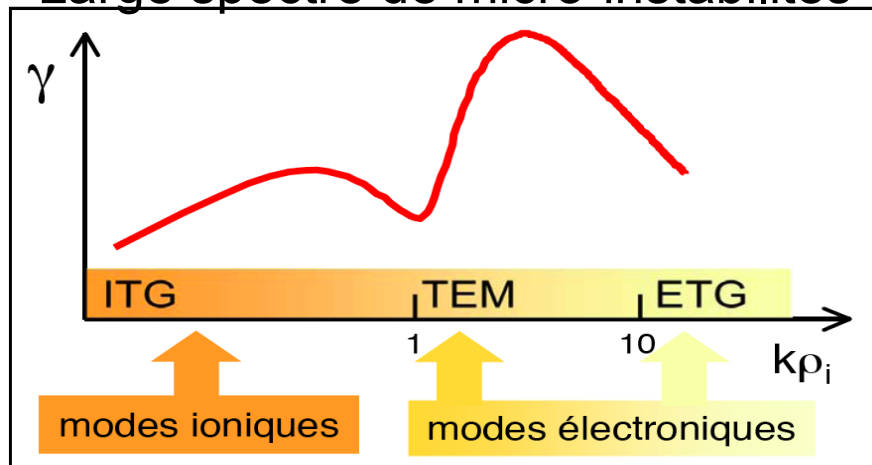


Nature des modes instables générant la micro-turbulence

Les instabilités qui génèrent la turbulence sont de différentes natures : ITG, ETG, TEM, « streamers » (structures allongées radialement), flux zonaux (structures allongées poloïdalement)...

Chaque type a une gamme de nombres d'onde radiaux et poloïdaux spécifiques.

Large spectre de micro-instabilités



ITG : Ion Temperature Gradient

TEM : Trapped Electron Modes

ETG : Electron Temperature Gradient

Structure turbulente

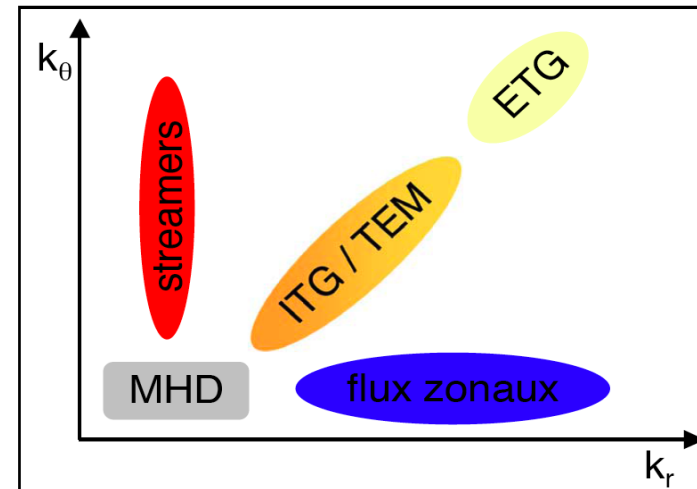
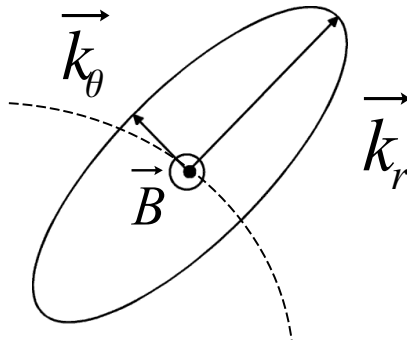
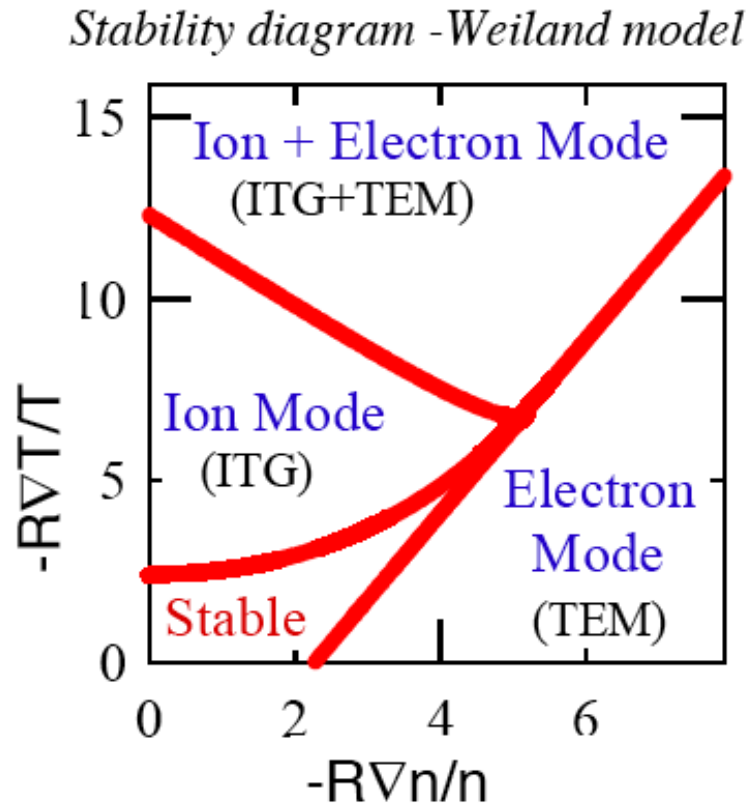


Diagramme d'instabilités

Le caractère instable de ces modes dépend des longueurs de gradient, pour les gradients de densité et de température, comparés au grand rayon.



$$\lambda_{Ti} = \frac{Ti}{|\nabla Ti|} = \frac{1}{|\nabla \ln Ti|}$$

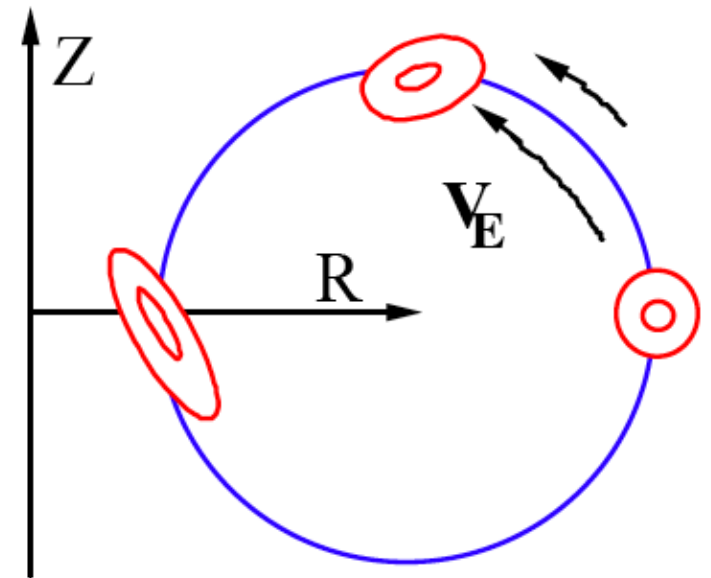
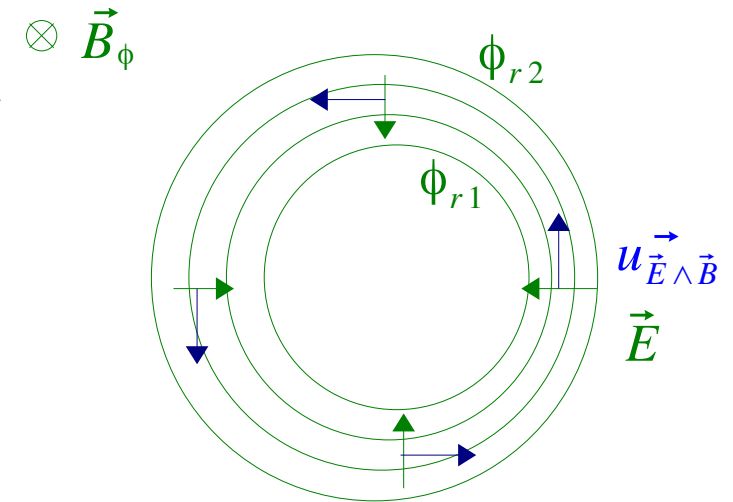
Contrôle de la turbulence par le cisaillement radial

Comme le potentiel varie radialement d'une surface de flux à l'autre, un champ électrique radial existe à travers le plasma. Sa présence va générer une vitesse de dérive de champs croisés $\vec{E} \times \vec{B}$ dirigé radialement. Cette dérive concerne le plasma dans son ensemble, instabilités comprises.

Si le potentiel ne varie pas régulièrement dans la direction radiale, cette vitesse peut être cisailée (elle varie rapidement dans la direction radiale).

Cela aura pour effet de distordre les structures radiales de la micro-turbulence : les instabilités ne peuvent pas croître. La turbulence aux grandes échelles est réduite, et le transport est réduit dans cette zone.

Les instabilités peuvent être distordues par le cisaillement de champ magnétique si le champ magnétique poloidal varie rapidement dans la direction radiale.

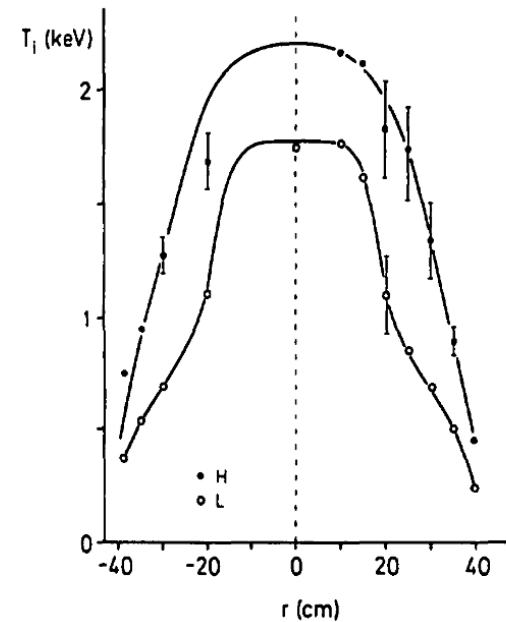
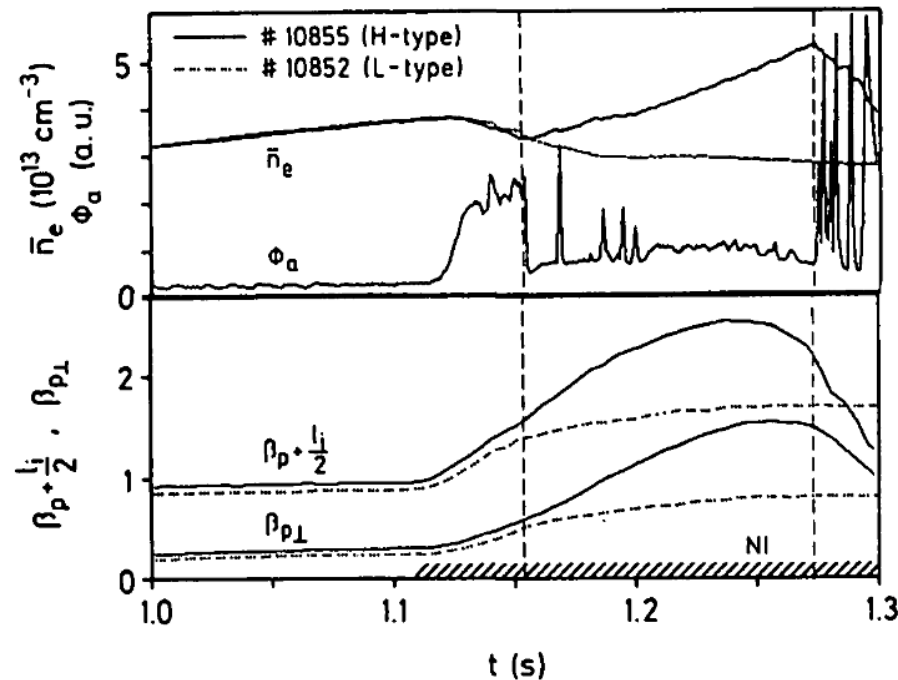


Confinement amélioré : mode H

Le mode H (high confinement) est un mode de confinement amélioré du plasma. Il est apparu spontanément sur ASDEX (Allemagne), le premier tokamak de taille intermédiaire à avoir fonctionné avec un divertor en point X.

Le plasma passe en mode H quand une puissance additionnelle est injectée dans le plasma. Sur ASDEX, il s'agit de l'injection de neutres énergétiques (NI).

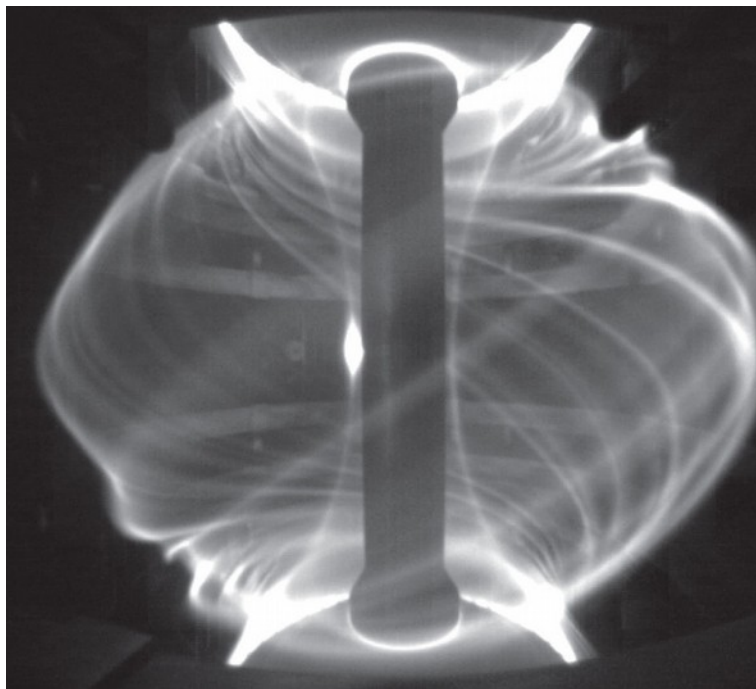
L'injection d'énergie a eu pour effet de faire varier rapidement le potentiel au bord du plasma (ϕ_a), et ainsi réduire le transport au bord. La densité moyenne (\bar{n}_e), la température et ainsi la pression (β_p) ont alors augmenté dans tout le cœur du plasma. Le mode L (low confinement) est le mode complémentaire de fonctionnement.



ASDEX team, nuclear fusion (1989)

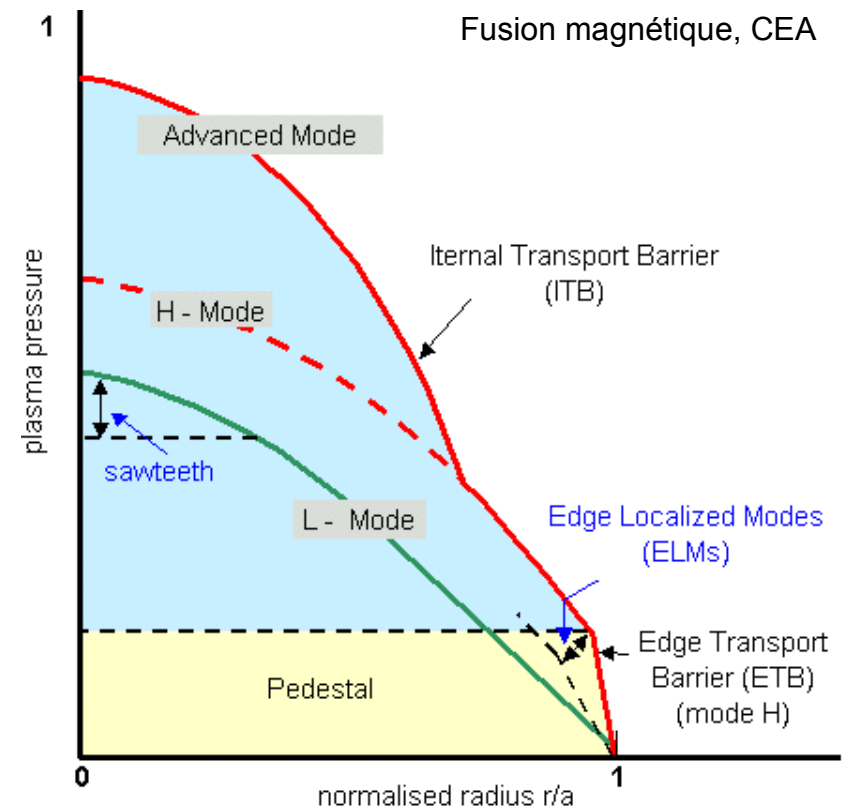
Confinement amélioré : barrière interne de transport

Le mode H permet d'atteindre un confinement amélioré grâce à une barrière de transport au bord. Cette barrière induit de nouvelles instabilités, les ELM (Edge Localized Modes), bouffées de plasma localisées au bord, qui concentre localement le dépôt de puissance. Il est aussi possible de susciter un cisaillement de vitesse poloïdale ou de champ magnétique au cœur du plasma, qui va créer une barrière de transport interne (ITB). Les événements MHD comme les dents de scie (« sawtooth », mode de torsion interne), ou les modes de déchirement, au centre du plasma peuvent en revanche détériorer la confinement.



ELM

MAST, UKAEA



Estimation du confinement pour ITER

Les connaissances actuelles ne permettent pas de déterminer les paramètres de tokamak nécessaires pour atteindre les conditions du maintien de la fusion dans le plasma du tokamak.

Seule une approche phénoménologique est possible. L'ensemble des mesures de temps de confinement pour un plasma en mode H ont été recensés sur différentes machines. Pour chaque plasma, les principaux paramètres plasma ont aussi été enregistrés.

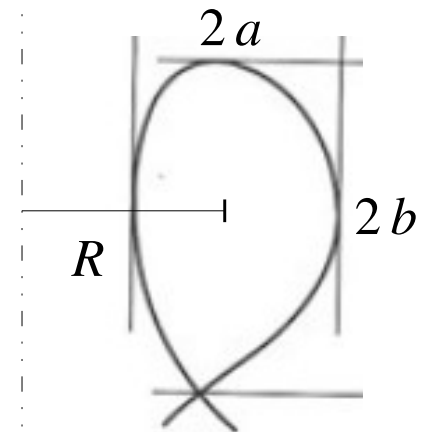
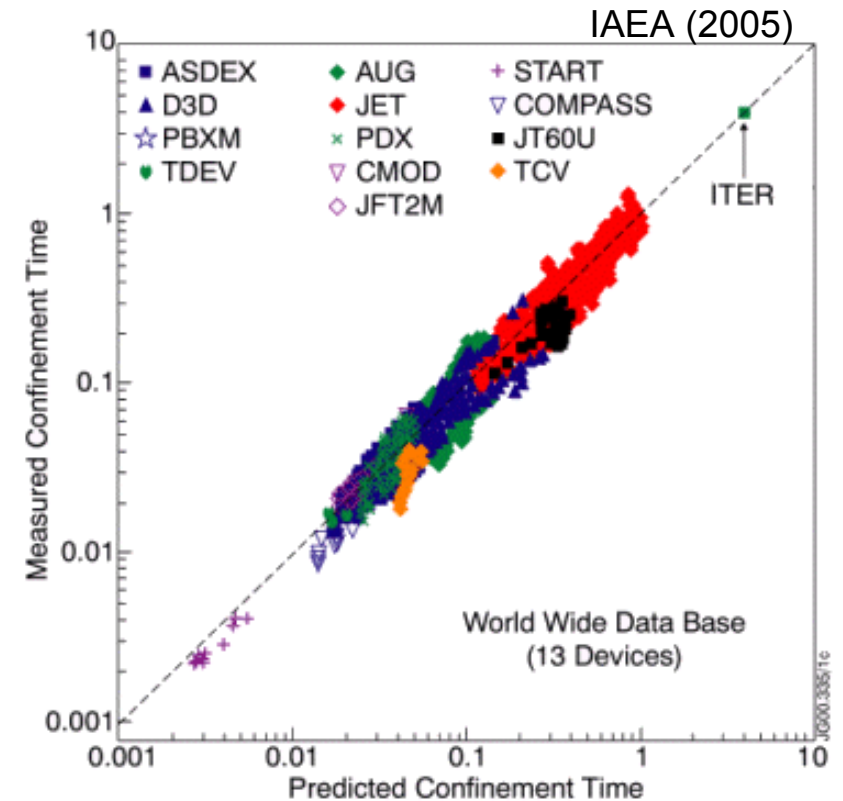
Un ajustement a permis de déterminer les variations de temps de confinement avec les paramètres plasma :

$$\tau_{E,th}^{IPB98(y,2)} = 0.0562 I_p^{0.93} B_T^{0.15} P^{-0.69} n_e^{0.41} M^{0.19} R^{1.97} \epsilon^{0.58} \kappa_a^{0.78}$$

$$\tau_E [s] \quad I_p [MA] \quad B_T [T] \quad P: \text{puissance additionnelle} [MW] \quad n_e [10^{19} m^{-3}]$$

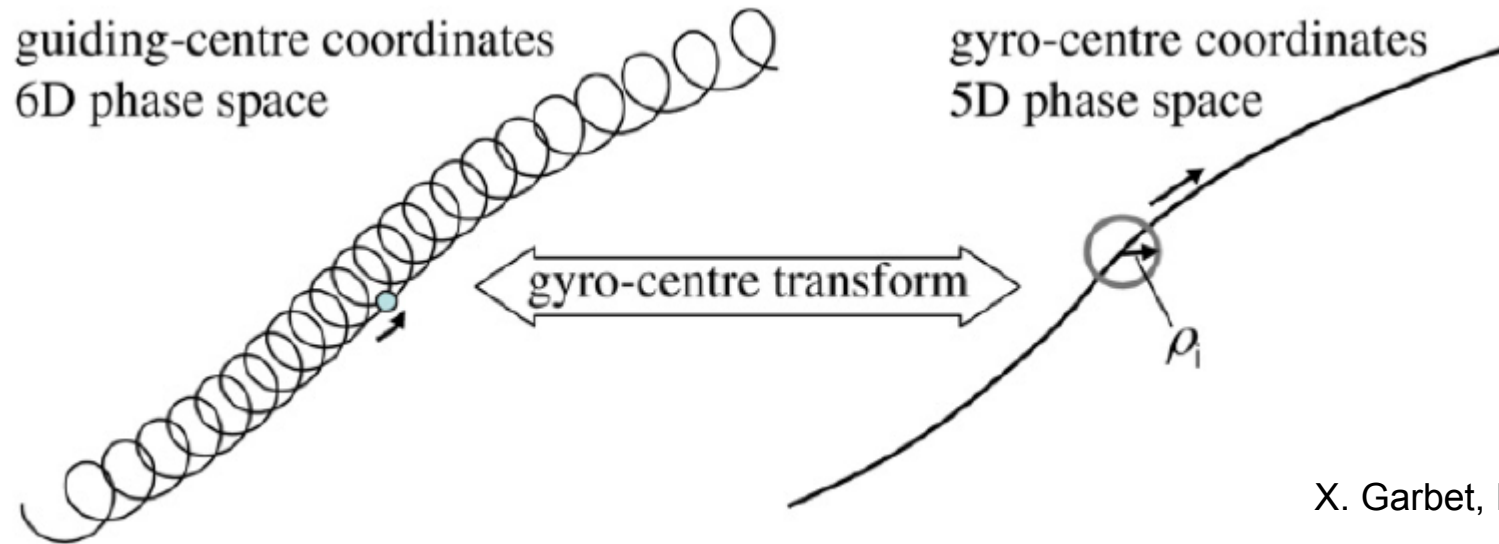
$$M: \text{masse isotopique effective} [1,66 \cdot 10^{-27} kg] \quad R [m] \quad \epsilon = a/R \quad \kappa_a = b/a$$

Cette loi a été extrapolée pour estimer le temps de confinement attendu pour ITER.



Modèle gyrocinétique

Le modèle gyrocinétique est une version simplifiée du modèle cinétique. Il permet de simuler la turbulence du plasma en fonction des gradients.



X. Garbet, Nucl. Fus. (2010)

Le mouvement des particules chargées peut être décomposé en mouvement du centre guide + mouvement cyclotronique.

Le mouvement du gyrocentre est simplifié : on suppose le moment magnétique invariant exact. Le mouvement cyclotronique ne sera pas décrit : la phase cyclotron sera choisie aléatoirement.

L'hypothèse sur le moment magnétique permet de passer d'un problème à 6+1 dimensions, à un problème à 5+1 dimensions.

Le pas temporel pourra être pris plus long que la période cyclotron des électrons

Équation de Vlasov gyrocinétique

L'équation de Vlasov est modifiée pour décrire la trajectoire du gyro-centres.

$$\partial_t \bar{f}_s + \dot{\bar{\mathbf{R}}} \cdot \partial_{\bar{\mathbf{R}}} \bar{f}_s + \dot{\bar{u}} \partial_{\bar{u}} \bar{f}_s = 0$$

Le mouvement du gyro-centre prend en compte les différents types de dérives.

$$\dot{\bar{\mathbf{R}}} = \bar{u} \mathbf{b} + \underbrace{\frac{\mathbf{b} \times \nabla \langle \phi \rangle_\xi}{B}}_{\text{électrique}} + \underbrace{\frac{\bar{u}^2}{\Omega_{cs}} \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{N}}{R_c}}_{\text{courbure}} + \underbrace{\frac{v_{\perp 0}^2}{2\Omega_{cs}} \frac{\mathbf{b} \times \nabla B}{B}}_{\text{gradient}} \quad \mathbf{b} = \frac{1}{B} \vec{B}$$

Les forces prises en compte sont la force diamagnétique et le force électrostatique parallèle au champ magnétique.

$$\dot{\bar{u}} = - \underbrace{\frac{\bar{\mu} \nabla B}{m_s}}_{\text{miroir}} - \underbrace{\frac{q_s \nabla \langle \phi \rangle_\xi}{m_s}}_{E_{\parallel}}$$

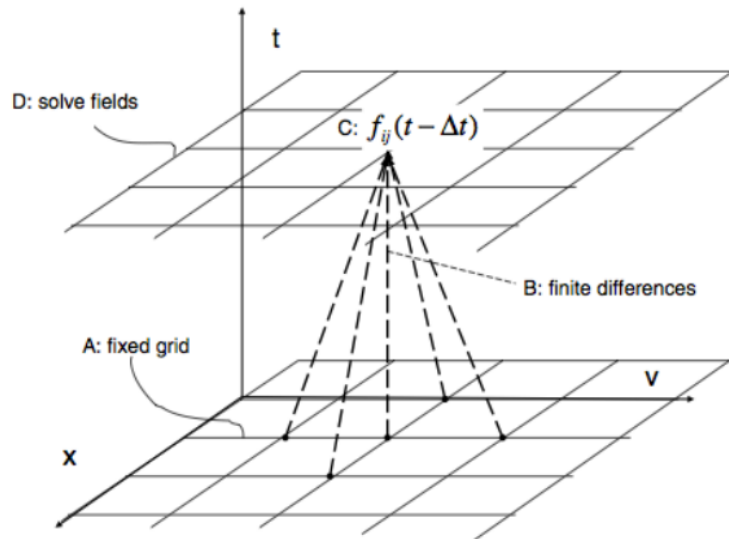
Des termes peuvent être ajoutés pour décrire les collisions, l'injection de particules, l'amortissement Landau (non pris en compte a priori)...

Méthode Lagrangienne ou Eulérienne

Méthode « Particle In Cell »

La distribution est décrite par des macro molécules dont suivent le mouvement.

Principe simple, mais la projection pour déterminer les champs électromagnétiques produit du bruit numérique.

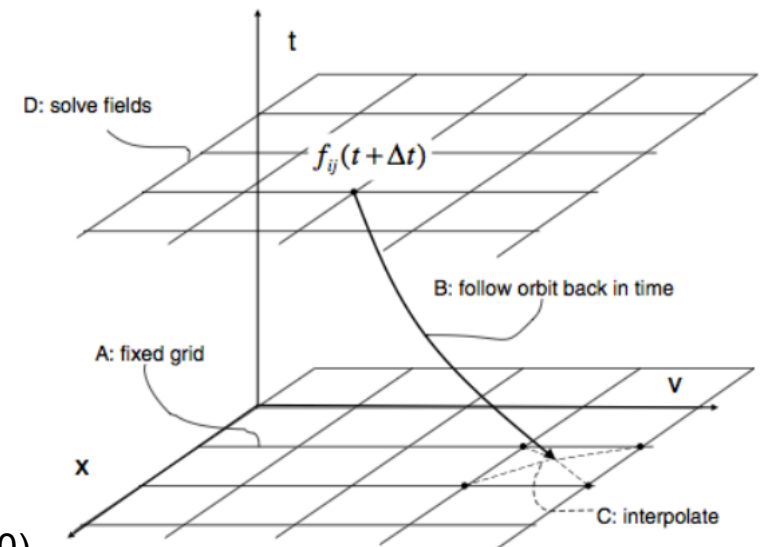
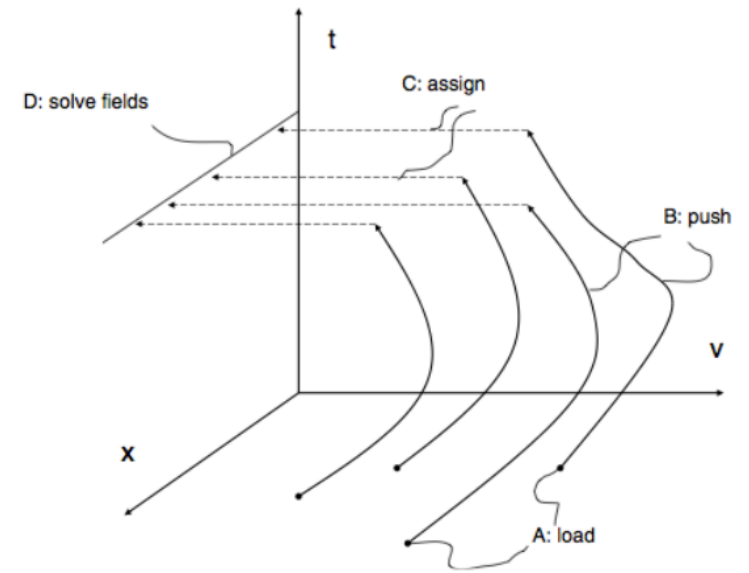


Méthode semi-lagrangienne

La distribution est décrite sur une grille fixe. Son évolution est calculée en suivant les orbites. La position finale est interpolée sur la grille pour déterminer les champs.

Méthode Eulérienne

La distribution est décrite sur une grille fixe. Les dérivées sont décrites par des différences centrées finies. Le schéma est conservatif. Le pas temporel est limité par le pas spatial.

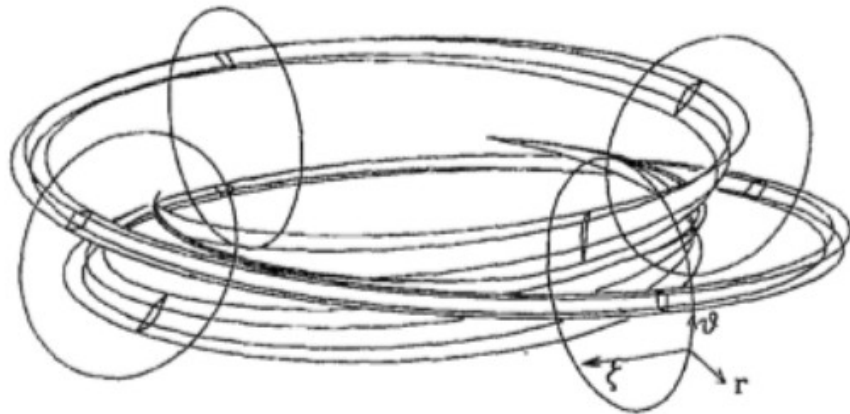
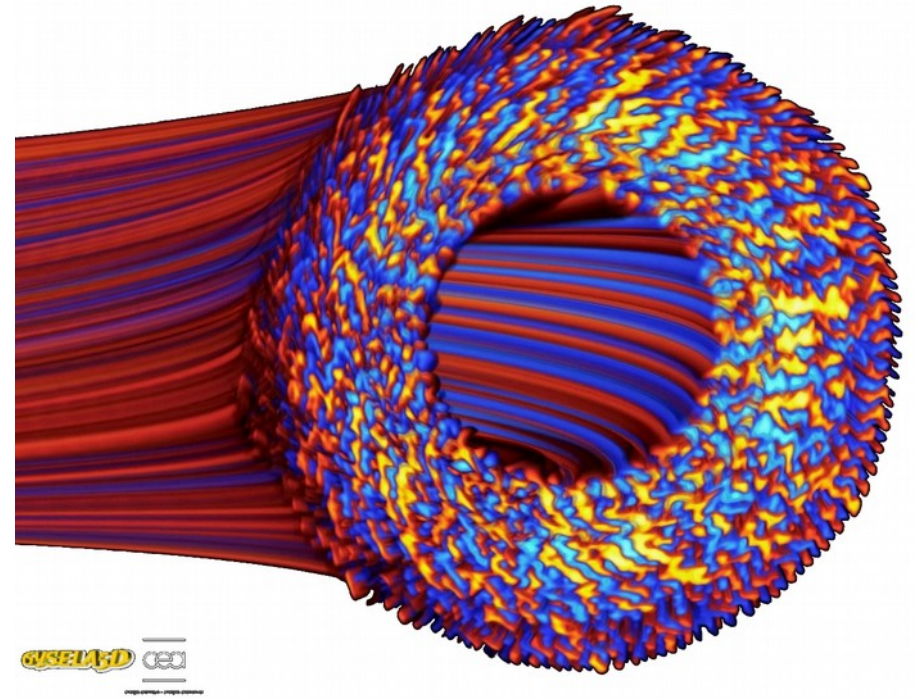


X. Garbet, Nucl. Fus. (2010)

Domaine de la simulation

Simulations globales, à forçage de flux

Le domaine simulé peut concerner l'ensemble du plasma de cœur et l'ensemble de la distribution de probabilité (« full-f »). Les conditions sont fixées par les flux aux limites. Dans ce cas, la simulation est très coûteuse. Elle ne permet pas d'atteindre les échelles spatiales électroniques.



Simulation locale, à forçage de gradient

Pour pouvoir atteindre les échelles spatiales électroniques, on limite la taille du système à un tube de flux élargi.

Les conditions sont fixées par un équilibre donné, avec des gradients de densité et de température pour la distribution. La simulation calcule l'écart à cet équilibre (« delta-f »). Les conditions au bord sont périodiques.

Ce schéma permet des simulations plus économes en temps de calcul.

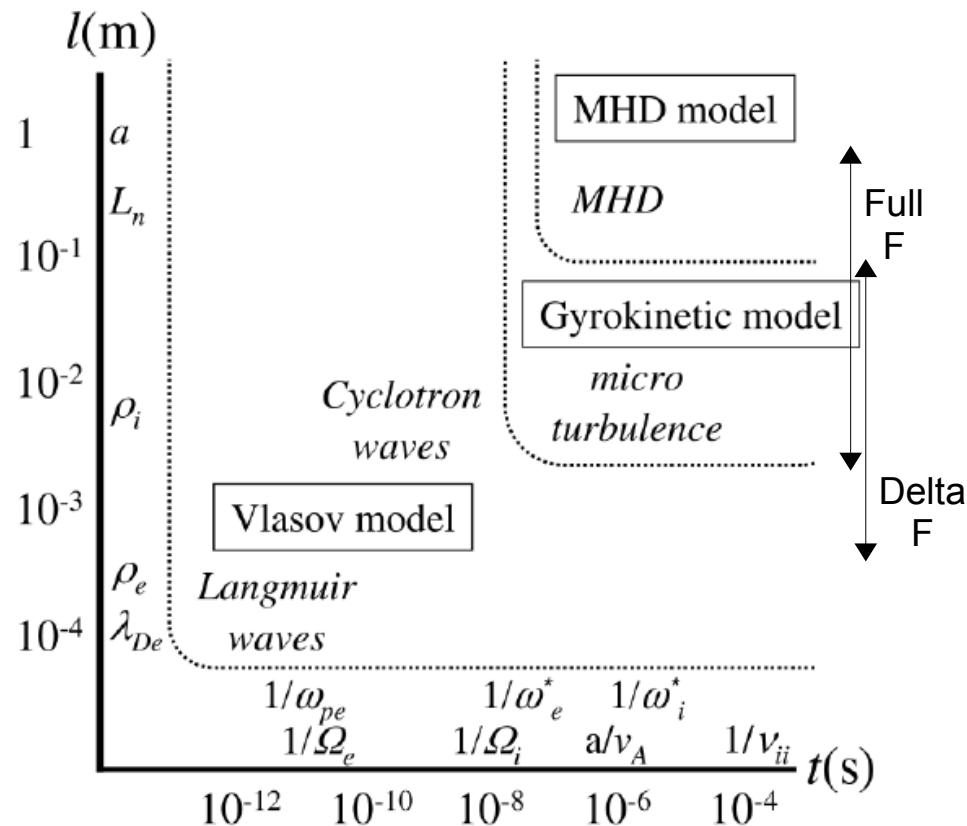
Famille de simulations

Simulations MHD du cœur en temps réel : équilibre global du plasma

Simulations MHD fines du cœur : instabilités au cœur du plasma (dents de scie)
instabilités au bord (ELM)

Simulations MHD du bord (les neutres et la paroi sont incluses) : plasma de bord (SOL)

Simulations gyrocinétiques du cœur : micro-turbulence au cœur du plasma

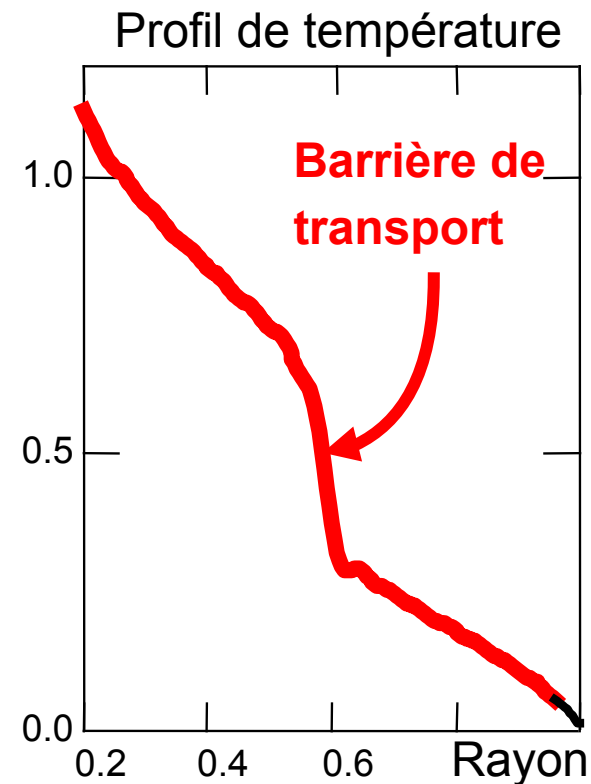
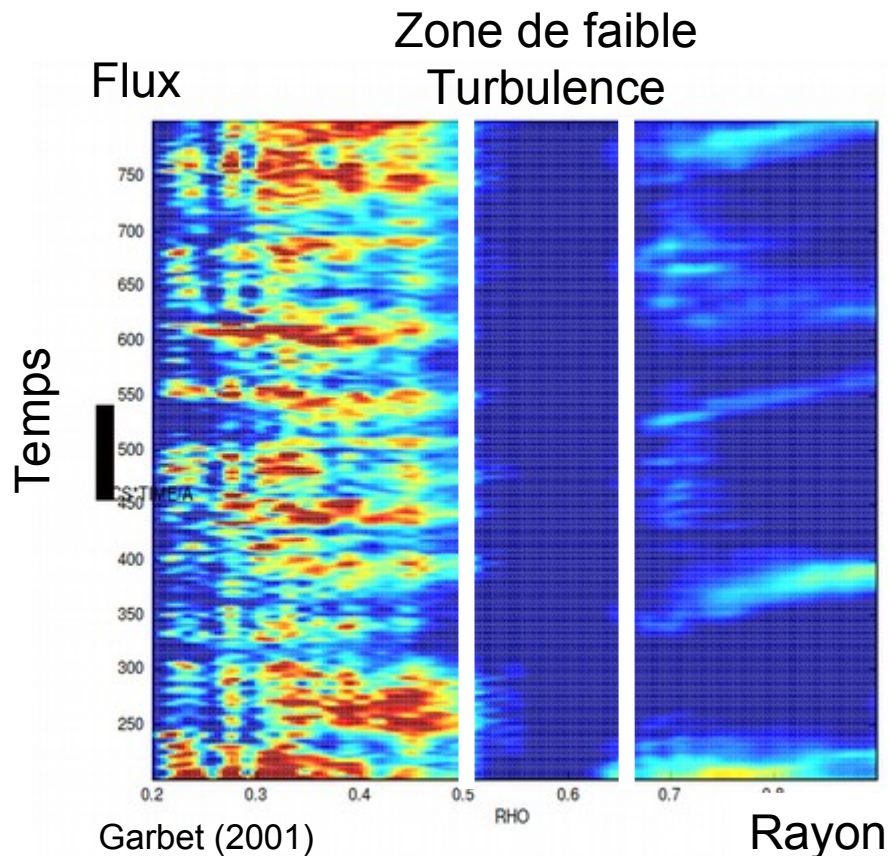


X. Garbet, Nucl. Fus. (2010)

Barrière de transport interne

Les simulations gyrocinétiques à forçage de flux permettent de simuler les barrières de transport, en prenant en compte l'effet de la réduction du transport sur le gradient de température.

$$Q = -\chi \, n \, \nabla T = Q_0 \Rightarrow \text{à flux injecté } Q_0 \text{ cst: } |\nabla T| \nearrow \text{ si } \chi \searrow$$



Plan

- 1 Introduction à la fusion par confinement magnétique
- 2 Configuration magnétique et confinement des particules
- 3 Progression des performances du confinement magnétique

- 4 Équations de la Magnéto-HydroDynamique
- 5 Équilibre MHD du tokamak
- 6 Instabilités MHD
- 7 Transport, turbulence et simulation gyrocinétique
- Annexe
 - Équation de Grad-Shafranov

- 8 Chauffage et génération de courant additionnels
- 9 Diagnostics de mesure

Équilibre en géométrie axisymétrique : flux magnétique

On recherche un équilibre axisymétrique (indépendant de ϕ).

On introduit le flux poloïdal de champ magnétique, à travers un disque toroïdal :

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_R} \vec{B}_\theta \cdot \vec{ds}$$

Comme $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$ (\vec{A} potentiel vecteur).

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \vec{A} \cdot \vec{dl}$$

$$\psi = R A_\phi$$

Comme : $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$ $\vec{B} \cdot \nabla \psi = 0$

ψ est constant sur une surface de flux magnétique.

La pression P peut alors être exprimée en fonction

de ψ : $P = P(\psi)$

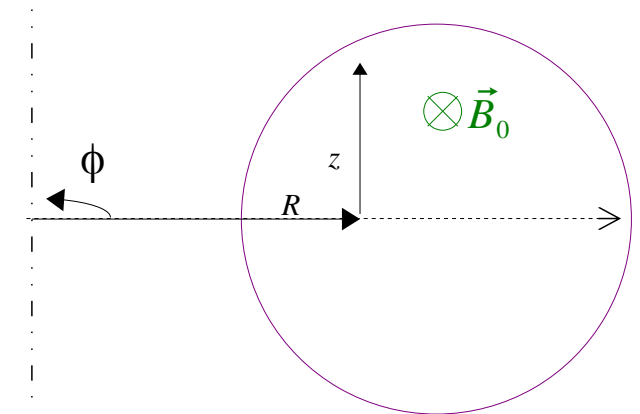
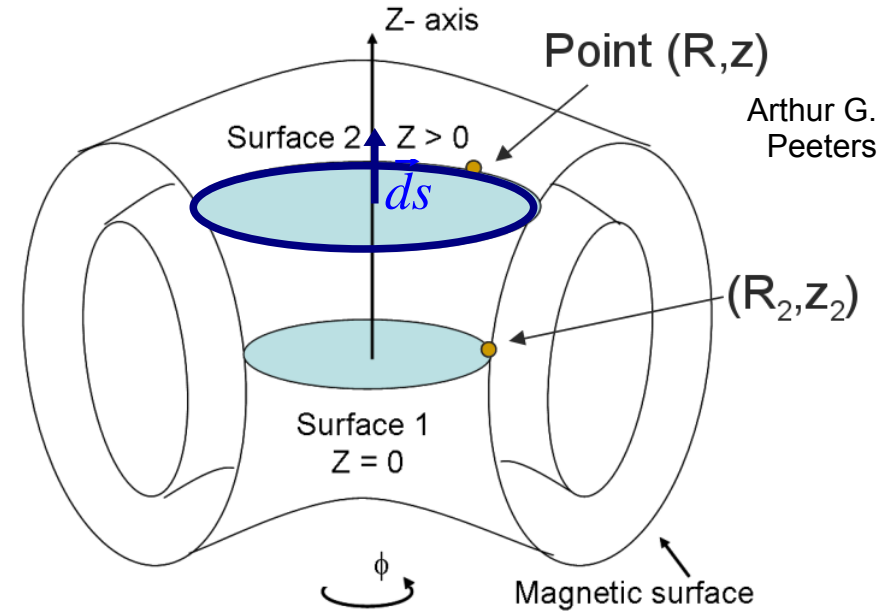
En coordonnées cylindrique :

Comme $\vec{B}_\theta = \nabla \wedge \vec{A}_\phi$:

$$B_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad B_z = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R}$$

On définit $\vec{B}_p = B_R \vec{e}_R + B_z \vec{e}_z$: $\vec{B}_p = \frac{1}{R} \vec{\nabla} \psi \wedge \vec{e}_\phi$

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ s'écrit : $\frac{1}{R} \frac{\partial (R B_R)}{\partial R} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$



Équilibre en géométrie axisymétrique : flux de courant

\vec{j} joue un rôle complémentaire à \vec{B} dans les équations de la MHD

On introduit le courant poloïdal intégré sur disque toroïdal :

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_R} \vec{j}_\theta \cdot \vec{ds}$$

Comme $\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

$$\xi = \frac{1}{2\pi\mu_0} \oint_{C_R} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$\xi = \frac{1}{\mu_0} R B_\phi$$

Comme : $\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

ξ est constant sur une surface de flux magnétique :

$$\xi = \xi(\psi)$$

d'où : $P = P(\xi)$ $\nabla \xi \wedge \nabla P = 0$

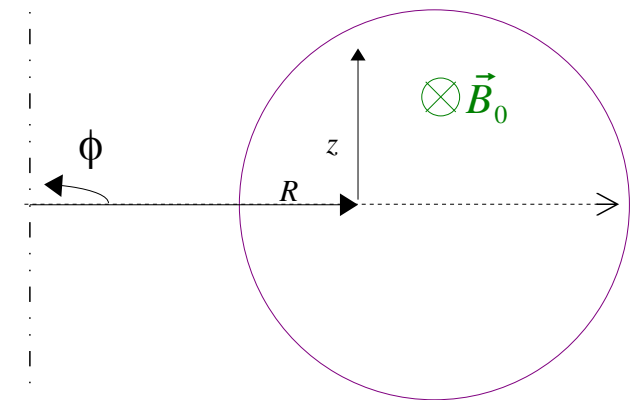
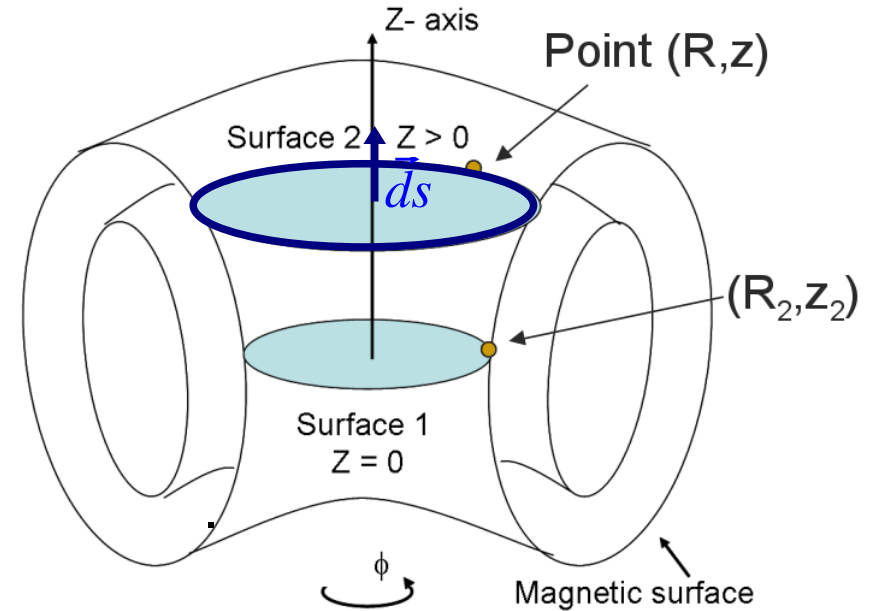
En coordonnées cylindrique :

On définit $\vec{j}_p = j_R \vec{e}_R + j_z \vec{e}_z$: $\vec{j}_p = \frac{1}{R} \nabla \xi \wedge \vec{e}_\phi$

$$j_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad j_z = \frac{1}{R} \frac{\partial \xi}{\partial R}$$

$\vec{j} \cdot \nabla P = 0$ s'écrit : $j_R \frac{\partial P}{\partial R} + j_z \frac{\partial P}{\partial z} = 0$

$$-\frac{\partial \xi}{\partial z} j_R \frac{\partial P}{\partial R} + \frac{\partial \xi}{\partial R} \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$



Équation de Grad-Shafranov

Comment déduire la forme des surfaces de flux, à partir de la connaissance des profils de pression $P(\psi)$ et de courant $\xi(\psi)$, en MHD idéale ?

L'équation d'équilibre des forces $\vec{j} \wedge \vec{B} = \nabla P$ peut se décomposer en coordonnées cylindriques :

$$\vec{j}_p \wedge B_\varphi \vec{e}_\varphi + j_\varphi \vec{e}_\varphi \wedge \vec{B}_p = \nabla P$$

On utilise les expressions des composantes poloïdales :

$$\vec{j}_p = \frac{1}{R} \vec{\nabla} \xi \wedge \vec{e}_\varphi \quad \vec{B}_p = \frac{1}{R} \vec{\nabla} \psi \wedge \vec{e}_\varphi$$

pour simplifier l'équation d'équilibre :

$$-\frac{1}{R} B_\varphi \vec{\nabla} \xi + \frac{1}{R} j_\varphi \vec{\nabla} \psi = \vec{\nabla} P$$

Comme P et ξ ne dépendent que de ψ :

$$\vec{\nabla} P = \frac{dP}{d\psi} \vec{\nabla} \psi \quad \vec{\nabla} \xi = \frac{d\xi}{d\psi} \vec{\nabla} \psi$$

L'équation d'équilibre se simplifie :

$$j_\varphi = R \frac{dP}{d\psi} + B_\varphi \frac{d\xi}{d\psi}$$

soit aussi :

$$j_\varphi = R \frac{dP}{d\psi} + \frac{\mu_0}{R} \xi \frac{d\xi}{d\psi}$$

$$\xi = \frac{1}{\mu_0} R B_\varphi$$

Équation de Grad-Shafranov

L'équation d'équilibre des forces s'écrit :

$$j_{\varphi} = R \frac{dP}{d\psi} + \frac{\mu_0}{R} \xi \frac{d\xi}{d\psi}$$

Il faut encore exprimer j_{φ} en fonction de ψ .

On utilise l'équation d'Ampère, $\mu_0 \vec{j} = \nabla \wedge \vec{B}$:

$$\mu_0 j_{\varphi} = -\frac{\partial}{\partial R} B_z + \frac{\partial}{\partial z} B_R$$

Les 2 composantes de champ magnétique s'expriment à partir du flux ψ :

$$B_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad B_z = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R}$$

L'équation d'Ampère se réécrit :

$$\mu_0 j_{\varphi} = -\frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

Cette expression permet de substituer le courant toroïdal dans l'équation d'équilibre des forces : c'est l'équation de Grad-Shafranov.

$$R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\mu_0 R^2 \frac{dP}{d\psi} - \mu_0^2 \xi \frac{d\xi}{d\psi}$$

Si les formes de la pression $P(\psi)$ et du courant $\xi(\psi)$ ainsi que les conditions de champ magnétique au bord sont connues, elles permettent de déduire la forme des surfaces de flux $\psi(R, z)$.