

# **DIFFUSION COLLECTIVE DE LA LUMIÈRE PAR UN MILIEU TURBULENT**

(Version 10/2013)



*A. Kharchenko*

**Cyrille HONORÉ**

**[cyrille.honore@polytechnique.edu](mailto:cyrille.honore@polytechnique.edu)**

Laboratoire de Physique des Plasmas

CNRS - UPMC - UPS

École Polytechnique (Palaiseau, France)

25/10/2013



**UPMC**  
PARISUNIVERSITAS

**UNIVERSITÉ  
PARIS  
SUD**



# Introduction

## Une observation directe de l'écoulement turbulent

La diffusion collective de la lumière laser est une mesure physique appliquée aux écoulements turbulents. Son originalité tient dans son caractère direct et non intrusif dans l'écoulement : l'instrumentation est complètement extérieure à l'écoulement, et ne nécessite aucun ensemencement.

Cette mesure permet l'observation directe des fluctuations de densité à une certaine échelle. Pour que le niveau de signal de diffusion soit détectable, les fluctuations doivent être suffisamment fortes : l'écoulement doit être turbulent.

La dynamique du signal de diffusion informe sur l'intensité et, par effet Doppler, sur la vitesse de ces fluctuations. Nous montrons que la distribution de probabilité de cette vitesse reproduit celle obtenue par vélocimétrie laser sur un écoulement ensemencé.

### Présentation du cours

Nous commencerons par une approche générale du phénomène de diffusion collective : quels sont les principaux processus physiques sont en jeu ? Quelles informations apportent-ils sur la dynamique du fluide ?

Le deuxième partie abordera plus en détail la physique de la diffusion Rayleigh collective. Nous verrons l'intérêt de la détection hétérodyne. Le rapport signal sur bruit en sortie de détecteur sera évalué. Nous verrons le montage optique laser nécessaire à la mise en œuvre de l'observation de la turbulence de l'air par diffusion collective.

La partie suivante établira les principales propriétés de l'écoulement qui peuvent être déduites du signal de diffusion, sur l'intensité des fluctuations et la distribution de la vitesse.

La dernière partie montrera d'autres milieux d'applications où l'observation par diffusion collective apporte des informations.

Ce cours de diffusion collective a été initié par D. Grésillon.

La version la plus récente de ce cours est disponible sur la page suivante :

<http://www.lpp.fr/?Cyrille-Honore>

# Historique de la diffusion collective dans les écoulements

Les premières mesures obtenues grâce à ce principe, l'ont été par H.Z. Cummins et al., en 1964 [Cummins1964, Yeh1964]. Leur objet d'étude était une solution de macromolécules. Ils ont pu observer la diffusion Rayleigh dans ce fluide. L'étape suivante a été franchie par T.J. Greytak et G.B. Benedek [Greytak1966], peu après. Leur étude a porté sur les gaz. Ils ont pu montrer des spectres liés aux fluctuations cinétiques, pour certains cas, et hydrodynamiques, pour d'autres.

R.J. Goldstein et W.F. Hagen [Goldstein1967] appliquèrent le principe aux écoulements turbulents, en 1967. Mais l'observation ne portait pas sur le gaz lui-même, mais sur de fines particules qui y étaientensemencées. Ce type d'approche est celui le plus couramment utilisé, pour étudier l'écoulement (cf., par exemple, W.K. George et al. [George1973]).

Les premières expériences de diffusion directement sur le gaz turbulent datent de 1980, par J.C. Lelièvre et J. Picard [Lelièvre1980]. Pourtant la pertinence d'un tel procédé était déjà établie à la fin des années 1960. La première idée d'étudier la turbulence par diffusion électromagnétique était de P. Gilles de Gennes [GillesDeGennes1966]. Elle fut développée par H.L. Frisch [Frisch1967] et G.B. Benedek [Benedek1964].

C'est donc le travail initié par J.C. Lelièvre qui a été repris au Laboratoire de Physique des Milieux Ionisés (maintenant Laboratoire de Physique des Plasmas), par l'équipe de D. Grésillon, en lumière infrarouge [Stern1983], puis en lumière visible [Antar2000]. D'autres équipes, comme celle de L. Lading, ont développés des diagnostics d'observation de la turbulence de l'air basés sur le même principe [Lading1993], mais avec des montages différents.

# Constantes physiques

## Constantes physiques fondamentales et dérivées

$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$  : constante de Boltzmann

$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  : constante de Planck

$C = 2,99 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$  : vitesse de la lumière dans le vide

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$  : permittivité du vide

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$  : perméabilité du vide

$q_e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  : charge de l'électron

$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  : masse de l'électron

$r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e^2}{m_e C^2} = 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ m}$  : rayon classique de l'électron

$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  : nombre d'Avogadro

$R_m = N_A k_B = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$  : constante universelle des gaz parfaits

$m_u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  : unité de masse atomique

## Grandeurs standard

$T_0 = 273,15 \text{ K}$  : température standard de l'air (  $0^\circ \text{C}$  )

$P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  : pression standard de l'air

$n_0 = 2,69 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$  : densité moléculaire d'un gaz parfait à  $T_0$  et  $P_0$

$\rho_{air} = 1,30 \text{ kg m}^{-3}$  : masse volumique de l'air à  $T_0$  et  $P_0$

$m_{air} = 28,97 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$  : masse molaire de l'air

$c_{sair} = \sqrt{5 R_m T_0 / 3 m_{air}} = 331 \text{ ms}^{-1}$  : vitesse du son à  $T_0$  dans l'air

$u_{thair} = \sqrt{5 R_m T_0 / 2 m_{air}} = 406 \text{ ms}^{-1}$  : vitesse thermique de l'air à  $T_0$

$N = 1 + 2,78 \cdot 10^{-4}$  : indice de réfraction de l'air à  $T_0$  et  $P_0$  , pour le visible ou l'infrarouge.

$\alpha_{volAIR} = 1,65 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3$  : polarisabilité volumique moyenne de l'air

$\alpha_{volN_2} = 1,68 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3$  : polarisabilité volumique du diazote

$\alpha_{volO_2} = 1,60 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3$  : polarisabilité volumique du dioxygène

$\alpha_{volCO_2} = 2,53 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3$  : polarisabilité volumique du dioxyde de carbone

$\alpha_{volHe} = 0,21 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3$  : polarisabilité volumique de l'hélium

$\alpha_{volAr} = 1,59 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3$  : polarisabilité volumique de l'argon

## Dimensions des grandeurs physiques

$W[ML^2T^{-2}]$  : énergie

$P[ML^{-1}T^{-2}]$  : pression

$E[MLT^{-2}Q^{-1}]$  : champ électrique

$D[QL^{-2}]$  : déplacement électrique

$H[QL^{-1}T^{-1}]$  : intensité magnétique

$B[MT^{-1}Q^{-1}]$  : induction magnétique

$V[ML^2T^{-2}Q]$  : potentiel électrique

$A[MLT^{-1}Q^{-1}]$  : potentiel vecteur

$\mu[MLQ^{-2}]$  : perméabilité

$\varepsilon[Q^2T^2M^{-1}L^{-3}]$  : permittivité

$\mu_m[QL^2T^{-1}]$  : moment magnétique

$\sigma[Q^2TM^{-1}L^{-3}]$  : conductivité

$Z[ML^2T^{-1}Q^{-2}]$  : impédance

$L[ML^2Q^{-2}]$  : inductance

$C[Q^2T^2M^{-1}L^{-2}]$  : capacité

$P[QL^{-2}]$  : polarisation

# Notations

Nous adopterons la notation complexe pour le champ électrique.

Sur l'ensemble du texte, les variables notées en rouge sont celles propres à la diffusion collective : nombre d'onde, signal, etc.

$\vec{k}_i$  ,  $\omega_i$  : vecteur d'onde et pulsation de l'onde incidente

$\vec{r}_j(t)$  : position du diffuseur

$\vec{E}_s(\vec{r}', t)$  : champ électrique diffusé total

$\vec{r}'$  : position de l'observateur

$\vec{k}_s$  : vecteur d'onde de l'onde diffusée

$\theta$  : angle de diffusion

$\vec{k}$  ,  $\lambda$  : vecteur d'onde et longueur d'onde de diffusion

$s(\vec{k}, t)$  : signal de diffusion collective

$\vec{p}_j(t)$  : polarisation d'un diffuseur

$\alpha_j$  : polarisabilité du diffuseur

$\alpha$  : polarisabilité moyenne du milieu

$\theta_{pol}$  : angle de variation de la polarisation

$n(\vec{r}, t)$  : densité moléculaire du milieu

## Montage hétérodyne

$\vec{E}_{ol}(\vec{r}', t)$  : champ électrique de l'onde oscillateur local (OL)

$\omega_m$  : pulsation de modulation

$\eta$  : efficacité quantique du détecteur

$\eta_H$  : efficacité d'hétérodyne

$i_b(t)$  : courant de battement

$V_s$  : volume de diffusion

$w$  : taille des faisceaux incident et OL dans la zone de mesure

$P_i$  ,  $P_{ol}$  : puissances des faisceaux incident et OL dans la zone de mesure

$L_{turb}$  : longueur effective de croisement du volume de diffusion avec la turbulence

$V_{turb}$  : volume de diffusion, restreint à la zone turbulente

$u(\vec{r})$  : profil du volume de diffusion

$I_b(\omega)$  : spectre (ou densité spectrale) du courant de battement

$S(\vec{k}, \omega)$  : spectre du signal de diffusion collective

## Diffusion collective et turbulence

$S(\vec{k})$  : facteur de forme statique de l'écoulement

$S(\vec{k}, \omega)$  : facteur de forme dynamique de l'écoulement

$C(\vec{k}, \tau)$  : fonction de corrélation temporelle du signal de diffusion collective

$\vec{\Delta}(\vec{r}, t, \tau)$  : déplacement de l'élément fluide situé en  $\vec{r}$  au temps  $t$ , après un délai  $\tau$ .

$\vec{U}(t)$  : vitesse de convection des fluctuations sur le volume de diffusion

$U_{\vec{k}}(t)$  : vitesse de convection projetée sur le vecteur d'onde de diffusion  $\vec{k}$

$P_{U_{\vec{k}}}$  : distribution de probabilité de la vitesse de convection projetée sur le vecteur d'onde de diffusion

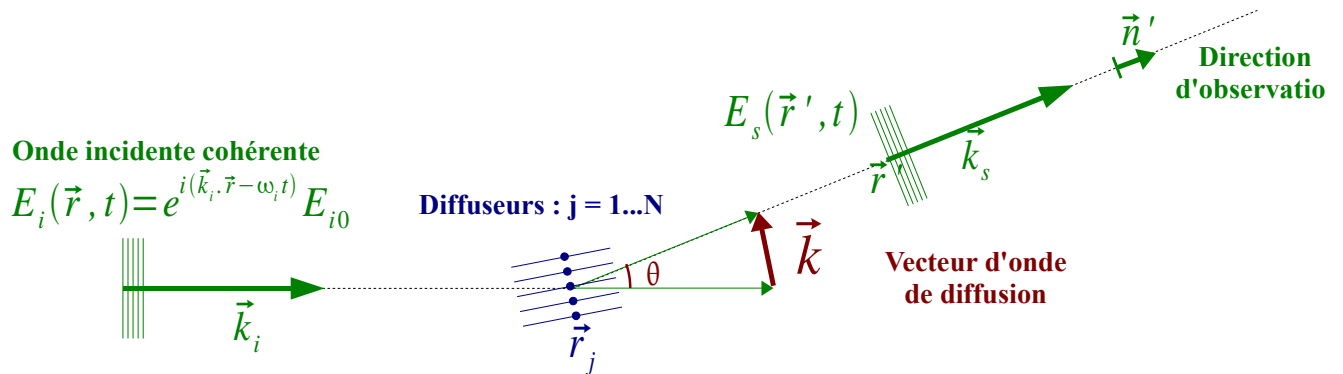


# 1 Principe de la diffusion collective

## 1.1 Diffusion particulaire

Le principe physique sous-jacent à cette mesure est la diffusion électromagnétique. Pour décrire le principe de la mesure, nous considérons dans le cas particulier de diffuseurs placés sur un réseau régulier. Du fait que nous nous intéressons à la cohérence entre les phases des champs électriques issus des différents diffuseurs, le terme de diffraction est plus approprié, mais le phénomène physique reste le même.

Le schéma de principe est donné ci-dessous :



Une onde plane monochromatique éclaire le milieu étudié :

$$E_i(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)} E_{i0}$$

Cette onde va interagir avec les diffuseurs positionnés en  $\vec{r}_j$ . Chaque diffuseur va ré-émettre une onde sphérique. Un détecteur est placé loin des diffuseurs, en  $\vec{r}'$ .

La direction entre les diffuseurs et le détecteur,  $\vec{n}'$ , ne dépend pas des diffuseurs car nous nous plaçons en champ lointain (le détecteur est par rapport à la taille du volume de diffusion). Le vecteur de l'onde diffusée a le même nombre d'onde que l'onde initiale mais suit la direction de la détection :

$$\vec{k}_s = k_i \vec{n}'$$

Le champ électrique diffusé total est la somme des champs électriques diffusés par chaque diffuseur :

$$E_s(\vec{r}', t) = \sum_j E_{sj}(\vec{r}', t)$$

L'indice « s » renvoie au terme anglais « scattering » utilisé pour la diffusion d'une onde par un milieu. Le faux ami anglais « diffusion » se limite aux processus diffusifs tels que celui de la chaleur ou des particules (comme le mouvement brownien).

L'amplitude du champ électrique diffusé  $E_{sj}$  par chaque diffuseur est la même pour l'ensemble des diffuseurs (vus à une même distance). La phase est fonction du chemin optique de la source au diffuseur, puis de celui-ci au détecteur :

$$\varphi_j = \vec{k}_i \cdot \vec{r}_j + \vec{k}_s \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_j)$$

Le champ électrique diffusé total peut alors s'écrire :

$$E_s(\vec{r}', t) \propto \sum_j e^{i[\vec{k}_i \cdot \vec{r}_j + \vec{k}_s \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_j) - \omega_i t]}$$

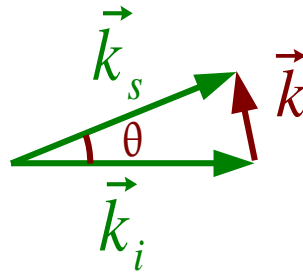
En réorganisant les termes dans l'exponentielle, nous obtenons :

$$E_s(\vec{r}', t) \propto e^{i(\vec{k}_s \cdot \vec{r}' - \omega_i t)} \sum_j e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_j}$$

où est introduit le vecteur d'onde de diffusion  $\vec{k}$  comme différence des vecteurs d'onde diffusé  $\vec{k}_s$  et incident  $\vec{k}_i$  :

$$\boxed{\vec{k} = \vec{k}_s - \vec{k}_i} \quad (1.1)$$

Cette relation correspond à la construction géométrique donnée par la figure de Bragg :



Dans l'expression de  $E_s(\vec{r}', t)$ , le facteur devant la somme  $e^{i(\vec{k}_s \cdot \vec{r}' - \omega_i t)}$  est un déphasage commun, qui décrit la propagation de l'onde diffusée.

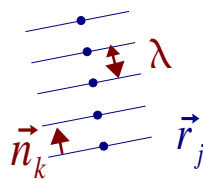
La somme de phases  $\sum_j e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_j}$  est importante car sa valeur varie énormément avec les positions relatives des diffuseurs.

Si les diffuseurs sont positionnés de façon aléatoire dans l'espace, la somme de ces phases sera destructive, et donc très faible.

Si, à l'inverse, les diffuseurs sont positionnés régulièrement sur un réseau de plans perpendiculaires à  $\vec{k}$  tel que leur inter-phase  $\vec{k} \cdot (\vec{r}_{j+1} - \vec{r}_j)$  soit  $2\pi$ , la somme des phases sera constructive et donc le champ électrique diffusé sera maximal. Autrement dit, il faut que les projections des positions  $\vec{r}_j$  des diffuseurs

sur la direction  $\vec{n}_k$  de  $\vec{k}$  soient espacées de  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  (la longueur d'onde associée à  $\vec{k}$ ) :

$$\vec{n}_k \cdot (\vec{r}_{j+1} - \vec{r}_j) = \lambda$$



La longueur d'onde qui importe, n'est donc pas celle de la source  $\lambda_i$ , mais la

longueur d'onde de diffusion  $\lambda$ . Elle dépend de  $\theta$ , l'angle de diffusion, c'est à dire de l'angle entre la direction incidente et la direction d'observation.

Du fait que  $\vec{k}_i$  et  $\vec{k}_s$  ont la même amplitude, le nombre d'onde  $k$  se déduit de la formule :

$$k = 2k_i \sin(\theta/2)$$

Pour la longueur d'onde associée  $\lambda$  la formule devient :

$$\lambda = \frac{1}{2 \sin(\theta/2)} \lambda_i$$

Dans la limite des petits angles,  $\theta \ll 1$ , les expressions se simplifient :  $k = k_i \theta$  et  $\lambda = \lambda_i / \theta$ .

La diffusion par une onde électromagnétique permet donc d'approcher l'organisation des diffuseurs à l'échelle correspondant à la longueur d'onde de diffusion  $\lambda$ .

Le champ électrique diffusé est intense si le milieu montre des fluctuations importantes à l'échelle de diffusion.

## 1.2 Diffusion collective sur un fluide turbulent

Ce principe de diffusion est commun à toutes les diffusions d'un milieu par une onde cohérente. Appliqué aux solides, il permet de retrouver les distances périodiques entre atomes dans le réseau cristallin, et de là, reconstruire la forme de celui-ci.

Ce principe de diffusion peut aussi être appliqué aux fluides. Les diffuseurs sont alors les molécules du gaz. C'est la diffusion Rayleigh. Le milieu est évidemment bien moins organisé qu'un cristal : l'amplitude du champ électrique diffusé sera bien plus faible.

L'originalité de la diffusion collective va être d'appliquer ce principe de diffusion à des échelles plus grandes que la taille d'un élément fluide. Nous ne voyons plus chaque molécule individuellement qui diffuse, mais le champ de densité du gaz.

### 2.a Signal de diffusion collective

Dans le champ diffusé total, la facteur principal est la somme des phases issues de l'ensemble des diffuseurs : c'est ce que nous appellerons le signal de diffusion :

$$s(\vec{k}, t) = \sum_j e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_j(t)} \quad (1.2)$$

Nous allons le rapprocher de la description classique du fluide : la densité. Dans toute la suite, nous entendrons par densité, la densité moléculaire, c'est à dire le nombre de molécules par unité de volume.

Si la longueur d'onde de diffusion est plus grande que l'échelle fluide, il est possible de passer d'une description microscopique (par la somme sur les molécules diffusantes), à une description fluide (par une intégrale pondérée par la densité fluide) : pour un élément de volume  $d^3\vec{r}$ ,  $n(\vec{r}, t) d^3\vec{r}$  est le nombre de molécules présentes dans l'élément de volume. Si l'élément de volume est bien plus petit que la longueur d'onde de diffusion  $\lambda$ , la phase  $e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}$  est commune à toutes les molécules présentes dans l'élément de volume. le signal de diffusion propre à cet

élément de volume s'écrit  $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} n(\vec{r}, t) d^3\vec{r}$ . Le signal de diffusion pour le volume global  $V_s$  peut alors s'écrire sous forme d'une intégrale :

$$s(\vec{k}, t) = \iiint_{V_s} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} n(\vec{r}, t) d^3\vec{r} \quad (1.3)$$

Le signal de diffusion collective est la transformée de Fourier de la densité du fluide suivant le vecteur d'onde de diffusion. Ceci montre alors le caractère collectif du signal diffusion : le signal de diffusion est propre à des phénomènes liés aux échelles fluides du milieu observé.

## 2.b Facteur de forme du signal de diffusion collective

Comment caractériser le fait que nous observons bien des phénomènes collectifs ? Pour cela nous allons comparer la variance du signal de diffusion à celle attendue pour un gaz incohérent.

### Variance du signal de diffusion

Le signal de diffusion, pour un fluide, est un signal aléatoire dépendant du temps : quelle est l'intensité du signal de diffusion  $s(\vec{k}, t)$  ?

Pour cela revenons à une description microscopique. Comme la position des diffuseurs est généralement uniformément aléatoire, la moyenne du signal au cours du temps est nulle :

$$\langle s(\vec{k}, t) \rangle_t = 0$$

Nous allons plutôt nous intéresser à la variance de ce signal :

$$\langle |s(\vec{k}, t)|^2 \rangle_t = \langle \sum_j \sum_l e^{-i\vec{k}\cdot[\vec{r}_j(t) - \vec{r}_l(t)]} \rangle_t$$

Cette variance est sensible aux positions relatives des diffuseurs.

### Le gaz incohérent

Séparons les termes croisés ( $j \neq l$ ) des termes diagonaux ( $j = l$ ) dans l'expression de la variance :

$$\langle |s(\vec{k}, t)|^2 \rangle_t = \langle \sum_j e^{-i\vec{k}\cdot\vec{0}} \rangle_t + \langle \sum_{j \neq l} e^{-i\vec{k}\cdot[\vec{r}_j(t) - \vec{r}_l(t)]} \rangle_t$$

Pour un gaz à l'équilibre thermodynamique, les positions des molécules ne sont pas corrélées entre elles. Les termes croisés forment une somme non constructive de phases. Leur moyenne est négligeable devant le premier terme, qui lui est égal au nombre de molécules qui diffusent  $N_s$ .

$$\langle |s(\vec{k}, t)|^2 \rangle_t \sim N_s \quad (1.4)$$

Nous remarquons que cette variance est indépendante de  $\vec{k}$  : elle est la même quelque soit l'angle de diffusion. C'est un bruit blanc propre à un signal non corrélé dans l'espace.

Pour un système aléatoire, cette valeur est la limite basse de la valeur de la variance. La variance du signal pourrait en fait prendre des valeurs plus petites, mais seulement dans des cas de très forte cohérence du milieu, où la somme des phases s'annulent (par exemple si la moitié des diffuseurs ont pour phase 0, et l'autre moitié,  $\pi$ ).

## La cohérence totale des phases

La limite supérieure pour la variance de  $s(\vec{k}, t)$  est le cas où tous les diffuseurs induisent la même phase (à  $2\pi$  près) :

$$s(\vec{k}, t) = N_s e^{-i\phi(t)}$$

Cette situation est inaccessible aux fluides. Seule la diffusion sur un solide monocristallin avec un vecteur d'onde de diffusion bien choisi, approche de cette situation. Dans ce cas, la variance du signal de diffusion vaut :

$$\langle |s(\vec{k}, t)|^2 \rangle_t \sim N_s^2$$

## Structures cohérentes en turbulence fluide

Pour un fluide turbulent, la situation est intermédiaire entre ces 2 cas extrêmes : la turbulence induit la formation de structures cohérentes à toutes les échelles. Cette cohérence va induire un niveau de signal supérieur au cas incohérent, mais largement inférieure au cas de la cohérence totale. Le niveau de signal de diffusion dépendra de la qualité de la cohérence des structures à l'échelle de diffusion.

## Facteur de forme

Nous introduisons le facteur de forme, comme étant la variance du signal de diffusion rapportée à sa valeur pour un gaz incohérent :

$$S(\vec{k}) = \frac{1}{N_s} \langle |s(\vec{k}, t)|^2 \rangle_t \quad (1.5)$$

Comme le nombre de diffuseurs  $N_s$  dans un fluide est au moins de l'ordre de  $10^{20}$  pour des conditions expérimentales typiques en laboratoire, la gamme de variation du facteur de forme est importante :

$$1 < S(\vec{k}) \ll N_s$$

## 2.c Loi de Kolmogorov

Comment le facteur de forme  $S(\vec{k})$  varie-t-il avec le nombre d'onde de diffusion  $k$  ? Les observations sur des écoulements turbulents (ici sur un jet d'air), montrent que le facteur de forme décroît suivant une loi de puissance sur une large gamme de nombre d'onde.

Cette loi de décroissance est en fait liée à la loi de Kolmogorov.

Suivant le modèle de la cascade d'énergie de Kolmogorov, l'énergie distribuée par nombre d'onde suit une loi de puissance :

$$E_k(k) \propto k^{-5/3}$$

Nous considérerons la densité comme un contaminant passif de cette cascade : l'hypothèse est audacieuse, compte tenu que la densité est une grandeur intervenant dans les équations de Navier-Stokes, mais les observations vont dans son sens. La densité suit alors cette même loi avec le nombre d'onde.

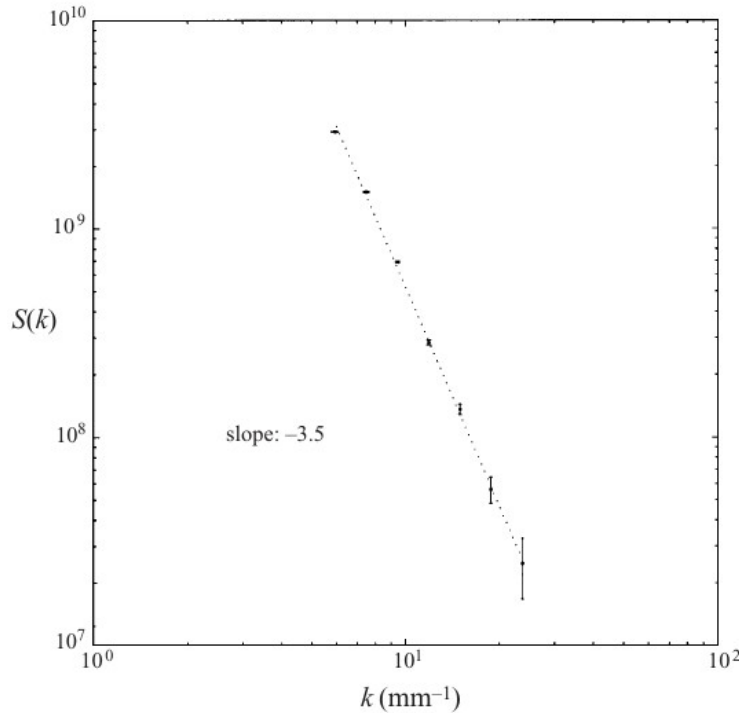
Pour passer du nombre d'onde  $k$ , au vecteur d'onde  $\vec{k}$ , nous supposons que la turbulence est isotrope : l'intensité ne dépend pas de la direction du vecteur d'onde.

$$S(k) = \int_0^{2\pi} k d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} k d\theta S(k, \theta, \varphi) = 4\pi k^2 S(\vec{k})$$

Pour le vecteur d'onde, la loi reste une loi de puissance avec une pente plus forte :

$$S(\vec{k}) \propto k^{-\frac{11}{3}} \quad (1.6)$$

La gamme de nombre d'onde sur laquelle cette loi est valide dépendra de l'écoulement. La limite aux petits nombres d'onde sera de l'ordre de l'échelle de production : c'est vers cette échelle que le facteur de forme sera le plus intense. La limite aux grands nombres d'onde correspondra aux échelles de dissipation. À ces échelles, le facteur de forme de 1 car les structures cohérentes disparaissent.



## 2.d Convection et effet Doppler

Même si c'est incompatible a priori avec le mouvement thermique du gaz, et la nécessité de turbulence pour la diffusion collective, mais afin de se faire une première intuition sur la dynamique du signal, nous envisageons une forme simple de mouvement : un fluide figé convecté à la vitesse constante et uniforme :  $\vec{U}$ .

Le déplacement des diffuseurs s'écrit alors :

$$\vec{r}_j(t) = \vec{r}_j(0) + \vec{U} t$$

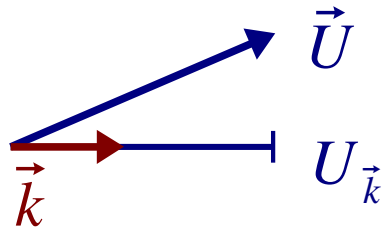
### Signal de diffusion et effet Doppler

Le signal de diffusion s'écrit alors :

$$s(\vec{k}, t) = \sum_j e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_j(t)} = e^{-i\vec{k} \cdot \vec{U} t} \sum_j e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_j(0)}$$

Nous introduisons la vitesse projetée sur le vecteur d'onde de diffusion  $\vec{k}$  :

$$U_{\vec{k}} = \frac{1}{k} \vec{k} \cdot \vec{U}$$



Le signal de diffusion est alors le produit de 2 facteurs :

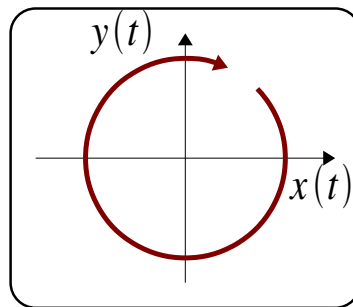
$$s(\vec{k}, t) = e^{-ikU_{\vec{k}}t} s(\vec{k}, 0)$$

Le second, constant est lié à l'intensité des fluctuations figées dans le fluide.

Le premier décrit la dynamique. C'est une rotation de phase à l'opposée de la fréquence Doppler. La fréquence Doppler  $f_D$  est le rapport de la composante de la vitesse  $U_{\vec{k}}$  sur la longueur d'onde  $\lambda$ .

$$f_D = \frac{U_{\vec{k}}}{\lambda} = \frac{k}{2\pi} U_{\vec{k}}$$

Si nous représentons le signal temporel de diffusion dans le plan complexe, ce type de figure apparaît :



L'effet principal observable est donc une phase tournante. Le module correspond à l'intensité des fluctuations de densité du milieu, à l'échelle de diffusion.

### Autocorrélation temporelle

La fonction d'autocorrélation temporelle et le spectre fréquentiel du signal permettent de faire ressortir certaines propriétés des signaux aléatoires.

La fonction de corrélation temporelle du signal est donnée par :

$$C(\vec{k}, \tau) = \frac{1}{N_s} \langle s^*(\vec{k}, t) s(\vec{k}, t + \tau) \rangle_T$$

Dans le cas de la convection uniforme, la corrélation s'exprime alors :

$$C(\vec{k}, \tau) = \frac{1}{N_s} |s(\vec{k}, 0)|^2 e^{-ikU_{\vec{k}}\tau}$$

soit :

$$C(\vec{k}, \tau) = S(\vec{k}) e^{-ikU_{\vec{k}}\tau}$$

Elle aussi prend la forme d'une fonction oscillante à la pulsation Doppler. Elle est

normée par le facteur de forme.

### Spectre fréquentiel et fréquence Doppler

Le spectre fréquentiel  $S(\vec{k}, f)$  du signal  $s(\vec{k}, t)$  peut s'exprimer comme la transformée de Fourier de l'autocorrélation temporelle du signal :

$$S(\vec{k}, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau C(\vec{k}, \tau) e^{i2\pi f \tau}$$

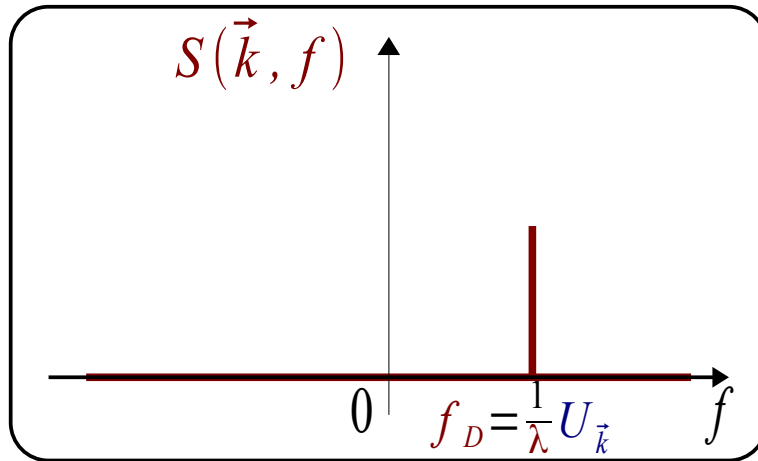
Pour la convection uniforme, le spectre fréquentiel a pour forme :

$$S(\vec{k}, f) = S(\vec{k}) \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i2\pi(-U_{\vec{k}}/\lambda + f)\tau}$$

soit :

$$S(\vec{k}, f) = S(\vec{k}) \delta\left(f - \frac{U_{\vec{k}}}{\lambda}\right)$$

Le spectre présente la forme d'une distribution de Dirac à la fréquence Doppler  $f_D$ . Le spectre fréquentiel permet donc de mettre en évidence la vitesse de convection de l'écoulement.



### Spectre du signal et écoulements turbulents

Pour un écoulement turbulent, la vitesse de convection  $U_{\vec{k}}$  n'est pas uniforme, mais suit une certaine loi de probabilité (c'est la même que celle observée par anémométrie Doppler laser sur particules) :  $P_{U_{\vec{k}}}(U)$

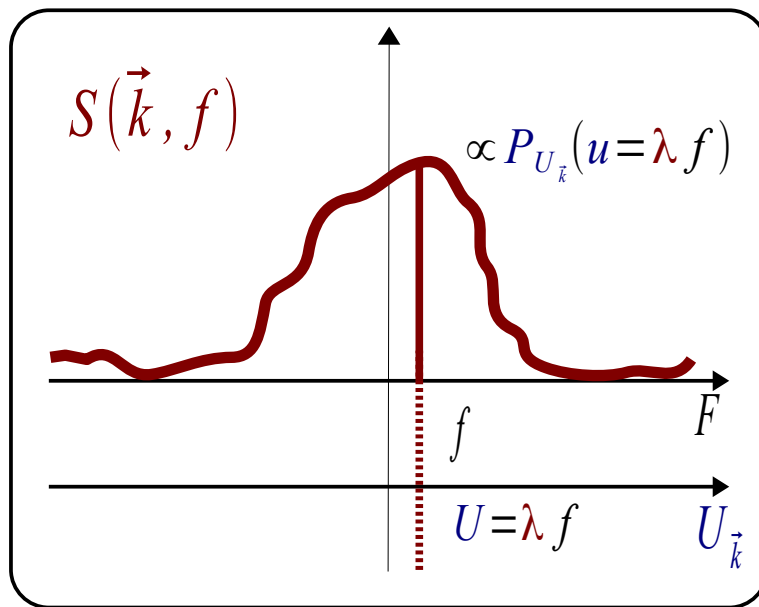
Comme pour l'anémométrie, le signal de diffusion collective va enregistrer le passage de structures cohérentes à différentes vitesses. Le spectre fréquentiel du signal de diffusion va alors reproduire la forme de la distribution de probabilité de la vitesse de convection projetée suivant le vecteur d'onde de diffusion :

$$S(\vec{k}, f) = \lambda S(\vec{k}) P_{U_{\vec{k}}}(U) \quad (1.7)$$

où la fréquence est liée à la vitesse par la relation Doppler  $U = \lambda f$ .

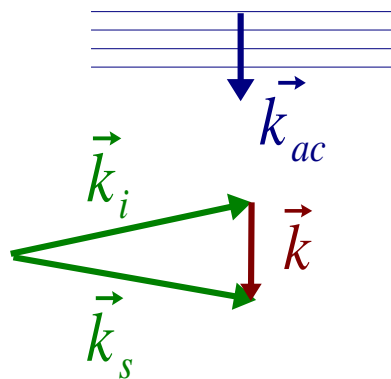
Le facteur  $\lambda$  dans l'expression du spectre fréquentiel vient du changement de variable entre la vitesse de convection et la fréquence.





## 2.e Les ondes sonores

En plus des structures convectées par l'écoulement, le signal de diffusion collective est sensible aux ondes sonores présentes dans le fluide, puisqu'une onde sonore produit une oscillation de la densité.



Si l'onde sonore a pour vecteur d'onde  $\vec{k}_{ac}$  (longueur d'onde  $\lambda_{ac}$ ) et pour fréquence  $f_0$  (elle se propage à la vitesse  $C_s = \lambda_{ac} f_{ac}$ ), la densité a pour forme :

$$n(\vec{r}, t) \propto \cos(\vec{k}_{ac} \cdot \vec{r} - 2\pi f_{ac} t)$$

Comme le signal de diffusion est la transformée de Fourier de la densité suivant le vecteur d'onde  $\vec{k}$ , l'onde sonore sera détectée si les vecteurs d'onde de l'onde sonore et de la diffusion correspondent (au signe près) :

$$\vec{k}_{ac} = \vec{k}$$

Comme le signal est aussi oscillant en temps, le spectre fréquentiel à la fréquence de l'onde sonore aura pour forme :

$$S(\vec{k}, f) \propto \delta(\vec{k} - \vec{k}_{ac}) \delta(f - f_{ac}) \quad (1.8)$$

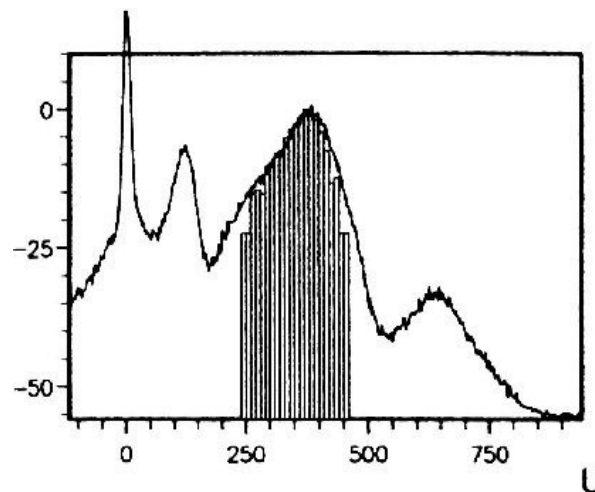
Le spectre fréquentiel montre alors un seul pic, à la fréquence de l'onde sonore  
 La relation Doppler fait apparaître la vitesse du son :

$$\lambda f = \lambda_{ac} f_{ac} = C_s$$

La diffusion collective permet l'observation simultanée des structures cohérentes convectées et les modes sonores se propageant dans l'écoulement.

## 2.f Comparaison avec l'anémométrie Doppler

La différence entre la diffusion collective et l'anémométrie Doppler laser, provient de la nature des diffuseurs. Pour l'anémométrie classique, les diffuseurs sont les particules micrométriques ensemencées dans l'écoulement. Pour la diffusion collective, ce sont les structures cohérentes de l'écoulement. Si les structures cohérentes sont réparties uniformément dans l'écoulement, les histogrammes correspondent.



*JP Bonnet et al. MSI (1995)*

La figure ci-dessus est le résultat de l'observation d'une couche de mélange supersonique, pour une position à l'intérieur de cette couche. L'histogramme correspond aux mesures par vélocimétrie Doppler laser. La courbe en continu correspond au spectre fréquentiel de diffusion collective. Pour les 2 courbes, l'abscisse est la vitesse en m/s (en utilisant la relation Doppler entre la vitesse et la fréquence,  $U = \lambda f$ ), l'ordonnée est en échelle logarithmique (les courbes sont normées à leur maximum).

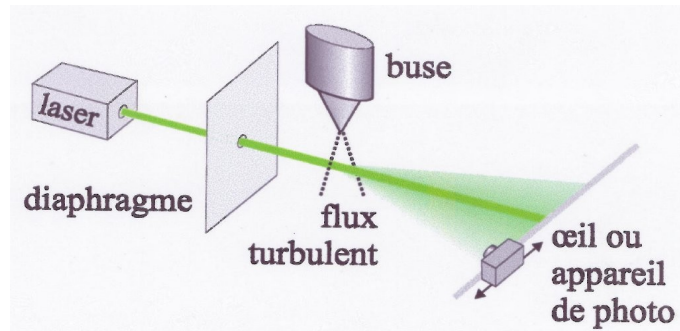
La comparaison montre que, pour la partie la plus intense correspondant à la convection, les courbes ont la même forme (vitesse autour de 400 m/s). Le spectre de la diffusion collective montre en plus 2 pics latéraux correspondant à des ondes sonores se propageant vers l'avant ou vers l'arrière de l'écoulement. Comme les modes sonores se propagent par rapport à l'écoulement, ils sont décalés de la vitesse du son par rapport aux structures convectées (environ 250 m/s car l'écoulement est froid). Le pic à vitesse nulle est un effet d'appareil.

## 1.3 Observation visuelle de la diffusion collective

Ce phénomène de diffusion collective sur les fluides est observable quasiment à l'œil nu. L'expérience a été faite par A. Kharchenko.

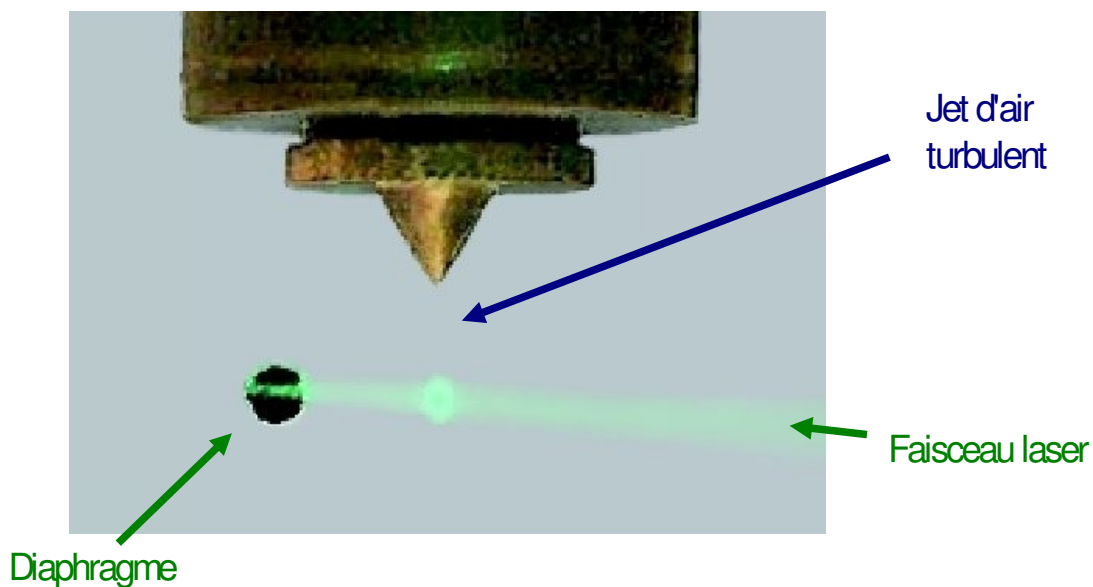
Le montage est alors celui indiqué sur le schéma ci-dessous, un faisceau laser

visible (argon ionisé,  $\lambda_i=0,514\ \mu m$  ) éclaire un jet d'air turbulent généré par l'air sous pression expulsé par un buse de diamètre  $1\ mm$  . Comme nous le verrons par la suite, la diffusion collective n'est détectable qu'en diffusion vers l'avant. Un appareil photo est alors placé presque dans l'axe du faisceau de manière à observer le faisceau en diffusion à petit angle  $\theta=60\ mrad=3,5^\circ$  . la longueur d'onde de diffusion correspondante est alors  $\lambda\sim\lambda_i/\theta=8,7\ \mu m$  . Un écran blanc percé d'un diaphragme est interposé pour servir de fond à la photo.



*A. Kharchenko*

La photo ci-dessous montre le résultat : Le faisceau est « visible » par diffusion Rayleigh.



*A. Kharchenko*

Nous voyons une tache lumineuse plus intense sous la buse : La diffusion est exacerbée dans cette zone par les fluctuations dues à la turbulence à l'échelle d'observation. En dehors de cette zone : l'écoulement est calme : la lumière diffusée correspond à la diffusion incohérente.

# 2 Diffusion Rayleigh collective

Nous abordons ici plus précisément les processus en jeu dans la diffusion collective. Le phénomène physique de base est la diffusion Rayleigh. Lord Rayleigh a été le premier à décrire la diffusion de la lumière par l'air en 1871 (dans *Philosophical Magazine* 41). Les diffuseurs sont des molécules neutres du gaz. Leurs nuages électroniques vibrent sous l'effet de la lumière reçue. Cette vibration induit une lumière diffusée dans toutes les directions. La diffusion Rayleigh peut être généralisée à toute diffusion électromagnétique sur des particules neutres, plus petites que la longueur d'onde de la lumière incidente.

La diffusion Rayleigh est une diffusion élastique de la lumière, comme la diffusion Thomson et la diffusion de Mie (il n'y a ni absorption, ni émission d'énergie par le diffuseur). La diffusion Thomson s'applique à des particules chargées libres, comme les électrons libres d'un plasma. Dans ce cas, c'est l'accélération des électrons qui induit un champ électrique diffusé. La diffusion de Mie généralise la diffusion Rayleigh aux diffuseurs de toutes tailles, même ceux plus grands que la longueur d'onde de la lumière. Elle s'applique, par exemple, à la diffusion de la lumière du soleil sur les gouttelettes d'eau des nuages dans l'atmosphère.

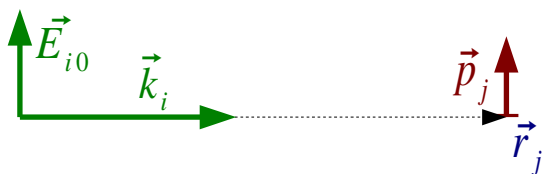
## 2.1 Polarisation des molécules

La description générale de la diffusion Rayleigh peut être trouvée dans le manuel de J.D. Jackson [Jackson1975]. B. Chu décrit directement la diffusion par un milieu diélectrique fluctuant [Chu1974]. Le champ électrique rayonné par un dipôle oscillant est décrit par G. Chartier [Chartier1997]. M. Born approche la diffusion Rayleigh comme une limite de la diffusion de Mie [Born2002].

### 1.a Polarisation d'une molécule

Pour décrire la diffusion Rayleigh, nous utiliserons l'approximation de Born : Le champ électromagnétique et le milieu ne sont pas traités de manière auto-cohérente, mais par une approche perturbative : la réaction de chaque molécule neutre du gaz est évalué à partir du champ incident. Le champ diffusé sera négligeable devant le champ incident.

Le schéma de principe est montré ci-dessous.



Le champ électrique incident est une onde mono-mode longitudinalement, de vecteur d'onde  $\vec{k}_i$ . Nous y associons un vecteur d'onde  $\lambda_i = \frac{2\pi}{k_i}$ , une fréquence

$\nu_i = \frac{C}{2\pi N} k_i$  et une pulsation  $\omega_i = 2\pi \nu_i$ .  $C$  est la vitesse de la lumière dans le vide.  $N$  est l'indice de réfraction du milieu (nous verrons plus loin que l'indice de

réfraction est directement relié à la diffusion Rayleigh). Le champ électrique est aussi polarisé linéairement ; le champ électrique initial  $\vec{E}_{i0}$  est unidirectionnel.

Le champ électrique se propage dans le gaz sous forme d'onde plane :

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)} \vec{E}_{i0}$$

### Polarisabilité

Le gaz est composé de molécules neutres. L'effet du champ électrique incident est de polariser ces molécules : les nuages électroniques et les noyaux subissent des forces opposées. Le dipôle ainsi créé est proportionnel au champ électrique extérieur. Le moment dipolaire, créé à la position de la molécule  $\vec{r}_j(t)$ , s'écrit :

$$\vec{p}_j(t) = \alpha_j \epsilon_0 \vec{E}_i(\vec{r}_j(t), t) \quad (2.1)$$

Le coefficient de proportionnalité  $\alpha_j$ , appelé polarisabilité, dépend de la nature de la molécule. Il décrit la susceptibilité propre à la molécule.

En dehors des molécules mono-atomiques, la polarisabilité est en fait non isotrope : la polarisation de la molécule sera différente suivant son orientation par rapport à la polarisation du champ électrique incident. Il s'agit alors non pas d'un coefficient, mais d'un tenseur de polarisabilité. Pour un gaz, l'orientation de la molécule est uniformément aléatoire. Pour une observation à l'échelle fluide, les mesures étant toujours moyennées sur une grande quantité de diffuseurs, ce tenseur est remplacé par une moyenne sur toutes les orientations possibles [Miles2001]. Cet effet avait déjà été mis en évidence par Rayleigh en 1918.

Il faut noter que 2 autres définitions de la polarisabilité existent dans la littérature (e. g. M. Snee et al. [Snee2005]) : la polarisabilité dite volumique :

$$\alpha_{vol j} = \frac{1}{4\pi} \alpha_j$$

et la polarisabilité dite SI (comme unités SI) :

$$\alpha_{SI j} = \epsilon_0 \alpha_j$$

$\alpha_{vol j}$  (comme  $\alpha_j$ ) a la dimension d'un volume ( $[L^3]$ ) : ce volume correspond à celui sur lequel la molécule est polarisable. Il sera alors inférieur à celui de la molécule elle-même. Typiquement, le volume d'une molécule diatomique est de l'ordre  $10^{-29} m^3$ . Les valeurs de  $\alpha_{vol}$  sont données pour quelques gaz dans la liste des grandeurs physiques en début de document.

La polarisabilité peut être directement reliée à 2 notions macroscopiques : l'indice de réfraction du milieu ainsi que la section efficace de la diffusion Rayleigh (que nous verrons plus loin).

## 1.b Indice de réfraction et polarisabilité

D'un point de vue macroscopique, le milieu a une polarisation moyenne  $\langle \vec{P} \rangle$ , produit de la densité moléculaire  $\langle n \rangle$ , par le dipôle propre à chaque molécule  $\vec{p}$  :

$$\langle \vec{P} \rangle = \langle n \rangle \vec{p}$$

Le dipôle propre à chaque molécule est, comme vu plus haut, induit par le champ

électrique  $\vec{E}$  qu'elle voit ( on considère une polarisabilité moyenne  $\alpha$  ):

$$\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$$

L'indice de réfraction  $N$  intervient, par l'intermédiaire de la susceptibilité  $\chi_e = N^2 - 1$  dans le rapport entre la polarisation moyenne  $\langle \vec{P} \rangle$  et le champ électrique macroscopique  $\vec{E}_m$  :

$$\langle \vec{P} \rangle = \epsilon_0 (N^2 - 1) \vec{E}_m$$

Si nous identifions le champ électrique macroscopique  $\vec{E}_m$ , au champ vu par la molécule  $\vec{E}$ , avec ces 2 dernières expressions, nous pouvons donner une première approximation de la polarisabilité moyenne en fonction de l'indice de réfraction :

$$\alpha \sim \frac{N^2 - 1}{\langle n \rangle}$$

Mais le champ électrique  $\vec{E}$  vu par chaque molécule est en fait différent du champ macroscopique  $\vec{E}_m$ . Le champ macroscopique  $\vec{E}_m$  considère que le milieu a une polarisation moyenne  $\langle \vec{P} \rangle$ , complètement uniforme. Or localement une molécule voit à longue distance, cette polarisation uniforme, mais en deçà d'une certaine distance, elle voit quelques dipôles voisins. Nous devons soustraire de  $\vec{E}_m$ ,  $\vec{E}_p$ , le champ électrique créé localement par la polarisation macroscopique moyenne, puis nous devons ajouter  $\vec{E}_{near}$ , le champ électrique dû aux dipôles sur les molécules voisines :

$$\vec{E}(\vec{r}', t) = \vec{E}_m(\vec{r}', t) - \vec{E}_p(\vec{r}', t) + \vec{E}_{near}(\vec{r}', t)$$

$\vec{E}_p$  est le champ électrique induit sur la molécule par un dipôle moyen uniforme sur une sphère. Le résultat est donné par J.D. Jackson [Jackson1975] ou M. Born [Born2002] :

$$\vec{E}_p = \frac{-1}{3\epsilon_0} \langle \vec{P} \rangle$$

Le champ électrique dû aux dipôles proches dépend de la distribution des autres molécules autour de la molécule. Pour un gaz, la distribution des molécules autour d'une molécule est aléatoire et isotrope. Du fait de cette symétrie, il peut être montré que :

$$\vec{E}_{near} = \vec{0}$$

Ceci n'est plus vrai dans les liquides et les solides (sauf cas particulier des réseaux cubiques).

Le champ électrique vu par la molécule est alors :

$$\vec{E} = \vec{E}_m + \frac{1}{3\epsilon_0} \langle \vec{P} \rangle$$

Cette expression est combinée avec l'expression de  $\langle \vec{P} \rangle$  en fonction de  $\vec{E}$  :

$$\frac{1}{\langle n \rangle \alpha \epsilon_0} \langle \vec{P} \rangle = \vec{E}_m + \frac{1}{3 \epsilon_0} \langle \vec{P} \rangle$$

Cette dernière relation et celle faisant intervenir l'indice de réfraction ( $\langle \vec{P} \rangle = \epsilon_0 (N^2 - 1) \vec{E}_m$ ) permettent d'extraire une relation entre la polarisabilité du gaz et l'indice de réfraction :

$$\alpha = \frac{3}{N^2 + 2} \frac{N^2 - 1}{\langle n \rangle}$$

C'est la relation de Clausius-Mossotti, qui est un cas particulier de la relation de Lorentz-Lorenz (applicable à des milieux plus généraux). Elle permet d'estimer la polarisabilité à partir d'une mesure macroscopique de l'indice de réfraction (et de la densité moléculaire).

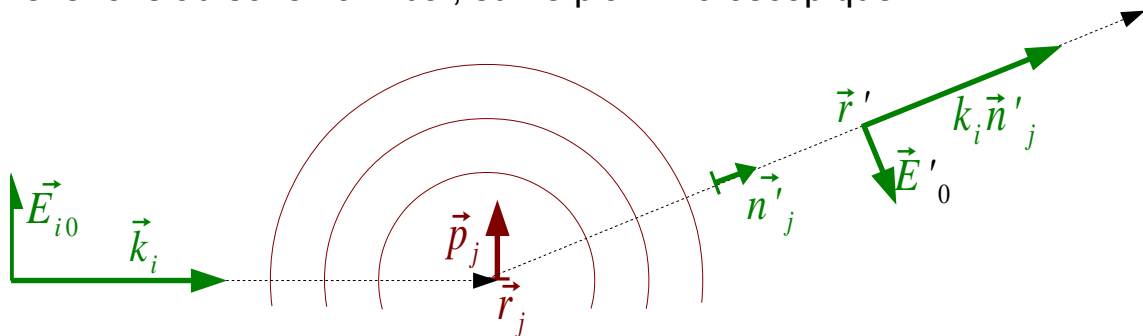
Pour l'air dans les conditions normales de température et de pression, l'indice est de:  $N = 1 + 2,78 \cdot 10^{-4}$  ; la polarisabilité moyenne de l'air est alors :

$$\alpha_{air} = 2,07 \cdot 10^{-29} m^3 \quad (\text{soit } \alpha_{vol air} = \frac{\alpha_{air}}{4 \pi} = 1,65 \cdot 10^{-30} m^3).$$

En appliquant la relation inverse, nous voyons que pour des polarisabilités comparables, mais des densités de milieux diélectriques solides ou liquides, l'indice de réfraction aura des valeurs plus proches de 2.

## 2.2 Diffusion Rayleigh

Nous revenons au schéma initial, sur le plan microscopique.



### 2.a Rayonnement d'un dipôle

Nous allons calculer  $\vec{E}_{sj}(\vec{r}', t)$ , le champ électrique rayonné par le dipôle  $\vec{p}_j(t)$ , en résolvant les équations de Maxwell, avec pour source, le dipôle.

Le dipôle induit par le champ électrique incident sur la molécule s'écrit :

$$\vec{p}_j(t) = \alpha_j \epsilon_0 \vec{E}_i(\vec{r}_j(t), t)$$

Le dipôle oscillant intervient comme une source pour le champ déplacement électrique  $\vec{D}_{sj}$  :

$$\vec{D}_{sj}(\vec{r}', t) = \epsilon_0 \vec{E}_{sj}(\vec{r}', t) + \vec{p}_j(t) \delta(\vec{r}' - \vec{r}_j(t))$$

Les équations de Maxwell associent le champ magnétique  $\vec{B}_{sj}$  au champ électrique :



$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_{s_j}(\vec{r}', t) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}_{s_j}(\vec{r}', t)$$

soit l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_{s_j}(\vec{r}', t) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E}_{s_j}(\vec{r}', t) + \vec{p}_j(t) \delta(\vec{r}' - \vec{r}_j(t)))$$

que nous associerons avec l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_{s_j}(\vec{r}', t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_{s_j}(\vec{r}', t)$$

Les grandeurs électromagnétiques oscillent temporellement à la pulsation  $\omega_i$ . La dépendance temporelle propre au mouvement du gaz ( $\vec{r}_j(t)$ ) est beaucoup plus lente, et donc n'intervient pas dans les dérivées temporelles des grandeurs électromagnétiques : le milieu est considéré figé durant la propagation des ondes électromagnétiques.

Pour l'étude concernant la propagation des ondes électromagnétiques, nous oublierons la dépendance en temps de la position des molécules : nous noterons simplement  $\vec{r}_j$ .

La combinaison de ces 2 équations conduit alors à une équation d'onde avec pour source le dipôle  $\vec{p}_j(t)$  :

$$-\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_{s_j}(\vec{r}', t)) + \frac{\omega_i^2}{C^2} \vec{E}_{s_j}(\vec{r}', t) = -\mu_0 \vec{p}_j(t) \delta(\vec{r}' - \vec{r}_j)$$

La solution de cette équation différentielle du second ordre à source ponctuelle est une fonction de Green :

$$\vec{E}_{s_j}(\vec{r}', t) = \frac{\mu_0 \omega_i^2}{4\pi} \frac{e^{ik_i|\vec{r}' - \vec{r}_j|}}{|\vec{r}' - \vec{r}_j|} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r}_j - \omega_i t)} \vec{n}'_j \wedge (\vec{n}'_j \wedge \vec{p}_j(t))$$

$\vec{n}'_j$  est la direction d'observation, entre la position de la molécule  $\vec{r}_j$  et la position de mesure  $\vec{r}'$  du champ électrique.

## 2.b Onde sphérique diffusée

En utilisant l'expression du dipôle, le champ électrique diffusé est ré-écrit en fonction de l'onde initiale et la position de la molécule (nous utilisons la relation  $\mu_0 \epsilon_0 C^2 = 1$ ) :

$$\vec{E}_{s_j}(\vec{r}', t) = \frac{\pi \alpha_j}{N^2 \lambda_i^2} \frac{e^{ik_i|\vec{r}' - \vec{r}_j|}}{|\vec{r}' - \vec{r}_j|} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r}_j - \omega_i t)} \vec{n}'_j \wedge (\vec{n}'_j \wedge \vec{E}_{i0}) \quad (2.2)$$

L'onde diffusée est une onde sphérique qui se propage dans tout l'espace. Voyons le sens physique des différents facteurs (en partant de la fin).

### Effet de polarisation

le dernier facteur  $\vec{E}'_{ij0} = \vec{n}'_j \wedge (\vec{n}'_j \wedge \vec{E}_{i0})$  est l'amplitude du champ électrique initial, modifié par le changement de polarisation.



$\vec{E}'_{ij0}$  est par nature perpendiculaire à la direction de propagation  $\vec{n}'_j$  : sa polarisation peut être différente de celle initiale. Nous noterons  $\theta_{j\text{pol}}$ , l'angle de variation de la polarisation :  $\theta_{j\text{pol}} = \pi/2 - \widehat{(\vec{n}'_j, \vec{E}_{i0})}$ . L'amplitude du champ électrique, après changement de polarisation, dépend de cet angle :  $E'_{ij0} = E_{i0} \cos \theta_{j\text{pol}}$ .

Si  $\vec{E}_{i0}$  a une polarisation perpendiculaire au plan de diffusion, alors,  $\theta_{j\text{pol}} = 0$  et  $\vec{E}'_{ij0} = \vec{E}_{i0}$ . La diffusion est d'amplitude maximale. Si  $\vec{E}_{i0}$  a une polarisation dans le plan de diffusion, alors  $\vec{E}'_{ij0}$  est aussi dans le plan de diffusion, perpendiculairement à  $\vec{n}'_j$ , et son amplitude est alors :  $E'_{ij0} = E_{i0} \cos \theta$  ( $\theta_{j\text{pol}} = \theta$ ). Dans ce cas, en diffusion à angle droit ( $\theta = \pi/2$ ), la champ diffusée est nulle ( $E'_{ij0} = 0$ ).

### Phase de l'onde incidente

Le 3ème facteur  $e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r}_j - \omega_i t)}$  est la phase de l'onde initiale à la position de la molécule.

### Onde sphérique

La phase  $e^{ik_i|\vec{r}' - \vec{r}_j|}$  décrit la propagation de l'onde entre la position de la molécule,  $\vec{r}_j$ , et le point où elle est évaluée,  $\vec{r}'$ . Le front d'onde est sphérique.

Le facteur de décroissance en  $\frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}_j|}$  du champ électrique est intrinsèque à son expansion sphérique : l'intensité de l'onde diffusée se répartit sur toute la sphère de rayon  $|\vec{r}' - \vec{r}_j|$  (donc de surface variant en  $|\vec{r}' - \vec{r}_j|^2$ ). L'intensité par unité de surface décroît alors en  $\frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}_j|^2}$ , et le champ électrique, en  $\frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}_j|}$ .

### Rayon de Rayleigh

Le premier facteur  $r_{Rj} = \frac{\pi \alpha_j}{N^2 \lambda_i^2}$  a la dimension d'une longueur : c'est le rayon de Rayleigh. C'est le facteur propre au processus initial de la diffusion Rayleigh : la polarisation de la molécule. Il caractérise son efficacité.

Pour la diffusion Thomson, le champ électrique diffusé a la même expression, en remplaçant le rayon de Rayleigh,  $r_{Rj}$  par  $r_0$ , le rayon classique de l'électron :

$$r_0 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_e^2}{m_e c^2} = 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Le processus initial est alors le rayonnement de l'électron accéléré par le champ électrique incident. Nous verrons que ce rayon est comparable au rayon de Rayleigh dans l'air, pour une lumière ultraviolette.

## 2.c Rayon de Rayleigh et section efficace de diffusion

La section efficace de la diffusion Rayleigh sur une molécule est l'intensité lumineuse diffusée dans une direction angulaire  $(\theta, \varphi)$ , rapportée à l'intensité

lumineuse incidente. À grande distance d'observation  $r'$ , elle s'exprime par :

$$\sigma_j(\theta, \varphi) = \frac{r'^2 I_{sj}}{I_i} = \frac{r'^2 \langle |E_{sj}|^2 \rangle}{\langle |E_i|^2 \rangle}$$

En moyennant sur les polarisations initiales possibles, la section efficace est donnée par :

$$\sigma_j(\theta, \varphi) = \frac{\pi^2 \alpha_j^2}{N^4 \lambda_i^4} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} = r_{Rj}^2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}$$

Intégrée suivant toutes les directions  $(\theta, \varphi)$ , la section efficace totale est :

$$\sigma_{Rj} = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \sin \theta \sigma_j(\theta, \varphi) d\theta$$

après intégration :

$$\sigma_{Rj} = \frac{8\pi^3 \alpha_j^2}{3N^4 \lambda_i^4} = \frac{8\pi}{3} r_{Rj}^2$$

La section efficace totale est proportionnelle au carré du rayon de Rayleigh.

Nous remarquons que la section efficace a une dépendance sur la longueur d'onde de l'onde incidente en  $1/\lambda_i^4$ . Cette forte dépendance explique la couleur bleue du ciel : la couleur du ciel est due à la diffusion des rayons solaires par l'atmosphère. La diffusion est plus intense pour les longueurs d'onde plus courtes, correspondant au bleu. En diffusion de Mie sur des particules macroscopiques, cette dépendance est beaucoup plus faible : la lumière diffusée par le soleil sur les nuages est blanche.

En application sur l'air, avec une lumière verte de longueur d'onde  $\lambda_i = 0,514 \mu m$  (celle du laser argon ionisé, que nous utiliserons), le rayon de Rayleigh est  $r_{R \text{ air, vert}} = 2,46 \cdot 10^{-16} m$ . la section efficace totale pour une molécule est :  $\sigma_{R \text{ air, vert}} = 5,07 \cdot 10^{-31} m^2$ .

À cause de la diffusion, un faisceau de lumière qui traverse l'air voit son intensité  $I(l)$  décroître exponentiellement avec la distance  $l$  parcourue :

$$I(l) = e^{-\beta l} I(0)$$

Le coefficient de décroissance  $\beta$ , est le produit de section efficace par densité moléculaire moyenne de  $\langle n \rangle$  :

$$\beta = \sigma_{Rj} \langle n \rangle$$

L'inverse de  $\beta$ ,  $\Lambda$ , correspond à la distance sur laquelle l'intensité lumineuse est réduite d'un facteur  $e^{-1}$  :

$$\Lambda = \beta^{-1}$$

Appliqué à l'air, pour la longueur d'onde  $\lambda_i = 0,514 \mu m$ , dans les conditions normales de température et de pression de l'air, ceci implique :  $\beta_{\text{air vert}} = 1,36 \cdot 10^{-5} m^{-1}$ , soit  $\Lambda_{\text{air vert}} = 73 km$ . Pour la limite du visible vers le rouge, ( $\lambda_i = 0,65 \mu m$ ),  $\Lambda_{\text{air rouge}} = 190 km$ . Pour celle vers le violet, ( $\lambda_i = 0,4 \mu m$ ),  $\Lambda_{\text{air violet}} = 117 km$ .

$$\lambda_i = 0,41 \mu m \text{ ) : } \Lambda_{\text{air violet}} = 30 km \text{ .}$$

Pour une épaisseur d'atmosphère traversée par des rayons du soleil vu au zénith ( $l = 8 km$ ), la transmission de ces rayons à travers l'atmosphère ( $e^{-l/\Lambda}$ ) varie de 0,76 pour le violet à 0,96 pour le rouge. Cette lumière du soleil transmise à travers l'atmosphère au zénith est par définition blanche. Quand le soleil est vu proche de l'horizon ( $l = 300 km$ ), la transmission est très différente : elle varie de  $4,5 \cdot 10^{-5}$  pour le violet, à 0,21 pour le rouge : le soleil paraît rouge à l'horizon ; sa lumière est aussi moins intense.

## 2.3 Approximation champ lointain

### 3.a Conditions de l'approximation champ lointain

Le champ électrique total diffusé est la somme des champs électriques diffusés par chaque molécule qui sera présente dans le volume de diffusion :

$$\vec{E}_s(\vec{r}', t) = \sum_j \vec{E}_{s_j}(\vec{r}', t)$$

Il s'exprime alors par :

$$\vec{E}_s(\vec{r}', t) = \sum_j \frac{\pi \alpha_j}{N^2 \lambda_i^2} \frac{e^{i k_i |\vec{r}' - \vec{r}_j|}}{|\vec{r}' - \vec{r}_j|} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r}_j - \omega_i t)} \vec{n}'_j \wedge (\vec{n}'_j \wedge \vec{E}_{i0})$$

L'expression du champ électrique diffusé par une molécule dépend de façon complexe de la molécule (les termes en rouge et bleu dans l'expression :  $\vec{r}_j$ ,  $\alpha_j$  et  $\vec{n}'_j$ ).

Afin de simplifier cette sommation, nous allons nous placer dans l'approximation de champ lointain. Pour que cette approximation soit valable, il faut remplir 2 conditions :

- $|\vec{r}'| \gg |\vec{r}_j|$  : La distance entre le point de mesure et le volume de diffusion  $|\vec{r}'|$  est beaucoup plus grande que la taille du volume de diffusion lui-même  $|\vec{r}_j|$  (nous plaçons l'origine du repère au centre du volume de diffusion).
- $|\vec{r}'| \gg \lambda_i$  : cette distance doit aussi être grande devant la longueur d'onde du champ incident.

Ces 2 conditions permettent de remplacer, localement, au point d'observation, la somme d'ondes sphériques par une somme d'ondes planes. Ces ondes planes ont toutes la même direction :  $\vec{n}'_j = \vec{n}'$ . Leur phase s'écrit :  $k_i |\vec{r}' - \vec{r}_j| = k_i \vec{n}' \cdot (\vec{r}' - \vec{r}_j)$ . De plus, nous considérons la même distance de

décroissance pour tous les diffuseurs  $\frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}_j|} \sim \frac{1}{r'}$

Le champ électrique diffusé par chaque molécule se simplifie en :

$$\vec{E}_{s_j}(\vec{r}', t) = \frac{\pi \alpha_j}{N^2 \lambda_i^2} \frac{e^{i k_i \vec{n}' \cdot \vec{r}'}}{r'} e^{i[(\vec{k}_i - k_i \vec{n}') \cdot \vec{r}_j - \omega_i t]} \vec{n}' \wedge (\vec{n}' \wedge \vec{E}_{i0}) \quad (2.3)$$

Nous noterons  $\vec{E}'_{i0}$ , le champ électrique incident, modifié par le changement de polarisation (qui ne dépend plus du diffuseur) :

$$\vec{E}'_{i0} = \vec{n}' \wedge (\vec{n}' \wedge \vec{E}_{i0})$$

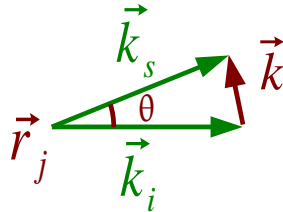
### 3.b Vecteur d'onde de diffusion et figure de Bragg

Cette forme simplifiée du champ électrique diffusé fait apparaître 2 nouveaux vecteurs d'onde :

$\vec{k}_s = k_i \vec{n}'$  est le vecteur d'onde de l'onde diffusée. Il ne dépend plus de la molécule qui diffuse. Le nombre d'onde est le même que celui de l'onde incidente :  $k_s = k_i$ . La diffusion est élastique : les photons incident et diffusé ont la même longueur d'onde, donc même énergie. Le processus de diffusion n'implique pas ici d'absorption ou d'émission d'énergie par le diffuseur.

$\vec{k} = \vec{k}_s - \vec{k}_i$  est le vecteur d'onde de diffusion.

Le nombre d'onde de diffusion associé va dépendre de l'angle  $\theta$  entre les vecteurs d'onde incident  $\vec{k}_i$  et diffusé  $\vec{k}_s$ . La construction géométrique est donnée par la figure de Bragg :



Cette construction en triangle isocèle donne la relation entre le nombre d'onde de diffusion  $k$  (ou la longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ ) et l'angle de diffusion  $\theta$  :

$$k = 2 k_i \sin(\theta/2)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{2 \sin(\theta/2)} \lambda_i$$

Pour des petits angles de diffusion  $\theta \ll 1$ , les formules se simplifient :

$$k = \theta k_i$$

$$\lambda = \frac{1}{\theta} \lambda_i$$

## 2.4 Diffusion collective

Le champ électrique diffusé total  $\vec{E}_s(\vec{r}', t)$  est la somme des champs électriques diffusés par chacune des molécules :

$$\vec{E}_s(\vec{r}', t) = \sum_j \vec{E}_{sj}(\vec{r}', t)$$

L'approximation de champ lointain nous permet de mettre en facteur une grande partie de l'expression du champ électrique diffusé total :

$$\vec{E}_s(\vec{r}', t) = \frac{\pi}{N^2 \lambda_i^2} \frac{e^{i \vec{k}_s \cdot \vec{r}'}}{r'} e^{-i \omega_i t} \vec{n}' \wedge (\vec{n}' \wedge \vec{E}_{i0}) \sum_j \alpha_j e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}_j(t)} \quad (2.4)$$

## 4.a De la molécule au fluide

### Densité moléculaire

Nous introduisons la notion de densité moléculaire par espèce  $s$  présente dans le gaz, (azote, oxygène...):  $n_s(\vec{r}, t)$ .

Dans le point de vue microscopique, l'expression de cette distribution est celle de Klimontovich [Klimontovich1991]:

$$n_s(\vec{r}, t) = \sum_{j \in S} \delta(\vec{r} - \vec{r}_j(t))$$

Cette expression permet de remplacer la somme sur les molécules  $j$  de chaque espèce, par une intégrale pondérée par la densité moléculaire propre à chaque espèce  $s$  (azote, oxygène...).

Pour toute fonction spatiale  $G(\vec{r})$ , nous pouvons alors écrire:

$$\sum_j \alpha_j G(\vec{r}_j(t)) = \int_{V_s} G(\vec{r}) \sum_S \alpha_s n_s(\vec{r}, t) d^3 \vec{r}$$

où  $\alpha_s$  est la polarisabilité de l'espèce  $s$ , et  $V_s$ , le volume de diffusion.

### Du moléculaire au fluide

La diffusion peut être appliquée à l'échelle microscopique: elle permet alors une approche de la distribution de vitesse dans le fluide, ou de l'auto-diffusion moléculaire, suivant le rapport entre la longueur d'onde de diffusion et le libre parcours moyen des molécules. Cette diffusion a été modélisée par S. Yip et M. Nelkin [Yip1964].

Ce qui caractérise la diffusion collective est l'observation des phénomènes propres aux échelles fluides du milieu observé. Cette approche est possible à condition que la longueur d'onde de diffusion  $\lambda$  soit beaucoup plus grande que la taille d'un élément fluide. Nous n'avons alors plus accès aux propriétés moléculaires, mais fluides.

Nous remplacerons alors la densité vue comme une distribution microscopique:  $n_s(\vec{r}, t) = \sum_{j \in S} \delta(\vec{r} - \vec{r}_j(t))$ , par la densité fluide de l'espèce: le nombre de particules de l'espèce  $S$  par unité de volume.

### Fluide homogène et polarisabilité moyenne

Si le milieu étudié est un gaz comme l'air, dont la composition moléculaire est homogène (80% d'azote, 19% oxygène...), la densité fluide de chaque espèce est proportionnelle à la densité fluide totale  $n(\vec{r}, t)$ . Le rapport de la densité de chaque espèce à la densité totale est la concentration  $\gamma_s$ :

$$n_s(\vec{r}, t) = \gamma_s n(\vec{r}, t)$$

Nous pouvons alors écrire la somme sur les molécules comme une intégrale:

$$\sum_j \alpha_j G(\vec{r}_j(t)) = (\sum_S \alpha_s \gamma_s) \int_{V_s} G(\vec{r}) n(\vec{r}, t) d^3 \vec{r}$$

Une polarisabilité moyenne du fluide apparaît naturellement comme moyenne des polarisabilités de chaque espèce, pondérée par la concentration:

$$\alpha = \sum_S \alpha_s \gamma_s$$

Nous pouvons alors écrire une somme sur les molécules, comme une intégrale pondérée par la densité:

$$\sum_j \alpha_j G(\vec{r}_j(t)) = \alpha \int_{V_s} G(\vec{r}) n(\vec{r}, t) d^3 \vec{r}$$

## 4.b Transformée de Fourier de la densité

En utilisant la formule générale ci-dessus, le champ électrique diffusé total peut alors s'écrire :

$$\vec{E}_s(\vec{r}', t) = \frac{\pi \alpha}{N^2 \lambda_i^2} \frac{e^{i\vec{k}_s \cdot \vec{r}'}}{r'} e^{-i\omega_i t} \vec{E}'_{i0} \iiint_{V_s} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} n(\vec{r}, t) d^3 \vec{r} \quad (2.5)$$

Le champ électrique diffusé est alors proportionnel à la transformée de Fourier spatiale de la densité du fluide  $n(\vec{r}, t)$  suivant le vecteur d'onde de diffusion  $\vec{k}$ . C'est le seul facteur de l'expression du champ électrique diffusé qui dépend réellement de l'écoulement.

Le volume  $V_s$  est le volume de diffusion. Il est défini ici comme le croisement du faisceau incident (zone éclairée par le champ incident) et du faisceau antenne du détecteur du champ diffusé (le champ de « vision » du détecteur). Ce volume sera redéfini par la suite à cause de la détection.

## 4.c Fluctuations de densité et turbulence

L'amplitude du champ électrique diffusé dépend alors de l'amplitude des fluctuations à l'échelle de diffusion.

- Pour un gaz au repos, la densité est uniforme. Sa transformée de Fourier spatiale à  $\vec{k} \neq 0$  est nulle (la diffusion incohérente est négligée).
- Pour un gaz turbulent, des structures spatiales apparaissent sur une grande gamme d'échelles. La transformée de Fourier pour ces échelles sera non nulle.

La diffusion collective sur un fluide permet d'obtenir une information sur les fluctuations du milieu à l'échelle correspond à la longueur de diffusion.

### Mélanges inhomogènes

Remarquons que nous nous sommes placés dans le cas d'un fluide à composition moléculaire homogène. Nous pourrions aussi obtenir une diffusion importante par un mélange non homogène de 2 types de molécules à polarisabilité très différentes, (par exemple, un jet d'hélium qui se mélange à de l'azote). Même si la densité totale varie peut, la diffusion serait due aux variations locales de composition du fluide.

# 3 Détection hétérodyne du signal de diffusion

Le schéma et les propriétés de la détection hétérodyne, appliqués à la diffusion collective ont été proposés par E. Holzhauer [Holzhauer1978] et développés par D. Grésillon [Grésillon1982].

## 3.1 Détection hétérodyne

### 1.a Détection homodyne du champ diffusé

La détection homodyne est la détection directe du champ diffusé.

#### Vecteur de Poynting

Le champ diffusé est détecté par une diode à effet photovoltaïque. Le courant de sortie est proportionnel à la puissance électromagnétique reçue sur sa surface, i.e. le flux du vecteur de Poynting de l'onde à travers la surface  $D$  du détecteur. En notation réelle, il s'écrit :

$$P_s(t) = \iint_D \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_s(\vec{r}', t) \wedge \vec{B}_s(\vec{r}', t) \cdot d^2\vec{r}'$$

En notation complexe, du fait que l'opération est une opération non linéaire, sa forme est différente. L'expression complexe des champs est :

$$\vec{E}_s(\vec{r}, t) = e^{i\omega_i t} \vec{E}_{s0}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{B}_s(\vec{r}, t) = e^{i\omega_i t} \vec{B}_{s0}(\vec{r}, t)$$

où les amplitudes complexes  $\vec{E}_{s0}(\vec{r}', t)$  et  $\vec{B}_{s0}(\vec{r}', t)$  varient sur des temps beaucoup plus longs que la période du champ  $2\pi/\omega_i$ .

Le produit vectoriel des 2 champs s'écrit :

$$\vec{E}_s \wedge \vec{B}_s = \frac{1}{4} [e^{i\omega_i t} \vec{E}_{s0} + e^{-i\omega_i t} \vec{E}_{s0}^*] \wedge [e^{i\omega_i t} \vec{B}_{s0} + e^{-i\omega_i t} \vec{B}_{s0}^*]$$

soit :

$$\vec{E}_s \wedge \vec{B}_s = \frac{1}{2} \Re(\vec{E}_{s0} \wedge \vec{B}_{s0}^*) + \frac{1}{2} \Re(e^{i2\omega_i t} \vec{E}_{s0} \wedge \vec{B}_{s0})$$

Le terme autour de l'harmonique  $2\omega_i$  sera négligé car cette fréquence ne passera pas le détecteur. En notation complexe, la puissance intégrée sur le détecteur s'écrit :

$$P_s(t) = \iint_D \frac{1}{2\mu_0} \vec{E}_s(\vec{r}', t) \wedge \vec{B}_s^*(\vec{r}', t) \cdot d^2\vec{r}'$$

#### Puissance d'une onde monomode

Pour une onde électromagnétique monomode, de vecteur d'onde  $\vec{k}_s$ , la direction de propagation est :

$$\vec{n}' = \frac{1}{k_s} \vec{k}_s$$



Le champ magnétique de l'onde  $\vec{B}_s(\vec{r}', t)$  est lié au champ électrique  $\vec{E}_s(\vec{r}', t)$  par :

$$\vec{B}_s(\vec{r}', t) = \frac{1}{\omega_i} \vec{k}_s \wedge \vec{E}_s(\vec{r}', t) = \frac{N}{C} \vec{n}' \wedge \vec{E}_s(\vec{r}', t)$$

Nous placerons le détecteur perpendiculairement à la propagation de l'onde,  $\vec{E}_s(\vec{r}', t) \perp \vec{n}'$ , cette puissance s'écrit simplement :

$$P_s(t) = \frac{N}{2\mu_0 C} \iint_D |\vec{E}_s(\vec{r}', t)|^2 d^2\vec{r}'$$

Ceci induit dans notre cas :

$$P_s(t) \propto \left| \iiint_{V_s} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} n(\vec{r}, t) d^3\vec{r} \right|^2$$

Cette détection homodyne directe de la lumière diffusée n'est pas satisfaisante, car :

- Le champ électrique diffusé est faible, donc cette puissance est très difficile à détecter
- La puissance n'est fonction que du module du champ électrique : le signal ne sera alors fonction que du module de la transformée de Fourier de la densité. Or une transformée de Fourier est un nombre complexe. L'information sur sa phase, liée à l'effet Doppler, est perdue.

## 1.b Faisceau oscillateur local (OL)

Pour éviter ces 2 problèmes, une onde de référence intervient. Elle est appelée oscillateur local (OL). Cette onde bat avec le champ diffusé sur le détecteur. Le détecteur aura donc à la fois un rôle d'antenne pour les 2 ondes et un rôle de mélangeur. Une description précise de son principe a été donnée par A. E. Siegman [Siegman1966].

L'oscillateur local est une onde mono-mode, comme l'onde incidente. Elle est néanmoins légèrement décalée en pulsation par rapport à celle-ci :  $\omega_{ol} = \omega_i + \omega_m$ .

La modulation  $\omega_m$  est beaucoup plus faible que la pulsation incidente  $\omega_i$  (en fréquence, supérieure au THz) : l'onde diffusée et l'onde OL doivent rester cohérentes.

Cette modulation se retrouve dans le courant de battement en sortie de détecteur. La pulsation  $\omega_m$  est inférieure à la bande passante de sortie du détecteur  $\omega_{det}$  (typiquement une fréquence de 1 GHz).

Afin de pouvoir démoduler le signal, cette modulation  $\omega_m$  est aussi choisie supérieure au domaine fréquentiel du signal de diffusion fluctuant,  $\iiint_{V_s} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} n(\vec{r}, t) d^3\vec{r}$ . Comme nous l'avons entrevu en introduction, les variations fréquentielles de ce signal sont liées au mouvement du fluide par effet Doppler. Elles sont donc bornées par une fréquence Doppler maximum, rapport de la vitesse maximum de l'écoulement et à la longueur d'onde de diffusion (typiquement 10 MHz). La pulsation correspondante est  $\omega_D$ .



Il faut donc  $\omega_D < \omega_m < \omega_{dét}$  et  $\omega_m \ll \omega_i$ . Les pulsations sont suffisamment éloignées pour rendre ceci possible : la fréquence correspondante à  $\omega_m$  est typiquement de l'ordre de quelques dizaines de mégahertz.

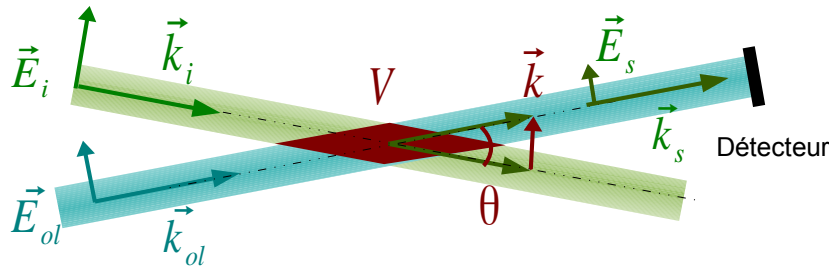
Pour que le battement soit plus efficace que la détection homodyne, l'amplitude de l'oscillateur local est notablement plus grande que celle du champ électrique diffusé  $E_{ol0} \gg \langle E_s \rangle$ . La limite supérieure est liée à la puissance électromagnétique maximale que peut supporter le détecteur.

Le faisceau OL est dirigé sur le détecteur suivant la même direction  $\vec{k}_{ol} \parallel \vec{k}_s$  et même polarisation  $\vec{E}_{ol0} \parallel \vec{E}'_0$  que l'onde diffusée. Les champs électriques sont déphasés de  $\varphi_m$  au temps 0.

Le champ électrique OL sur le détecteur s'écrit alors :

$$\vec{E}_{ol}(\vec{r}', t) = e^{i[\vec{k}_{ol} \cdot \vec{r}' - (\omega_i + \omega_m)t + \varphi_m]} \vec{E}_{ol0}$$

La figure suivante montre le schéma de principe :



Nous voyons que l'angle entre les faisceaux incident et oscillateur local est aussi l'angle de diffusion  $\theta$ .

### 1.c Puissance des faisceaux et battement

Le détecteur reçoit le battement des champs électriques diffusé  $\vec{E}_s(\vec{r}', t)$  et oscillateur local  $\vec{E}_{ol}(\vec{r}', t)$ . Le module au carré du champ électrique total s'écrit :

$$|\vec{E}_s(\vec{r}', t) + \vec{E}_{ol}(\vec{r}', t)|^2 = |\vec{E}_{ol}(\vec{r}', t)|^2 + 2\Re(\vec{E}_{ol}(\vec{r}', t) \cdot \vec{E}_s(\vec{r}', t)) + |\vec{E}_s(\vec{r}', t)|^2$$

La puissance électromagnétique reçue se décompose alors en 3 termes (par ordre décroissant d'intensité):

$$P_{tot}(t) = P_{ol} + P_b(t) + P_s(t) :$$

- $P_{ol} = \frac{N}{2\mu_0 C} \iint_D |\vec{E}_{ol0}|^2 d^2\vec{r}'$  est la puissance du faisceau OL, constante.
- $P_b(t) = \frac{N}{\mu_0 C} \iint_D \Re(\vec{E}_{ol}^*(\vec{r}', t) \cdot \vec{E}_s(\vec{r}', t)) d^2\vec{r}'$  est le battement entre les 2 ondes.
- $P_s(t) = \frac{N}{2\mu_0 C} \iint_D |\vec{E}_s(\vec{r}', t)|^2 d^2\vec{r}'$  est la puissance du champ diffusée.

Le troisième terme,  $P_s(t)$ , sera négligé devant les 2 termes précédents.

Le terme de battement  $P_b(t)$  est celui qui va porter le signal de diffusion qui

nous intéresse.

## 1.d Efficacité d'hétérodynage

Si les faisceau OL et diffusé sont en cohérence l'un par rapport à l'autre, alors les 3 termes de puissance suivent la relation :

$$\langle P_b(t) \rangle_t = 2\sqrt{P_{ol}\langle P_s(t) \rangle_t}$$

Mais le battement des 2 ondes peut être dégradé : les faisceaux OL et diffusés ne sont pas parfaitement perpendiculaire à la surface du détecteur, des aberrations optiques peuvent déformer le s plan d'onde, et la source laser a une longueur de cohérence finie [Cohen1975, Frehlich1994, Chambers1997].

Pour prendre en compte ces effets, nous introduisons l'efficacité d'hétérodynage comme le rapport entre la puissance de battement réelle, et celle attendue :

$$\eta_H = \frac{\langle P_b(t) \rangle_t}{2\sqrt{P_{ol}\langle P_s(t) \rangle_t}}$$

L'efficacité d'hétérodynage est évaluée expérimentalement en mesurant les 3 puissances en cause. Elle interviendra dans la suite comme un facteur correctif de la puissance de battement.

## 3.2 Battement des ondes OL et diffusée

### 2.a Expression des champs électriques pour le battement

L'expression du champ électrique diffusé total est la suivante :

$$\vec{E}_s(\vec{r}', t) = \frac{\pi\alpha}{N^2\lambda_i^2} \frac{e^{i\vec{k}_s \cdot \vec{r}'}}{r'} e^{-i\omega_i t} \vec{n}' \wedge (\vec{n}' \wedge \vec{E}_{i0}) \iiint_{V_s} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} n(\vec{r}, t) d^3\vec{r}$$

Afin de pouvoir analyser le terme de battement  $P_b(t)$ , nous revenons sur l'approximation champ lointain, pour repasser de la description d'onde plane, en onde sphérique :

$$e^{i\vec{k}_s \cdot \vec{r}'} \sim e^{ik_s|\vec{r}' - \vec{r}|} e^{i\vec{k}_s \cdot \vec{r}}$$

et

$$\frac{1}{r'} \sim \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|}$$

De plus, le volume de diffusion est redéfini par la fonction de l'amplitude du champ électrique incident :  $\vec{E}_{i0}(\vec{r})$  est une fonction spatiale. Elle est maximale ( $\vec{E}_{iM}$ ) au centre du faisceau. Elle est nulle en dehors du faisceau.

Une intégrale de volume d'une fonction  $G(\vec{r})$  se réécrit alors comme une intégrale sur tout l'espace :

$$\vec{n}' \wedge (\vec{n}' \wedge \vec{E}_{i0}) \iiint_{V_s} G(\vec{r}) d^3\vec{r} = \iiint \vec{n}' \wedge (\vec{n}' \wedge \vec{E}_{i0}(\vec{r})) G(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

Nous introduisons, comme précédemment,  $\vec{E}'_{i0}(\vec{r})$ , la valeur du champ électrique incident après changement de polarisation par la diffusion:

$$\vec{E}'_{i0}(\vec{r}) = \vec{n}' \wedge (\vec{n}' \wedge \vec{E}_{i0}(\vec{r}))$$

Nous introduisons aussi l'angle de changement de polarisation :  $\theta_{pol} = \pi/2 - \widehat{(\vec{n}', \vec{E}_{i0})}$  . Alors :

$$E'_{i0}(\vec{r}) = E_{i0}(\vec{r}) \cos \theta_{pol}$$

Si la polarisation du champ initial  $\vec{E}_{i0}(\vec{r})$  est perpendiculaire au plan de diffusion, la polarisation de l'onde diffusée est la même :  $\theta_{pol} = 0$  . Si la polarisation du champ initial est dans le plan de diffusion, la polarisation du champ diffusé est aussi dans le plan de diffusion, mais a tourné du même angle que l'angle de diffusion  $\theta_{pol} = \theta$

Le champ électrique diffusé peut alors s'écrire :

$$\vec{E}_s(\vec{r}', t) = \frac{\pi \alpha}{N^2 \lambda_i^2} \frac{e^{ik_i|\vec{r}' - \vec{r}|}}{|\vec{r}' - \vec{r}|} e^{-i\omega_i t} \iiint \vec{E}'_{i0}(\vec{r}) e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} n(\vec{r}, t) d^3 \vec{r}$$

De la même manière, le champ électrique de l'oscillateur local est exprimé avec une amplitude  $\vec{E}_{ol0}(\vec{r}')$  , fonction (réelle) de l'espace, qui décrit le profil spatial du faisceau :

$$\vec{E}_{ol}(\vec{r}', t) = e^{i[\vec{k}_{ol} \cdot \vec{r}' - (\omega_i + \omega_m)t + \phi_m]} \vec{E}_{ol0}(\vec{r}')$$

## 2.b Battement des champs, loi de Kirchhoff-Sommerfeld

Nous introduisons ces expressions des champs électriques diffusé et OL, dans celle du terme de battement  $P_b(t)$  . Après réarrangement des facteurs, et inversion des 2 intégrations, nous obtenons :

$$P_b(t) = \Re \left\{ i \frac{\eta_H \pi \alpha}{\mu_0 C N \lambda_i} e^{i(\omega_m t + \phi_m)} \iiint \left[ \frac{1}{i \lambda_i} \iint_D \frac{e^{ik_s|\vec{r}' - \vec{r}|}}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \vec{E}_{ol0}(\vec{r}') e^{-i\vec{k}_{ol} \cdot \vec{r}'} d^2 \vec{r}' \right] \cdot \vec{E}'_{i0}(\vec{r}) e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} n(\vec{r}, t) d^3 \vec{r} \right\}$$

Nous remarquons que le facteur entre crochet correspond à la loi de la diffraction de Kirchhoff-Sommerfeld appliquée à l'amplitude du champ électrique, hors variations temporelles, entre les positions  $\vec{r}'$  et  $\vec{r}$  :

$$\vec{E}_{olk}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_{ol} \cdot \vec{r}} \vec{E}_{ol0}(\vec{r})$$

La loi s'applique même si le sens de la propagation est inversée. En revanche, l'expression n'est valide que si la surface du détecteur intercepte complètement le faisceau OL. Nous avons utilisé l'approximation  $k_{ol} = k_i = k_s$  .

$$\vec{E}_{olk}(\vec{r}) = \frac{1}{i \lambda_i} \iint_D \frac{e^{ik_i|\vec{r}' - \vec{r}|}}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \vec{E}_{olk}(\vec{r}') d^2 \vec{r}'$$

Le terme de battement s'écrit alors :

$$P_b(t) = \Re \left\{ i \frac{\eta_H \pi \alpha}{\mu_0 C N \lambda_i} e^{i(\omega_m t + \phi_m)} \iiint \vec{E}_{ol0}(\vec{r}) e^{-i\vec{k}_s \cdot \vec{r}} \cdot \vec{E}'_{i0}(\vec{r}) e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} n(\vec{r}, t) d^3 \vec{r} \right\}$$

## 2.c Profils des faisceaux et du volume de diffusion

Nous introduisons le profil propre à chaque faisceau. Le profil est donné par la forme spatiale du champ électrique normalisé à sa valeur maximale.

Pour le faisceau OL, l'expression est alors :

$$u_{ol}(\vec{r}) = \frac{1}{E_{olM}} E_{ol0}(\vec{r})$$

Pour le faisceau incident, le champ électrique initial  $E_{i0}(\vec{r})$  et celui après changement de polarisation,  $E'_{i0}(\vec{r})$  ont le même profil (ils sont proportionnels l'un à l'autre) :

$$u_i(\vec{r}) = \frac{1}{E_{iM}} E_{i0}(\vec{r}) = \frac{1}{E'_{iM}} E'_{i0}(\vec{r})$$

Le volume de diffusion sera décrit par  $u(\vec{r})$ , le profil spatial du croisement des faisceaux incident et OL :

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{\vec{E}_{olM} \cdot \vec{E}'_{iM}} \vec{E}_{ol0}(\vec{r}) \cdot \vec{E}'_{i0}(\vec{r}) \quad (3.1)$$

où  $\vec{E}'_{iM}$  et  $\vec{E}_{olM}$  sont les amplitudes maximales des champs électriques  $\vec{E}'_{i0}(\vec{r})$  et  $\vec{E}_{ol0}(\vec{r})$  qui caractérisent les faisceaux incident et OL.

Il s'exprime aussi simplement en fonction du produit des profils des faisceaux :

$$u(\vec{r}) = u_{ol}(\vec{r}) u_i(\vec{r})$$

Nous remarquons que si les faisceaux se superposent mal, i.e., les valeurs maximales des champs ne coïncident nulle part, la valeur maximale de  $u(\vec{r})$  est inférieure à 1. La fonction profil aura alors un poids d'autant plus faible dans le signal de battement.

La puissance de battement s'écrit alors :

$$P_b(t) = \Re \left\{ i \frac{\eta_H \pi \alpha}{\mu_0 C N \lambda_i} e^{i(\omega_m t + \phi_m)} \vec{E}_{olM} \cdot \vec{E}'_{iM} \iiint u(\vec{r}) n(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{r} \right\} \quad (3.2)$$

Cette puissance de battement fait alors apparaître une transformée de Fourier spatiale de la densité pondérée par le profil des faisceaux. Cette information est légèrement différente de celle qui apparaissait dans le champ électrique diffusé total, puisqu'elle dépend aussi du profil du faisceau OL.

## 3.3 Courant issu de la détection hétérodyne

### 3.a Effet photovoltaïque

Le détecteur fonctionne sur l'effet photovoltaïque : Les photons reçus induisent un courant électronique. Il est caractérisé par son efficacité quantique  $\eta$  : C'est la probabilité qu'un photon reçu induise l'émission d'un électron.

Une puissance  $P_{tot}(t)$  reçue par le détecteur, correspond au flux de photons  $n_{ph}(t)$  ( $\hbar \omega_i$  est l'énergie d'un photon) :

$$n_{ph}(t) = \frac{1}{\hbar \omega_i} P(t)$$

Ce flux photonique induit un flux d'électrons  $n_e(t)$  dans le détecteur (avec l'efficacité quantique  $\eta$ ) :

$$n_e(t) = \eta n_{ph}(t) = \eta \frac{1}{\hbar \omega_i} P(t)$$

Ce flux électronique correspond à un courant  $i(t)$  en sens opposé dans le détecteur ( $q_e$  est la charge de l'électron):

$$i(t) = q_e n_e(t) = q_e \eta \frac{1}{\hbar \omega_i} P(t) \quad (3.3)$$

### 3.b Courants continu et de battement

Le courant total sortant du détecteur est donc la somme d'un courant continu, d'un courant de battement, et d'un courant négligeable propre à la puissance du faisceau diffusé :

$$i_{tot}(t) = i_{ol} + i_b(t) + i_s(t)$$

La partie continue est proportionnelle à la puissance du faisceau OL :

$$i_{ol} = \frac{\eta q_e}{\hbar \omega_i} P_{ol}$$

En utilisant la relation entre les constantes physiques,  $C^2 \varepsilon_0 \mu_0 = 1$ , et la propriété  $\omega_i = \frac{2\pi C}{N \lambda_i}$ , le courant de battement par le détecteur est donc :

$$i_b(t) = \Re \left\{ i \frac{\pi \varepsilon_0 \alpha \eta_H \eta q_e}{h} \vec{E}_{olM} \cdot \vec{E}'_{iM} e^{i(\omega_m t + \phi_m)} \iiint u(\vec{r}) n(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{r} \right\} \quad (3.4)$$

Ce signal aura pour largeur spectrale, la pulsation Doppler maximale  $\omega_D$ . Il est modulé à la fréquence  $\omega_m \gg \omega_D$ . Le domaine fréquentiel du signal est donc  $[\omega_m - \omega_D; \omega_m + \omega_D]$ , qui est disjoint de celui du signal continu.

#### Efficacité d'hétérodynage évaluée par les courants

L'efficacité d'hétérodynage peut plus facilement être évalué expérimentalement à partir de la mesure des courants associés à chaque terme de la puissance reçue par le détecteur. Il faut cependant se rappeler que seule la moitié de la puissance de battement induit un courant dans le détecteur :

$$\eta_H = \frac{\langle i_b(t) \rangle_t}{\sqrt{i_{ol} \langle i_s(t) \rangle_t}}$$

## 3.4 Le signal de diffusion collective

### 4.a Définition du signal de diffusion collective

C'est la transformée de Fourier de la densité suivant  $\vec{k}$  (pondérée par le profil) que nous appellerons par la suite signal de diffusion. Nous la noterons  $s(\vec{k}, t)$  :

$$s(\vec{k}, t) = \iiint u(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} n(\vec{r}, t) d^3 \vec{r} \quad (3.5)$$

#### Macroscopique et microscopique

Nous pouvons revenir à une description microscopique du fluide, en exprimant la densité par une somme de distributions ponctuelles sur tous les diffuseurs :

$$n(\vec{r}, t) = \sum_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j(t))$$

Le signal de diffusion s'écrit alors :

$$s(\vec{k}, t) = \sum_j u(\vec{r}_j(t)) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_j(t)} \quad (3.6)$$

### Volume ou profil

Cette dernière expression se rapproche de l'expression vue en introduction :

$$s(\vec{k}, t) = \sum_{j \in V_s} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_j(t)}$$

Le volume  $V_s$  est remplacé par la fonction profil  $u(\vec{r})$ .

## 4.b Gaz incohérent

Nous avons vu dans l'introduction, que dans le cas où le signal s'exprimait

$s(\vec{k}, t) = \sum_j e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_j(t)}$ , la variance du signal pour un gaz incohérent s'écrit :

$$\langle |s(\vec{k}, t)|^2 \rangle_t \sim N_s$$

Nous allons effectuer le même calcul avec l'expression du signal de diffusion fonction du profil du volume. Nous devons néanmoins conserver la description microscopique de la densité : la description macroscopique ne peut pas rendre compte de la nature incohérente du gaz.

$$s(\vec{k}, t) = \sum_j u(\vec{r}_j(t)) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_j(t)}$$

Dans l'évaluation de la variance du signal, les termes croisés sont nuls pour un gaz incohérent :

$$\langle |s(\vec{k}, t)|^2 \rangle_t = \langle \sum_j \sum_l u(\vec{r}_j(t)) u(\vec{r}_l(t)) e^{-i\vec{k} \cdot [\vec{r}_j(t) - \vec{r}_l(t)]} \rangle_t = \langle \sum_j u(\vec{r}_j(t))^2 \rangle_t$$

Nous pouvons alors revenir à une description macroscopique continue :

$$\langle |s(\vec{k}, t)|^2 \rangle_t = \iiint u(\vec{r})^2 n(\vec{r}, t) d^3 \vec{r}$$

La répartition spatiale moyenne des diffuseurs est homogène :

$$\langle |s(\vec{k}, t)|^2 \rangle_{V_s} = \langle n \rangle \iiint u(\vec{r})^2 d^3 \vec{r} = \langle n \rangle V_s \quad (3.7)$$

Le volume de diffusion  $V_s$  qui compte pour l'expression de la variance est mesuré par l'intégrale du carré du profil :

$$V_s = \iiint u(\vec{r})^2 d^3 \vec{r} \quad (3.8)$$

Le volume est l'intégrale du carré du profil, et non simplement l'intégrale du profil lui-même. C'est lié au fait que le signal de diffusion est une transformée de Fourier spatiale.

## 4.c Facteur de forme statique

Comme dans le premier chapitre, le facteur de forme statique sera défini comme le rapport de la variance du signal de diffusion à sa valeur prise pour un gaz incohérent :

$$S(\vec{k}) = \frac{\langle |s(\vec{k}, t)|^2 \rangle_{v_s}}{\langle n \rangle V_s}$$

### 3.5 Démodulation du courant du détecteur

Le courant de battement contient donc le signal de diffusion, modulé à la fréquence  $\omega_m$  :

$$i_b(t) = Cste \Re [e^{i(\omega_m t + \varphi_m)} s(\vec{k}, t)]$$

Le but de la démodulation est de récupérer l'information complexe du signal  $s(\vec{k}, t)$ .

Pour démoduler, il suffit de multiplier le signal avec un signal de référence à la fréquence de modulation :

$$x(t) = i_b(t) \cos(\omega_m t)$$

soit :

$$x(t) = \frac{Cste}{4} [e^{i(\omega_m t + \varphi_m)} s(\vec{k}, t) + e^{-i(\omega_m t + \varphi_m)} s^*(\vec{k}, t)] [e^{i\omega_m t} + e^{-i\omega_m t}]$$

Le développement de l'expression fait apparaître 2 termes :

$$x(t) = \frac{Cste}{2} \Re [e^{i\varphi_m} s(\vec{k}, t)] + \frac{Cste}{2} \Re [e^{i(2\omega_m t + \varphi_m)} s(\vec{k}, t)]$$

Comme la fréquence de modulation a été choisie plus grande que la largeur spectrale du signal  $s(\vec{k}, t)$  ( $\omega_m > \omega_D$ ), les gammes fréquentielles des 2 termes sont distinctes :  $[0; \omega_D]$  pour le premier, et  $[2\omega_m - \omega_D; 2\omega_m + \omega_D]$  pour le second. Il est possible par un filtre passe-bas à la pulsation  $\omega_m$  de ne conserver que le premier terme :

$$x_f(t) = \frac{Cste}{2} \Re [e^{i\varphi_m} s(\vec{k}, t)]$$

Il manque alors l'information sur la partie imaginaire du signal. Elle peut être récupérée en opérant en parallèle, la démodulation du signal par un second signal de à la fréquence de référence, et en quadrature de phase par rapport au premier :

$$y(t) = i_b(t) \sin(\omega_m t)$$

Un calcul similaire aboutit à l'expression :

$$y(t) = -\frac{Cste}{2} \Im [e^{i\varphi_m} s(\vec{k}, t)] + \frac{Cste}{2} \Im [e^{i(2\omega_m t + \varphi_m)} s(\vec{k}, t)]$$

Nous appliquons de même, un filtre passe-bas à la fréquence  $\omega_m$  :

$$y_f(t) = -\frac{Cste}{2} \Im [e^{i\varphi_m} s(\vec{k}, t)]$$

La combinaison des 2 signaux permet de reconstruire le signal de diffusion à une phase constante près :

$$s(\vec{k}, t) \propto e^{i\varphi_m} [x_f(t) - i y_f(t)]$$

Ce schéma de démodulation du signal est appelée démodulation « IQ ». Le « I » fait référence au signal, le « Q », à sa quadrature.



# 4 Spectre du signal de diffusion collective

Afin de mieux maîtriser la divergence naturelle des faisceaux, et donc la forme des profils, nous utilisons des ondes mono-mode transverse. Le mode choisi est le mode fondamental, appelé  $TEM_{00}$  qui correspond à une forme de faisceau gaussien.

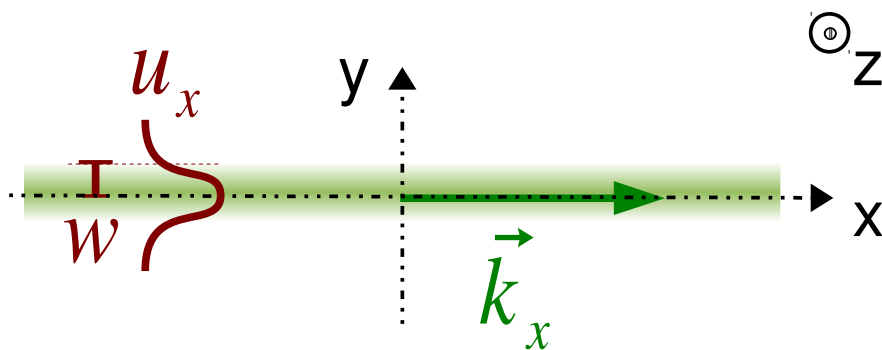
Nous introduirons un premier temps une forme gaussienne pour les profils des faisceaux et verrons les conséquences pour le signal de diffusion collective. Nous verrons aussi quelles conséquences cela induit sur la résolution en nombre d'onde de la diffusion collective.

Dans une seconde partie, nous étudierons de manière plus approfondie, les propriétés des faisceaux gaussiens.

## 4.1 Profils gaussiens et volume de diffusion

### 1.a Le faisceau gaussien

Le faisceau gaussien est caractérisé par sa taille,  $w$ . La taille sera la même pour les faisceaux incident et OL. Nous négligerons dans cette section la divergence naturelle des faisceaux dans la zone de mesure (la taille reste la même le long des faisceaux).



Pour un faisceau gaussien, centré sur l'axe  $x$  et de taille  $w$ , la fonction profil ne dépend que de  $y$  et  $z$  :

$$u_x(x, y, z) = e^{-(y^2 + z^2)/w^2}$$

Le champ électrique s'écrit alors :

$$\vec{E}_x(\vec{r}', t) = e^{i(k_x x - \omega_x t)} \vec{E}_{x0}(\vec{r}) = e^{i(k_x x - \omega_x t)} e^{-(y^2 + z^2)/w^2} \vec{E}_{xM}$$

La puissance du faisceau est donnée par une intégration sur une surface perpendiculaire à la propagation :

$$P_x(t) = \frac{N}{2\mu_0 C} \iint_{-\infty}^{+\infty} |\vec{E}_x(\vec{r}', t)|^2 dy dz$$

Son expression peut être intégrée :



$$P_x(t) = \frac{N}{2\mu_0 C} E_{xM}^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(y^2+z^2)/w^2} dydz$$

soit :

$$P_x(t) = \frac{N}{2\mu_0 C} E_{xM}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2y^2/w^2} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2z^2/w^2} dz$$

Nous introduisons ici la notion de longueur intégrale définie pour toute fonction  $G(y)$  intégrable par :

$$l = \frac{1}{\max(G)} \int_{-\infty}^{+\infty} G(y) dy$$

Une longueur intégrale apparaît pour chaque axe de la gaussienne (  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2\sigma^2} dy = \sqrt{2\pi}\sigma$  ) :

$$l_w = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2y^2/w^2} dy = \sqrt{2\pi} \frac{w}{2}$$

La puissance du faisceau s'écrit :

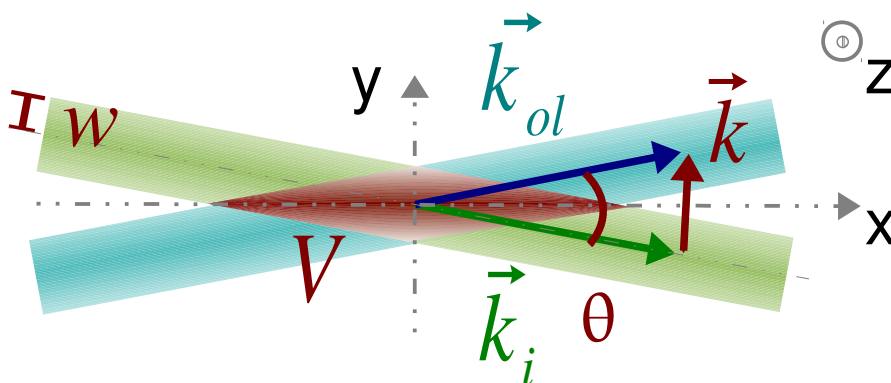
$$P_x(t) = l_w^2 \frac{N}{2\mu_0 C} E_{xM}^2$$

soit :

$$P_x(t) = \frac{\pi w^2 N}{4\mu_0 C} E_{xM}^2$$

## 1.b Profil du volume de diffusion

Pour notre situation, les faisceaux incident et OL sont des faisceaux gaussiens de taille  $w$  se croisant sous un angle  $\theta$ . Nous choisissons la géométrie montrée sur le schéma ci-dessous :



Les profils des 2 faisceaux s'écrivent alors :

$$u_i(x, y, z) = e^{-[(y \cos \theta/2 - x \sin \theta/2)^2 + z^2]/w^2}$$

$$u_{ol}(x, y, z) = e^{-[(y \cos \theta/2 + x \sin \theta/2)^2 + z^2]/w^2}$$

Nous nous limiterons au cas de la diffusion vers l'avant : L'angle  $\theta$  de diffusion

est petit. Le profil du volume global s'écrit alors :

$$u(x, y, z) = u_i(x, y, z) u_{ol}(x, y, z) = e^{-x^2 \theta^2 / 2 w^2 - 2y^2 / w^2 - 2z^2 / w^2} \quad (4.1)$$

Le volume a donc une forme gaussienne.

Le volume de diffusion  $V_s$ , tel qu'il intervient pour le calcul de la variance du signal vu dans la fin du chapitre précédent :

$$V_s = \iiint u(\vec{r})^2 d^3 \vec{r}$$

s'exprime alors :

$$V_s = \int e^{-x^2 \theta^2 / w^2} dx \int e^{-4y^2 / w^2} dy \int e^{-4z^2 / w^2} dz$$

soit :

$$V_s = \frac{\pi^{3/2} w^3}{4 \theta} \quad (4.2)$$

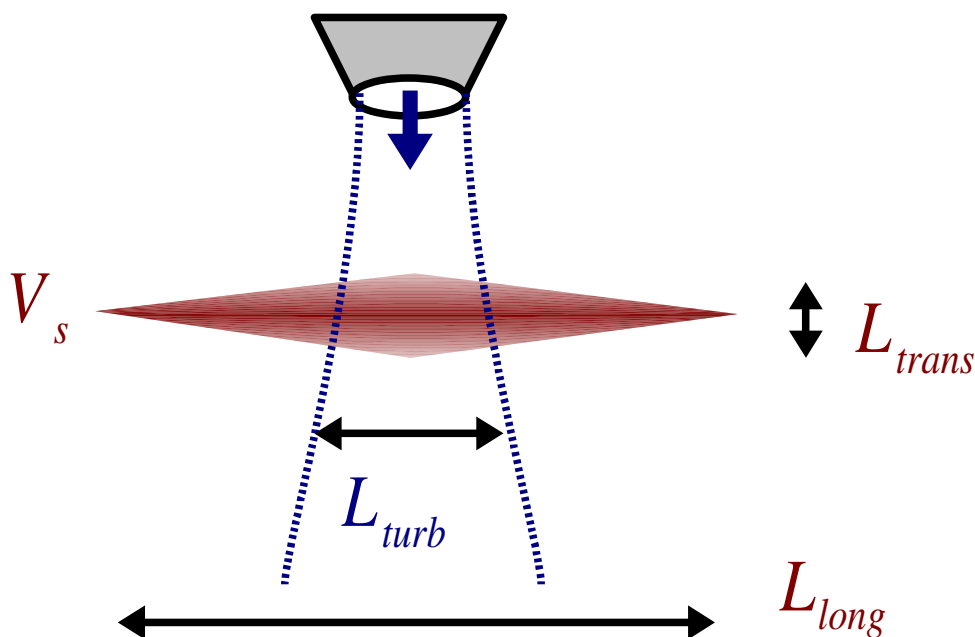
La longueur intégrale transverse (suivant  $y$  et  $z$ ) est alors :

$$L_{trans} = \frac{\sqrt{\pi} w}{2}$$

La longueur intégrale longitudinale est :

$$L_{long} = \frac{\sqrt{\pi} w}{\theta}$$

La forme du volume de diffusion est donc d'autant plus allongée que  $\theta$  est petit.



Expérimentalement, la longueur de croisement des faisceaux (suivant  $x$ ) est souvent plus longue que la zone où a lieu la turbulence. Nous remplaçons alors la longueur caractéristique  $L_{long} = \frac{\sqrt{\pi} w}{\theta}$  par la longueur caractéristique de croisement avec la turbulence :  $L_{turb}$  pour définir un volume de turbulence :

$$V_{turb} = \frac{\pi w^2}{4} L_{turb} \quad (4.3)$$

Comme le signal provenant du gaz à l'équilibre est négligeable, nous supposons que le volume de diffusion est ce volume de turbulence.

## 1.c Amplitude des champs électriques

le courant de battement issu du détecteur a la forme

$$i_b(t) = \Re \left( i \frac{\pi \epsilon_0 \alpha \eta_H \eta q_e}{h} \vec{E}_{olM} \cdot \vec{E}'_{iM} e^{i(\omega_m t + \phi_m)} \iiint u(\vec{r}) n(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{r} \right)$$

La forme gaussienne des faisceaux permet de relier le facteur comportant l'amplitude des champs  $\vec{E}_{olM} \cdot \vec{E}'_{iM}$  à la puissance des faisceaux.

Les faisceaux OL et diffusé ont la même polarisation linéaire :

$$\vec{E}_{olM} \cdot \vec{E}'_{iM} = E_{olM} E'_{iM}$$

Le faisceau OL est un faisceau gaussien de taille  $w$  :

$$E_{olM} = \sqrt{\frac{4\mu_0 C}{\pi w^2 N} P_{ol}}$$

Le champ électrique  $E'_{iM}$  dépend de la polarisation du faisceau incident par rapport au plan de diffusion :

$$E'_{iM} = E_{iM} \cos \theta_{pol}$$

Le faisceau incident est lui aussi gaussien, de même taille  $w$  :

$$E'_{iM} = \sqrt{\frac{4\mu_0 C}{\pi w^2 N} P_i} \cos \theta_{pol}$$

La courant de battement s'exprime alors :

$$i_b(t) = \Re \left( i \frac{\pi \epsilon_0 \alpha \eta_H \eta q_e}{h} \frac{4\mu_0 C \cos \theta_{pol}}{\pi w^2 N} \sqrt{P_i P_{ol}} e^{i(\omega_m t + \phi_m)} \iiint u(\vec{r}) n(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{r} \right)$$

## 4.2 Spectre du signal et résolution

Le volume fini de diffusion a pour conséquence une résolution finie, non absolue du signal de diffusion [Holzhauer1978].

### 2.a Transformée de Fourier du profil

le signal de diffusion est la transformée de Fourier du produit de la densité par le profil :

$$s(\vec{k}, t) = \iiint u(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} n(\vec{r}, t) d^3 \vec{r}$$

La transformée de Fourier d'un produit est le produit de convolution des transformées de Fourier.

$$s(\vec{k}, t) = u * n(\vec{k}, t)$$

Le produit de convolution s'exprime par :

$$s(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint u(\vec{k} - \vec{k}') n(\vec{k}', t) d^3 \vec{k}'$$

où  $n(\vec{k}, t)$  est la transformée de Fourier spatiale de la densité (sans limite de volume) :

$$n(\vec{k}, t) = \iiint e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} n(\vec{r}, t) d^3\vec{r}$$

$u(\vec{k})$  est la transformée de Fourier spatiale du profil :

$$u(\vec{k}) = \iiint u(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{r}$$

La transformée de Fourier d'une gaussienne est :

$$\int e^{-x^2/2\sigma^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{2\pi}\sigma e^{-k^2\sigma^2/2}$$

On remarque que l'écart type en nombre d'onde est l'inverse de l'écart type spatial:  $\sigma_k = 1/\sigma$ .

La transformée de Fourier du profil du volume s'exprime :

$$u(k_x, k_y, k_z) = \frac{(2\pi)^{3/2} w^3}{4\theta} e^{-k_x^2 w^2/2\theta^2 - k_y^2 w^2/8 - k_z^2 w^2/8}$$

## 2.b Résolution en nombre d'onde

Comme  $s(\vec{k}, t)$  est le produit de convolution de la densité par le profil du volume de diffusion,  $u(\vec{k})$  détermine la résolution en nombre d'onde du signal.

Pour la variance du signal (comme pour le spectre ou l'autocorrélation), c'est le carré du signal de diffusion qui intervient. C'est a priori le carré de la transformée de Fourier du profil qui intervient :  $u(\vec{k})^2$ . Mais les termes croisés dans l'élévation au carré du signal peuvent induire un décalage par rapport à cette loi.

### Mode unique

Prenons un signal de diffusion ne contenant qu'un seul mode de vecteur d'onde  $\vec{k}_0$  et de pulsation  $\omega_0$  et d'amplitude  $n_1$  :

$$n(\vec{r}, t) = n_1 \sqrt{2} \Re \left( e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega_0 t)} \right)$$

Le signal de diffusion s'écrit alors

$$\begin{aligned} s(\vec{k}, t) = & \frac{n_1}{\sqrt{2}} \int e^{i(k_{0x} - k_x)x - x^2\theta^2/2w^2} dx \int e^{i(k_{0y} - k_y)y - 2y^2/w^2} dy \\ & \int e^{i(k_{0z} - k_z)z - 2z^2/w^2} dz e^{-i\omega_0 t} \\ & + \frac{n_1}{\sqrt{2}} \int e^{i(k_{0x} + k_x)x - x^2\theta^2/2w^2} dx \int e^{i(k_{0y} + k_y)y - 2y^2/w^2} dy \\ & \int e^{i(k_{0z} + k_z)z - 2z^2/w^2} dz e^{i2\pi f_0 t} \end{aligned}$$

Si on choisit  $\vec{k}$  proche de  $\vec{k}_0$ , le second terme sera négligeable.

Le premier terme s'intègre :

$$s(\vec{k}, t) = \frac{n_1}{\sqrt{2}} \frac{\pi^{3/2} w^3}{\sqrt{2}\theta} e^{-w^2(k_{0x} - k_x)^2/2\theta^2} e^{-w^2(k_{0y} - k_y)^2/8} e^{-w^2(k_{0z} - k_z)^2/8} e^{-i\omega_0 t}$$

La variance du signal s'obtient aisément

$$\langle |s(\vec{k}, t)|^2 \rangle_t = \frac{n_1^2 \pi^3 w^6}{2 \cdot 2\theta^2} e^{-w^2(k_{0x}-k_x)^2/\theta^2} e^{-w^2(k_{0y}-k_y)^2/4} e^{-w^2(k_{0z}-k_z)^2/4}$$

soit

$$\langle |s(\vec{k}, t)|^2 \rangle_t = \frac{n_1^2}{2} u(\vec{k})^2$$

La fonction d'appareil  $u(\vec{k})^2$  apparaît clairement.

### Modes non corrélés spatialement

Si le signal contient plusieurs modes, l'étape non linéaire est le passage du signal à son module au carré. La variance pourra s'écrire comme la somme des variances de chaque mode, à condition que chaque mode soit dé-corrélé des autres. C'est le cas si tous les modes présents ont des fréquences différentes. En revanche, ce n'est plus le cas si plusieurs modes à même fréquence, mais des vecteurs d'onde proches, mais différents coexistent, avec des phases corrélées.

### Modes gaussien localisé

Pour créer un mode à une fréquence déterminée  $\omega_0$ , mais élargie en nombre d'onde autour de  $\vec{k}_0$  de largeur  $\sigma_k$ , nous considérons un mode spatialement limité :

$$n(\vec{r}, t) = n_1 \sqrt{2} \Re \left( e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega_0 t)} \right) e^{-r^2 \sigma_k^2 / 2}$$

Le signal s'obtient par transformée de Fourier d'une Gaussienne :

$$s(\vec{k}, t) = \frac{n_1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{\left(\frac{\theta^2}{w^2} + \sigma_k^2\right) \left(\frac{4}{w^2} + \sigma_k^2\right)^2}} e^{\frac{-(k_{0x}-k_x)^2}{2\left(\frac{\theta^2}{w^2} + \sigma_k^2\right)}} e^{\frac{-(k_{0y}-k_y)^2}{2\left(\frac{4}{w^2} + \sigma_k^2\right)}} e^{\frac{-(k_{0z}-k_z)^2}{2\left(\frac{4}{w^2} + \sigma_k^2\right)}} e^{-i\omega_0 t}$$

La variance de ce signal s'écrit :

$$\langle |s(\vec{k}, t)|^2 \rangle_t = \frac{n_1^2}{2} \frac{(2\pi)^3}{\left(\frac{\theta^2}{w^2} + \sigma_k^2\right) \left(\frac{4}{w^2} + \sigma_k^2\right)^2} e^{\frac{-(k_{0x}-k_x)^2}{\frac{\theta^2}{w^2} + \sigma_k^2}} e^{\frac{-(k_{0y}-k_y)^2}{\frac{4}{w^2} + \sigma_k^2}} e^{\frac{-(k_{0z}-k_z)^2}{\frac{4}{w^2} + \sigma_k^2}}$$

Dans ce cas, la variance en nombre d'onde due à l'effet d'appareil s'ajoute à la moitié de la variance du mode lui-même.

Si le mode n'est pas localisé au centre du volume mais en  $\vec{r}_0$  :

$$n(\vec{r}, t) = n_1 \sqrt{2} \Re \left( e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega_0 t)} \right) e^{-(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 \sigma_k^2 / 2}$$

Le signal est alors corrigé par une phase et une atténuation :

$$s(\vec{k}, t) = \frac{n_1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{\left(\frac{\theta^2}{w^2} + \sigma_k^2\right)\left(\frac{4}{w^2} + \sigma_k^2\right)^2}} e^{\frac{-(k_{0z}-k_z)^2}{2\left(\frac{\theta^2}{w^2} + \sigma_k^2\right)}} e^{\frac{-(k_{0y}-k_y)^2}{2\left(\frac{4}{w^2} + \sigma_k^2\right)}} e^{\frac{-(k_{0x}-k_x)^2}{2\left(\frac{4}{w^2} + \sigma_k^2\right)}} e^{-i\omega_0 t}$$

$$e^{i(k_{0x}-k_x)x_0 \frac{w^2 \sigma_k^2}{w^2 \sigma_k^2 + \theta^2}} e^{i(k_{0y}-k_y)y_0 \frac{w^2 \sigma_k^2}{w^2 \sigma_k^2 + 4}} e^{i(k_{0z}-k_z)z_0 \frac{w^2 \sigma_k^2}{w^2 \sigma_k^2 + 4}}$$

$$e^{\frac{-x_0^2 \sigma_k^2}{2} \frac{\theta^2}{w^2 \sigma_k^2 + \theta^2}} e^{\frac{-y_0^2 \sigma_k^2}{2} \frac{4}{w^2 \sigma_k^2 + 4}} e^{\frac{-z_0^2 \sigma_k^2}{2} \frac{4}{w^2 \sigma_k^2 + 4}}$$

La dépendance en  $\vec{k}$  du module du signal reste la même : l'effet d'appareil reste inchangé.

### Résolution en nombre d'onde

Pour tous les cas où la fonction d'appareil est bien  $u(\vec{k})^2$ , la résolution sera définie comme l'écart type de cette fonction d'appareil. Pour cet écart, la fonction d'appareil est réduite d'un facteur  $e^{-1/2}$ .

La résolution longitudinale (suivant  $x$ ) est quasi absolue, puisque le volume est long dans cette direction :

$$dk_l = \frac{\theta}{w\sqrt{2}}$$

Si nous prenons en compte la longueur de la turbulence elle-même :

$$dk_l = \frac{\sqrt{\pi}}{L_{turb}\sqrt{2}}$$

La résolution transverse (suivant  $y$  ou  $z$ ) est moins négligeable :

$$dk_t = \frac{\sqrt{2}}{w}$$

Elle prend plus de sens physique en résolution relative à  $k$  :

$$\frac{dk_t}{k} = \frac{\sqrt{2}}{kw} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}\pi w}$$

On remarque que la résolution transverse est directement liée à la divergence des faisceaux dans la zone de mesure  $\theta_w$

$$\theta_w = \frac{\lambda_i}{\pi w}$$

et à l'angle de diffusion  $\theta$  :

$$\theta = \frac{\lambda_i}{\lambda}$$

soit :

$$\frac{dk_t}{k} = \frac{\theta_w}{\sqrt{2}\theta} \quad (4.4)$$

Plus l'angle de diffusion  $\theta$ , sera proche de la limite de diffraction  $\theta_w$ , plus la résolution sera détériorée.

Nous verrons que, pour certains montages, la résolution relative peut atteindre des

niveaux de l'ordre de 10% au petits nombres d'onde de diffusion  $k$ . Il est parfois utile, pour un même montage de choisir des plus grands  $k$  pour améliorer la résolution relative.

### Dé-convolution de l'effet de résolution finie en nombre d'onde

Si la forme du spectre en vecteurs d'onde et fréquences des fluctuations peut être en partie connue, il est envisageable de reconstruire ce spectre à partir du signal de diffusion collective en déconvoluant l'effet d'appareil [Jordan2012].

## 4.3 Spectre fréquentiel

La diffusion s'exprime comme une transformées de Fourier spatiale de la densité. Nous allons en voir les propriétés

### Spectre fréquentiel du signal de diffusion

Le principal champ spatial que nous étudions est la densité moléculaire  $n(\vec{r}, t)$ .

Par nature, la diffusion introduit la transformée de Fourier spatiale sur un volume fini  $V_s$  :

$$s(\vec{k}, t) = \iiint_{V_s} n(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 r$$

C'est sur ce signal temporel que nous allons appliquer l'analyse spectrale. Sa transformée de Fourier temporelle s'écrit alors :

$$s_{VT}(\vec{k}, \omega) = \int_T s(\vec{k}, t) e^{i\omega t} dt$$

Le spectre associé à la diffusion sera normalisé par le nombre de diffuseurs :

$$S(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\langle n \rangle V_s} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \langle |s_{VT}(\vec{k}, \omega)|^2 \rangle_T$$

Comme nous l'avons vu dans le chapitre introductif sur la diffusion, pour un gaz incohérent, nous avons :

$$\langle |s(\vec{k}, t)|^2 \rangle_t = \langle n \rangle V_s$$

Par la formule de Parseval, ceci implique, pour un gaz incohérent toujours :

$$\int S(\vec{k}, \omega) \frac{d\omega}{2\pi} = 1$$

### Spectre spatial de la densité

Plus généralement, indépendamment du volume fini de diffusion  $V_s$ , le spectre de la densité  $S_n(\vec{k}, \omega)$  s'écrit :

$$S_n(\vec{k}, \omega) = \lim_{V \rightarrow \mathbb{R}^3} \frac{1}{\langle n \rangle V} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} |n_{VT}(\vec{k}, \omega)|^2 \quad (4.5)$$

où  $n_{VT}(\vec{k}, \omega)$  est la transformée de Fourier spatiale et temporelle de la densité :

$$n_{VT}(\vec{k}, \omega) = \int_0^T \iiint_V n(\vec{r}, t) e^{i(-\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)} d^3 \vec{r} dt$$

## 4.4 Spectre fréquentiel du courant du détecteur

## 4.a Spectre du courant

Nous allons évaluer le spectre du courant de battement  $i_b(t)$  :

$$i_b(t) = \Re \left\{ i \frac{\pi \varepsilon_0 \alpha \eta_H \eta q_e}{h} \frac{4 \mu_0 C \cos \theta_{pol}}{\pi \omega^2 N} \sqrt{P_i P_{ol}} e^{i(\omega_m t + \phi_m)} s(\vec{k}, t) \right\}$$

soit

$$i_b(t) = i \frac{\pi \varepsilon_0 \alpha \eta_H \eta q_e}{2h} \frac{4 \mu_0 C \cos \theta_{pol}}{\pi \omega^2 N} \sqrt{P_i P_{ol}} \left[ e^{i(\omega_m t + \phi_m)} s(\vec{k}, t) - e^{-i(\omega_m t + \phi_m)} s(-\vec{k}, t) \right]$$

car le complexe conjugué de  $s(\vec{k}, t)$  est :

$$s^*(\vec{k}, t) = \iiint u(\vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} n(\vec{r}, t) d^3 \vec{r} = s(-\vec{k}, t)$$

La transformée de Fourier temporelle des 2 termes dépendant du temps entre crochet s'écrivent :

$$\int_T e^{i(\omega_m t + \phi_m)} s(\vec{k}, t) e^{i\omega t} dt = e^{i\phi_m} s(\vec{k}, \omega + \omega_m)$$

et :

$$\int_T e^{-i(\omega_m t + \phi_m)} s(-\vec{k}, t) e^{i\omega t} dt = e^{-i\phi_m} s(-\vec{k}, \omega - \omega_m)$$

La transformée de Fourier temporelle du courant de battement est alors

$$i_b(\omega) = i \frac{\pi \varepsilon_0 \alpha \eta_H \eta q_e}{2h} \frac{4 \mu_0 C \cos \theta_{pol}}{\pi \omega^2 N} \sqrt{P_i P_{ol}} \left[ e^{i\phi_m} s(\vec{k}, \omega + \omega_m) - e^{-i\phi_m} s(-\vec{k}, \omega - \omega_m) \right]$$

Le spectre correspondant s'exprime alors :

$$I_b(\omega) = \langle n \rangle_V V_s \left( \frac{\pi \varepsilon_0 \alpha \eta_H \eta q_e}{2h} \right)^2 \left( \frac{4 \mu_0 C \cos \theta_{pol}}{\pi \omega^2 N} \right)^2 P_i P_{ol} [S(\vec{k}, \omega_m + \omega) + S(\vec{k}, \omega_m - \omega)]$$

Comme nous l'avons vu, le signal de diffusion  $s(\vec{k}, t)$  a une largeur spectrale limitée à  $\omega_D$  (avec  $\omega_D \ll \omega_m$ ). Pour des pulsations  $\omega$  dans l'intervalle  $[\omega_m - \omega_D; \omega_m + \omega_D]$  qui nous intéressera, la valeur de  $S(\vec{k}, \omega_m + \omega)$  est négligeable. Le spectre du courant  $i_b(t)$  se réduit à un terme :

$$I_b(\omega) = \langle n \rangle_V V_s \left( \frac{\pi \varepsilon_0 \alpha \eta_H \eta q_e}{2h} \right)^2 \left( \frac{4 \mu_0 C \cos \theta_{pol}}{\pi \omega^2 N} \right)^2 P_i P_{ol} S(\vec{k}, \omega_m - \omega)$$

## 4.b Effet de volume fini

Le spectre du signal de diffusion  $S(\vec{k}, \omega)$  dépend du volume de diffusion  $V_s$ . Il diffère de  $S_n(\vec{k}, \omega)$ , le spectre de  $n(\vec{k}, t)$  sur tout l'espace. Nous supposons néanmoins dans la suite que le spectre de la densité  $S_n(\vec{k}, \omega)$  varie peu à l'échelle de la résolution spectrale  $dk$  propre au volume de diffusion  $V_s$ . Dans cette limite, le spectre du signal de diffusion s'identifie à le spectre de la densité :

$$S(\vec{k}, \omega) \sim S_n(\vec{k}, \omega)$$

Le spectre du courant s'écrit alors :



$$I_b(\omega) = \langle n \rangle_V V_{turb} \left( \frac{\pi \varepsilon_0 \alpha \eta_H \eta q_e}{2h} \right)^2 \left( \frac{4 \mu_0 C \cos \theta_{pol}}{\pi \omega^2 N} \right)^2 P_i P_{ol} S_n(\vec{k}, \omega_m - \omega)$$

Nous nous limitons au volume de la turbulence :

$$V_{turb} = \frac{\pi \omega^2}{4} L_{turb}$$

Le spectre du courant de battement est :

$$I_b(\omega) = \langle n \rangle_{V_{turb}} \frac{\pi \omega^2 L_{turb}}{4} \left( \frac{\pi \varepsilon_0 \alpha \eta_H \eta q_e}{2h} \right)^2 \left( \frac{4 \mu_0 C \cos \theta_{pol}}{\pi \omega^2 N} \right)^2 P_i P_{ol} S_n(\vec{k}, \omega_m - \omega)$$

Après simplification :

$$I_b(\omega) = \frac{\pi L_{turb} \langle n \rangle_{V_{turb}} \alpha^2 \eta_H^2 \eta^2 q_e^2 \cos^2 \theta_{pol}}{h^2 C^2 N^2 \omega^2} P_i P_{ol} S_n(\vec{k}, \omega_m - \omega) \quad (4.6)$$

## 4.5 Rapport signal sur bruit du courant

### 5.a Bruit photonique du détecteur

Le détecteur est à l'origine d'un bruit qualifié de bruit photonique, qui se comporte comme un bruit de grenaille en électronique, tel que décrit par J. Sheffield [Sheffield1975].

Pendant une période de temps arbitraire  $T$ , le nombre moyen d'électrons émis par le détecteur est :

$$\langle N_e(t) \rangle_T = T \langle n_e(t) \rangle_T = T \frac{\eta}{\hbar \omega_i} P_{ol}$$

L'émission des électrons par le détecteur suit un processus de Poisson : le temps d'émission de chaque électron est indépendant des autres. Ce nombre  $N_e(t)$  fluctue au cours du temps, et sa variance est égale à sa moyenne :

$$\sigma_{N_e}^2 = \langle N_e(t) \rangle_T$$

donc la variance du flux d'électrons s'écrit :

$$\sigma_{n_e}^2 = \frac{1}{T^2} \langle N_e(t) \rangle_T$$

Pour le courant issu du détecteur,  $i(t) = q_e n_e(t)$ , la variance s'écrit :

$$\sigma_i^2 = \frac{q_e^2}{T^2} \langle N_e(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \frac{\eta q_e^2}{\hbar \omega_i} P_{ol}$$

Par la relation de Parseval, cette variance correspond à la densité spectral du bruit  $I_n(f)$  intégrée sur les fréquences plus petites que  $\frac{1}{2T}$  (la variable aléatoire a été moyennée sur un temps  $T$ ). Comme les événements (émissions des électrons) sont non corrélés dans le temps, ce bruit est blanc, indépendant de la fréquence,

$$I_n(f) = I_n :$$

$$\sigma_i^2 = \int_{-1/2T}^{1/2T} I_n df = \frac{1}{T} I_n$$

Le spectre du bruit blanc, indépendant de  $f$ , s'écrit :

$$I_n = T \sigma_i^2 = \frac{\eta q_e^2}{\hbar \omega_i} P_{ol} \quad (4.7)$$

Le bruit photonique sur le courant de sortie du détecteur est proportionnel à la puissance du faisceau OL.

### Puissance du bruit photonique

D'un point de vue pratique, les détecteurs ne supportent qu'une puissance lumineuse de l'ordre du milliwatt :  $P_{ol} = 1 \text{ mW}$ . Pour une source de longueur d'onde  $\lambda_i = 0,514 \text{ } \mu\text{m}$ , le bruit photonique est donc de :

$$I_n = 3,32 \cdot 10^{-20} \text{ A}^2/\text{Hz}$$

Sur une largeur spectrale  $\Delta f = 1 \text{ kHz}$  et appliquée sur une résistance  $R_i = 50 \text{ } \Omega$ , le bruit photonique du courant produit une puissance  $P$  :

$$P = R_i I_n \Delta f$$

soit :

$$P = 1,66 \cdot 10^{-15} \text{ W}$$

Ce niveau est détectable après amplification par un pré-ampli faible bruit.

## 5.b Rapport signal sur bruit et spectre de la densité

Le spectre du courant de battement est :

$$I_b(\omega) = \frac{\pi L_{turb} \langle n \rangle_{v_{turb}} \alpha^2 \eta_H^2 \eta^2 q_e^2 \cos^2 \theta_{pol}}{h^2 C^2 N^2 \omega^2} P_i P_{ol} S_n(\vec{k}, \omega_m - \omega)$$

la dynamique du signal s'écrit alors ( $\hbar \omega_i = h \frac{c}{N \lambda_i}$ ) :

$$\frac{I_b(\omega)}{I_n} = \frac{\pi L_{turb} \langle n \rangle_{v_{turb}} \alpha^2 \eta_H^2 \eta \cos^2 \theta_{pol}}{h C N^3 \lambda_i \omega^2} P_i S_n(\vec{k}, \omega_m - \omega) \quad (4.8)$$

En inversant la formule, nous pouvons alors exprimer la spectre de la densité moléculaire en fonction du rapport signal sur bruit :

$$S_n(\vec{k}, \omega_m - \omega) = \frac{h C N^3 \lambda_i \omega^2}{\pi L_{turb} \langle n \rangle_{v_{turb}} \alpha^2 \eta_H^2 \eta \cos^2 \theta_{pol} P_i} \frac{I_b(\omega)}{I_n}$$

L'intérêt du rapport signal sur bruit est que celui est maintenu tout au long de la chaîne électronique, tant que le bruit de grenaille du détecteur domine les autres bruits (essentiellement le bruit thermique du premier ampli). Nous choisirons donc la puissance de l'OL suffisante pour que le bruit photonique dépasse ce bruit thermique.

## 5.c Rapport signal sur bruit pour un gaz incohérent

Quelle est la sensibilité typique de l'instrument ? Quelle puissance de faisceau faut-il pour détecter les fluctuations les plus faibles ?

Nous considérerons l'air, dans les conditions normales de température et de pression. Les fluctuations les plus faibles sont celles d'un gaz incohérent.

Rappelons, que pour un gaz incohérent, les fluctuations moyennes sont :

$$\langle |s(\vec{k}, t)|^2 \rangle_t = \langle n \rangle V_s$$

Par la formule de Parseval, ceci implique, pour le spectre :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(\vec{k}, f) df = 1$$

Le rapport du signal intégré sur toutes les fréquences sur le bruit par fréquence est alors :

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{b,inc}(f) df}{I_n} = \frac{\pi L_{inc} \langle n \rangle_{V_{urb}} \alpha^2 \eta_H^2 \eta \cos^2 \theta_{pol}}{h C N^3 w^2 \lambda_i} P_i$$

La polarisation des faisceaux est choisie perpendiculaire au plan de diffusion pour optimiser la diffusion :

$$\cos \theta_{pol} = 1$$

Dans les conditions normales de température et de pression, l'air a pour densité moléculaire :

$$\langle n \rangle_{V_{urb}} = 2,7 \cdot 10^{25} m^{-3}$$

Pour l'air, la polarisabilité est :

$$\alpha_{air} = 2,07 \cdot 10^{-29} m^3$$

Considérons une source laser visible (le visible est plus favorable à l'infrarouge) de puissance continue d'un Watt. La taille des faisceaux est de l'ordre du millimètre :

$$\lambda_i = 0,514 \mu m \quad P_i = 1 \text{ Watt} \quad w = 1 \text{ mm}$$

L'efficacité quantique du détecteur est de l'ordre de 50% :  $\eta = 0,5$  , l'efficacité d'hétérodynage est considérée optimale :  $\eta_H = 1$  .

Nous supposons un angle de diffusion  $\theta = 10 \text{ mrad}$  :

$$\lambda = \frac{\lambda_i}{\theta} = 50 \mu m$$

La longueur d'air traversée par le volume de diffusion est alors :

$$L_{inc} = \frac{w \sqrt{\pi}}{\theta} = 18 \text{ cm}$$

Le rapport du signal intégré sur tout le spectre, sur le bruit par fréquence vaut :

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{b,inc} df}{I_n} = 3,2 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

Nous verrons dans le chapitre suivant que la largeur fréquentielle typique de le spectre est donnée par l'effet Doppler :

$$\Delta F = \frac{u_{th air}}{\lambda}$$

Dans les conditions standard, la vitesse thermique est  $u_{th air} = 406 \text{ ms}^{-1}$  , la largeur fréquentielle est alors :

$$\Delta f = 8,0 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

La rapport signal sur bruit sur l'ensemble du spectre pour un gaz incohérent est alors en moyenne très faible :

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{b,inc} I_b(f) df}{I_n \Delta f} = 4 \cdot 10^{-3}$$

Pour pouvoir observer la diffusion incohérente de l'air dans les conditions ambiantes, il faut une source laser de puissance très importante.

## 5.d Rapport signal sur bruit pour une onde sonore

Si la détection de la diffusion incohérente est difficile, la détection d'une onde sonore générée par un piézoélectrique est beaucoup plus aisée. Si la source sonore est étalonnée, elle permet de vérifier la réponse du système [Tsikata2010].

### Onde acoustique étalonnée

Nous utilisons un piézoélectrique comme source d'onde sonore alimentée à la pulsation  $\omega_{ac}$ . La surface vibrante du piézoélectrique une onde sonore de vecteur d'onde  $\vec{k}_{ac}$ . Sa direction est normale à la surface vibrante, et le nombre d'onde est  $k_{ac} = \frac{\omega_{ac}}{c_s}$  où  $c_s$  est la vitesse du son dans le milieu. L'amplitude maximale du déplacement de la surface vibrante  $a_{ac}$  doit être connue. Pour une propagation dans l'air à la densité moyenne  $\langle n \rangle_V$ , la variance des fluctuations de densité associée est donnée par :

$$\langle n_{ac}^2 \rangle_{V_{ac}} = \frac{1}{2} \left( \frac{a_{ac} \omega_{ac} \langle n \rangle_{V_{ac}}}{c_s} \right)^2$$

L'onde sonore ne couvre pas toute la longueur du volume de diffusion, mais seulement la longueur  $L_{ac}$ .

### Rapport signal sur bruit attendu

Comme le signal de diffusion est une transformée de Fourier spatiale de la densité et que l'onde sonore est un mode de Fourier, le signal sera sensible à cette onde si le vecteur d'onde de diffusion correspond au vecteur d'onde de l'onde sonore :  $\vec{k} = \vec{k}_{ac}$ .

Si les 2 vecteurs d'onde coïncident bien, la variance du signal de diffusion est la somme du terme incohérent, et la variance propre à l'onde sonore.

$$\langle |s(\vec{k}, t)|^2 \rangle_t = \langle n \rangle_{V_s} V_s + \langle n_1^2 \rangle_{V_{ac}} V_{ac}^2$$

Le volume occupé par le son  $V_{ac}$  est défini par le profil  $u(\vec{r})$ , limité dans le sens de sa longueur, au diamètre de l'onde sonore  $L_{ac}$ . Ce volume aura pour les 2 dimensions transverses, la longueur intégrale  $w \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ . Le volume est alors :

$$V_{ac} = \frac{\pi w^2 L_{ac}}{2}$$

Le volume est calculé à partir de  $u(\vec{r})$  et non de  $u(\vec{r})^2$

L'amplitude de l'onde sonore sera suffisamment grande pour que le terme incohérent soit négligeable. La partie principale de la puissance spectrale du signal de diffusion se retrouvera autour la fréquence de celle-ci. Nous intégrons sur une largeur  $\Delta f$ , plus large que la source de l'onde sonore :

$$\int_{f_{ac}-\Delta f/2}^{f_{ac}+\Delta f/2} S_n(\vec{k}, f) df = \frac{\langle n_{ac}^2 \rangle_{V_{ac}} V_{ac}^2}{\langle n \rangle_{V_s} V_s}$$

le rapport signal sur bruit attendu autour de la fréquence de l'onde sonore (modulée à la fréquence de modulation du système hétérodyne  $f_m$ ) :

$$\frac{\int_{f_{ac}-\Delta f/2}^{f_{ac}+\Delta f/2} I_{b,ac}(f_m - f) df}{I_n} = \frac{\pi L_{inc} \langle n \rangle_{V_{urb}} \alpha^2 \eta_H^2 \eta \cos^2 \theta_{pol}}{h C N^3 w^2 \lambda_i} P_i \frac{\langle n_{ac}^2 \rangle_{V_{ac}} V_{ac}^2}{\langle n \rangle_{V_s} V_s}$$

Comparé au signal incohérent, ce rapport signal sur bruit est donc :

$$\frac{\int_{f_{ac}-\Delta f/2}^{f_{ac}+\Delta f/2} I_{b,ac}(f_m - f) df}{I_n} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{b,inc}(f) df}{I_n} \frac{\langle n_{ac}^2 \rangle_{V_{son}} V_{ac}^2}{\langle n \rangle_{V_s} V_s}$$

Si on considère un piézoélectrique excité à la fréquence  $f_{ac} = 332 \text{ kHz}$ , avec une amplitude de mouvement  $a_{ac} = 11.5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  sur un diamètre de  $L_{ac} = 5 \text{ cm}$ , la variance des fluctuations propre à l'onde générée est de :

$$\langle n_{ac}^2 \rangle_{V_{ac}} = \frac{1}{2} \left( \frac{a_{ac} \omega_{ac} \langle n \rangle_{V_{ac}}}{c_s} \right)^2 = 1.9 \cdot 10^{40} \text{ m}^{-6}$$

Nous allons estimer la puissance sonore de cette onde. Comme l'amplitude de la vitesse est  $a_{ac} \omega_{ac}$ , l'énergie totale (cinétique et de pression) moyennée dans le temps par unité de volume est :

$$\frac{E_{ac}}{V_{ac}} = \frac{1}{2} \rho_{air} a_{ac}^2 \omega_{ac}^2$$

Comme l'onde se propage à la vitesse  $c_s$ , l'intensité acoustique  $I_s$  (la puissance sonore par unité de surface) correspondant à cette onde est donnée par :

$$I_{ac} = \frac{P_{ac}}{A_{ac}} = c_s \frac{E_{ac}}{V_{ac}} = \frac{1}{2} a_{ac}^2 \omega_{ac}^2 Z_s$$

où apparaît  $Z_s = \rho_{air} c_s$ , l'impédance sonore de l'air ( $Z_s = 428 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$  dans les conditions standard).

La puissance par unité de surface est ici de :

$$\frac{P_{ac}}{A_{ac}} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Wm}^{-2}$$

C'est équivalent à un niveau acoustique de  $90 \text{ dB}$ . La référence est le seuil d'audibilité, pour une fréquence dans la gamme audible, à  $10^{-12} \text{ Wm}^{-2}$ .

Nous considérons une source laser infrarouge de puissance continue d'un Watt. La taille des faisceaux est de l'ordre de quelques millimètres :  $\lambda_i = 10,6 \mu\text{m}$

$$P_i = 1 \text{ Watt} \quad w = 6 \text{ mm}$$

L'efficacité quantique du détecteur est de l'ordre de 50% :  $\eta = 0,5$ , l'efficacité d'hétérodyne est considérée optimale :  $\eta_H = 1$ .

Nous supposons un angle de diffusion  $\theta = 10 \text{ mrad}$ . La longueur d'onde de

diffusion correspond à celle de l'onde sonore :

$$\lambda = \frac{\lambda_i}{\theta} = 1 \text{ mm}$$

La longueur d'air traversée par le volume de diffusion est alors :

$$L_{inc} = \frac{w \sqrt{\pi}}{\theta} = 1,08 \text{ m}$$

Le facteur correctif du rapport signal sur bruit, par rapport au signal incohérent pour cette même source est alors :

$$\frac{\langle n_{ac}^2 \rangle_{V_{ac}} V_{ac}^2}{\langle n \rangle_{V_s} V_s} = \frac{\langle n_{ac}^2 \rangle_{V_{ac}} \pi w^2 L_{ac}^2}{\langle n \rangle_{V_s} 2 L_{inc}} = 2 \cdot 10^8$$

Le rapport signal sur le niveau de bruit est donc beaucoup fort que pour le gaz incohérent :

$$\frac{\int_{-\Delta f/2}^{\Delta f/2} I_{b,ac}(f_m - f_{ac} - f) df}{I_n} = 5 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$$

L'effet est d'autant plus favorable que sa largeur fréquentielle est très étroite. On peut se limiter à la largeur de bande  $\Delta f = 1 \text{ kHz}$ . Le rapport signal sur bruit pour une onde sonore est alors de l'ordre de :

$$\frac{\int_{-\Delta f/2}^{\Delta f/2} I_{b,ac}(f_m - f_{ac} - f) df}{I_n \Delta f} = 5 \cdot 10^7$$

Ce niveau de rapport signal sur bruit est largement suffisant pour mesurer le signal propre à l'onde sonore

# 5 Montage laser de diffusion collective

Cette partie développe les montages optiques et électroniques à mettre en œuvre pour l'observation de la turbulence de l'air par diffusion collective.

## 5.1 Schéma général

### 1.a Choix de la source

Le choix du montage optique va dépendre des échelles de turbulence que nous cherchons à observer.

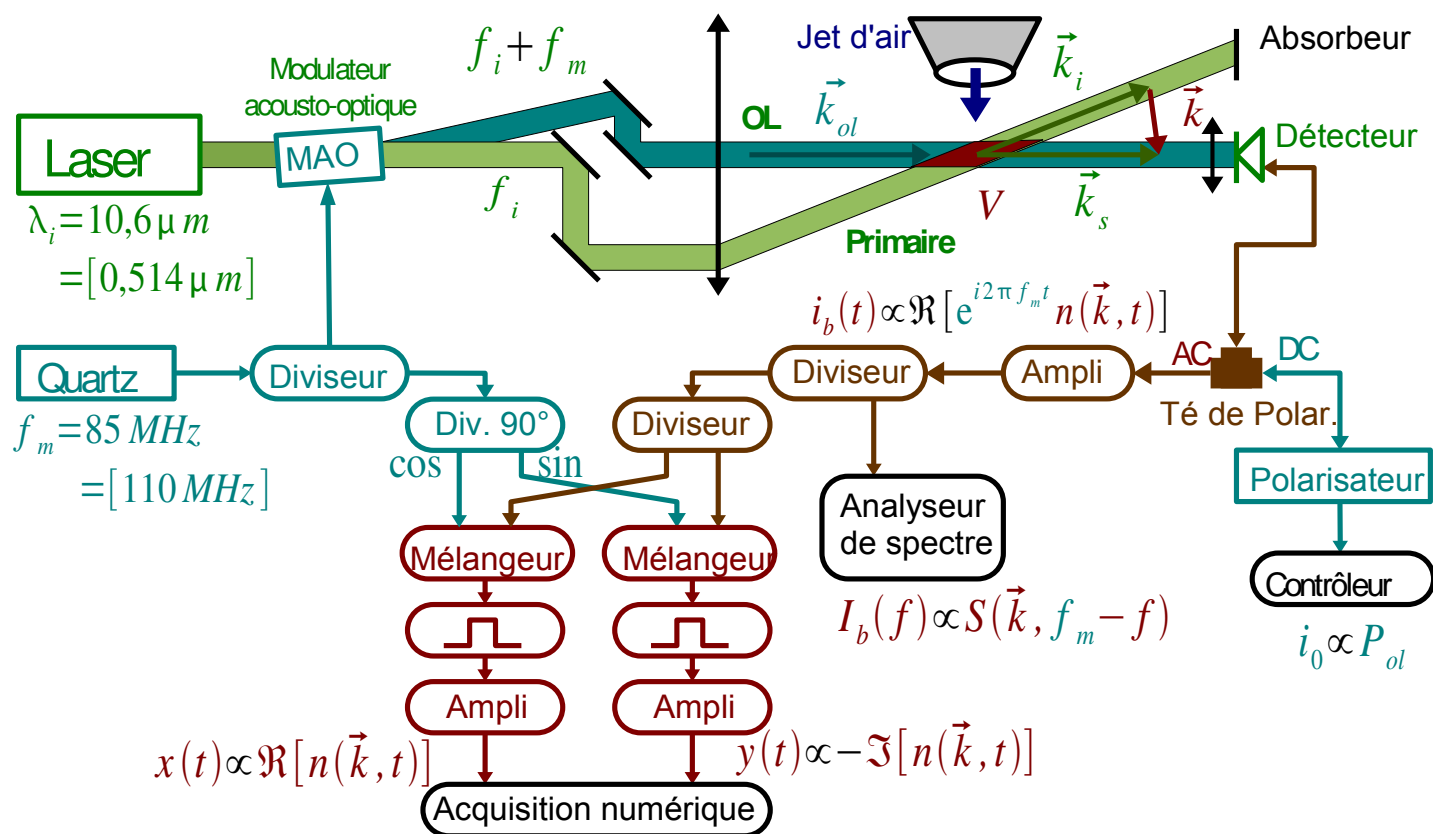
Pour un écoulement de laboratoire, les échelles turbulentes d'un écoulement, vont typiquement du centimètre (taille des plus gros tourbillons), à la dizaine de microns (échelle de Kolmogorov). Comme nous l'avons vu, la diffusion Rayleigh est plus favorable pour des sources à longueur d'onde courte. La longueur d'onde de diffusion  $\lambda$  est liée à la longueur de la source  $\lambda_i$  par l'angle de diffusion :

$$\lambda = \frac{1}{2 \sin(\theta/2)} \lambda_i$$

Pour atteindre cette gamme d'échelle, il est donc préférable d'utiliser une petite longueur d'onde incidente  $\lambda_i$ , et de travailler en diffusion vers l'avant (angle de diffusion  $\theta$  petit). Néanmoins, du fait de la diffraction naturelle des faisceaux, l'angle de diffusion ne peut arbitrairement petit.

Pour couvrir quasiment toute la gamme d'échelles envisagée, nous devons utiliser 2 montages avec des sources de longueur d'onde différentes: l'une sera dans l'infrarouge lointain, à pour les plus grandes échelles, l'autre dans le visible, pour les plus petites échelles.

### 1.b Description générale



Dans les 2 cas, la source est un laser continu. Le faisceau oscillateur local (OL) est obtenu en utilisant un modulateur acousto-optique, alimenté par un signal issu d'un quartz.

L'angle de diffusion est contrôlé par des systèmes composés d'une lentille de focalisation et d'un périscope monté sur un rotateur.

Les détecteurs sont photovoltaïques. Un té de polarisation est placé derrière pour séparer le signal continu, du signal de battement. Le signal de battement est amplifié par un pré-ampli, avant d'être démodulé par une association de diviseurs, de mélangeurs, de filtres et d'ampli.

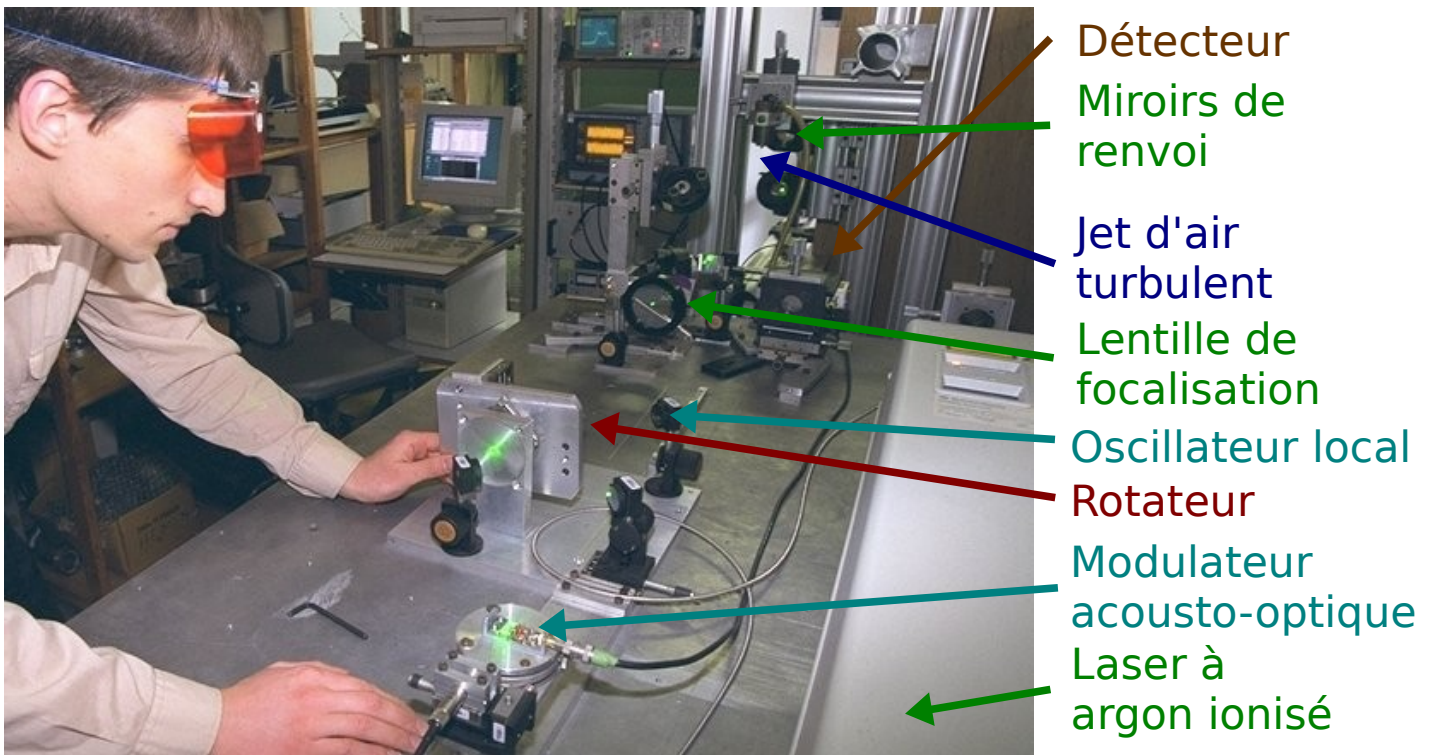
Le schéma général est montré ci-dessous. Les paragraphes suivants détaillent la description des principaux composants.

Les photos qui l'accompagnent montrent un montage en lumière visible.

## 5.2 Montage optique

La photo qui suit montre le montage optique en lumière visible.





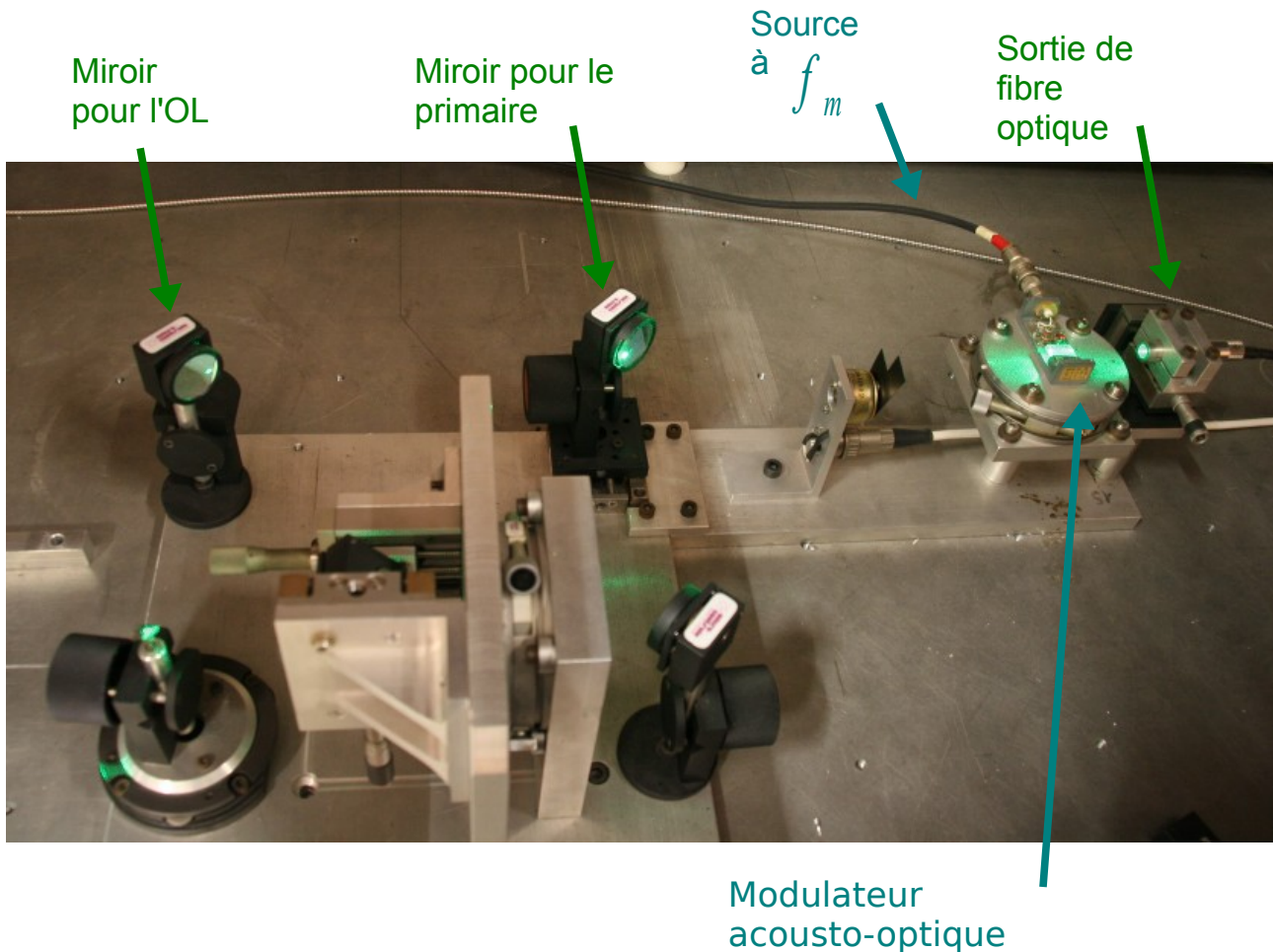
A. Kharchenko

## 2.a Source laser

Les 2 sources utilisées sont alors : un laser continu infrarouge lointain, à  $\text{CO}_2$  ( $\lambda_i = 10,6 \mu m$ ) et un laser continu visible, à argon ionisé ( $\lambda_i = 0,514 \mu m$ ).

Le fonctionnement des sources est continu afin de pouvoir suivre la dynamique du signal de diffusion. Les puissances de faisceau lumineux nécessaires pour la diffusion est de l'ordre du watt.

## 2.b Modulateur acousto-optique



Afin de créer le faisceau oscillateur local avec un décalage fréquentiel, nous utilisons un modulateur acousto-optique. Il fonctionne sous le principe de la diffraction d'une onde électromagnétique par une onde sonore dans un solide [Sapriel1976, Yariv2003, Yariv2007, Jonathan2008].

### Diffusion de Bragg

Les effets de l'onde acoustique sont décrites par un développement au premier ordre de la perturbation provoquée par cette onde. Toute grandeur  $v$  sera écrite :

$$v(x, t) = v_0 + v_1(x, t) \quad \text{et} \quad \hat{v}_1 = \max(v_1)$$

Un onde électromagnétique monomode (vecteur d'onde  $\vec{k}_i$ , pulsation  $\omega_i$ , amplitude  $\vec{E}_{0i}$ ) traverse un cristal transparent pour elle, d'indice optique  $N_0$ , avec une incidence quasi normale. Une onde acoustique est produite dans ce cristal par un transducteur piézoélectrique excité à la pulsation  $\omega_m$ . L'onde progressive se propage avec le vecteur le vecteur d'onde  $\vec{k}_m$ . Elle génère une onde de l'indice optique pour l'onde électromagnétique incidente d'amplitude  $\hat{N}_1$  ( $N_1 \ll N_0$ ). Ces variations d'indices vont diffracter le faisceau initial. Le faisceau lumineux sera traité comme une onde plane, tant que sa taille transverse contient plusieurs longueurs d'onde de l'onde acoustique.  $L$  est la largeur, et  $l$  est l'épaisseur sur lesquelles

l'interaction entre la lumière et l'onde acoustique a lieu.

La nature de la diffraction dépend de la longueur traversée. La condition va dépendre du paramètre sans dimension  $Q$  :

$$Q = \frac{k_m^2 L}{N_0 k_i}$$

L'intensité de la diffraction dépend de l'intensité des variations d'indice. Elle va s'exprimer à travers le paramètre sans dimension  $\nu$  :

$$\nu = k_i L \hat{N}_1$$

Si la longueur  $L$  est courte de façon que  $Q \leq 1$ , on se trouve alors dans le régime de diffraction de Raman et Nath. Dans ce régime après traversée de l'onde acoustique, le faisceau lumineux initial ( $N_0 \vec{k}_i, \omega_i$ ) est séparé en un ensemble de faisceaux faisant intervenir les harmoniques de l'onde acoustiques. Pour l'ordre  $m \in \mathbb{Z}$ , le vecteur d'onde est  $N_0 \vec{k}_i + m \vec{k}_m$  et la pulsation  $\omega_i + m \omega_m$ . Comme généralement  $k_m \ll N_0 k_i$ , chaque ordre est diffracté par rapport à la direction

initiale du faisceau lumineux, de l'angle  $\theta_N = m \frac{k_m}{N_0 k_i}$ . L'amplitude de l'onde pour cet

ordre est :  $J_m(\nu) E_{0i}$  ( $J_m$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $m$ ). Si l'onde acoustique est peu intense de façon que  $\nu \ll 1$ , alors seuls les ordres  $m = \pm 1$  apparaissent avec pour amplitude  $\frac{\nu}{2} E_{0i}$ , les modes d'ordres supérieurs ont une amplitude négligeable. L'onde non déviée, d'ordre  $m = 0$  garde pour amplitude  $(1 - \frac{\nu^2}{4}) E_{0i}$ . Pour des valeurs de  $\nu$  plus grande, les ordres supérieurs apparaissent.

Si la longueur  $L$  est suffisamment longue de façon que  $Q \gg 1$ , on se trouve alors dans le régime de diffraction de Bragg. Dans ce cas, seul le premier ordre de la diffraction de Raman et Nath est possible  $m = \pm 1$ . Le vecteur d'onde de l'onde diffractée (pour nous l'oscillateur local)  $N_0 \vec{k}_{ol} = N_0 \vec{k}_i \pm \vec{k}_m$ ; La pulsation est  $\omega_{ol} = \omega_i \pm \omega_m$ . Ces 2 conditions fixent la géométrie de la diffraction. Comme la fréquence acoustique est très faible devant la fréquence lumineuse,  $\omega_m \ll \omega_i$ , l'onde diffractée a quasiment même fréquence et nombre d'onde que l'onde initiale :  $\omega_{ol} \sim \omega_i, \vec{k}_{ol} \sim \vec{k}_i$ . La figure de Bragg entre  $N_0 \vec{k}_i, N_0 \vec{k}_{ol}$  et  $\vec{k}_m$  forme alors un triangle isocèle. L'onde lumineuse n'est pas alors complètement normale. Elle doit avoir pour incidence l'angle de Bragg  $\theta_B$  :

$$\theta_B = -\frac{k_m}{2 N_0 k_i}$$

L'onde acoustique vient alors s'ajouter au vecteur de l'onde lumineuse pour former l'onde diffractée.

$$N_0 \vec{k}_{ol} = N_0 \vec{k}_i + \vec{k}_m$$

L'angle de diffraction est le double en valeur absolue de l'angle de Bragg

$\theta_{ol} = 2|\theta_B|$  . Les fréquences s'ajoutent aussi :

$$\omega_{ol} = \omega_i + \omega_m$$

Si l'angle d'incidence est opposé, l'onde acoustique est soustraite au lieu d'être ajoutée.

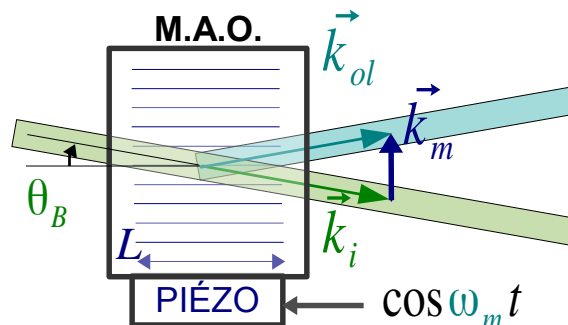
L'amplitude de l'onde diffractée est fonction du paramètre  $\nu$  :

$$E_{0ol} = \sin \frac{\nu}{2} E_{0i}$$

L'amplitude de l'onde transmise sans déviation ( $N=0$ ) correspond au complémentaire en énergie :

$$E_{0t} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\nu}{2}} E_{0i} .$$

À la différence du régime de Raman et Nath, le régime de Bragg permet de diffracter plus de la moitié en énergie de l'onde incidente. La diffraction est même complète pour  $\nu = \pi$



### Effet photo-élastique

La relation entre l'intensité de l'onde acoustique et les variations d'indice optique induites dépendent des propriétés photo-élastiques du matériau.

Dans le cristal, l'onde acoustique peut être soit longitudinale soit transverse suivant que les déplacements sont dans la direction de propagation ou transverse à elle. Dans tous les cas, le déplacement propre à cette onde est de la forme :

$$u_1(x, t) = \hat{u}_1 \sin(k_m x - \omega_m t)$$

Les variations d'indice du milieu sont liés aux variations de densité de celui-ci. Pour que la densité du matériau change, le déplacement ne suffit pas : un gradient du déplacement est nécessaire pour induire des variations de densité. Nous noterons  $s_1(x, t)$  la déformation définie comme la dérivée du déplacement suivant l'axe de propagation :

$$s_1(x, t) = \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, t) = k_m \hat{u}_1 \cos(k_m x - \omega_m t) \text{ avec } \hat{s}_1 = k_m \hat{u}_1$$

La propriété photo-élastique du matériau est donnée par la relation entre les fluctuations de l'inverse de la constante diélectrique relative, et la déformation du solide :

$$\left( \frac{1}{\epsilon_r} \right)_1 = P_p s_1$$

Le coefficient de linéarité  $P_p$  est la constante photo-élastique du matériau (sans dimension). Elle dépend de la nature du matériau et de la longueur d'onde de la lumière utilisée. Elle dépend aussi des polarisations de l'onde sonore et de l'onde lumineuse : le milieu est biréfringent (elle s'exprime sous forme d'une matrice à 6 dimensions).

Les variations d'indice se déduisent des variations de la constante diélectrique relative :

$$\left(\frac{1}{\epsilon_r}\right)_1 = \left(\frac{1}{N^2}\right)_1 = -2 \frac{N_1}{N_0^3}$$

Les variations d'indice s'écrivent :

$$N_1(x, t) = \frac{-1}{2} N_0^3 P_p s_1(x, t) = \frac{-1}{2} N_0^3 P_p k_m \hat{u}_1 \cos(k_m x - \omega_m t)$$

L'amplitude maximale de variation d'indice est alors :

$$\hat{N}_1 = \frac{1}{2} N_0^3 P_p k_m \hat{u}_1$$

Comme vu précédemment, l'amplitude du déplacement dû à l'onde acoustique peut être déduite de l'intensité de l'onde (puissance par unité de surface) :

$$I_{ac} = \frac{P_{ac}}{L} = \frac{1}{2} \rho_0 c_s \omega_m^2 \hat{u}_1^2$$

La combinaison des 2 dernières relations permet de relier les fluctuations d'indice à l'intensité de l'onde :

$$\hat{N}_1 = \sqrt{\frac{1}{2} M_2 I_{ac}}$$

où  $M_2$  est défini comme la figure de mérite du matériau (dimension :  $[M^{-1} T^3]$ ) [Dixon1967] :

$$M_2 = \frac{N_0^6 P_p^2}{\rho_0 c_s^3}$$

le paramètre sans dimension  $\nu$  s'exprime alors :

$$\nu = k_i L \sqrt{\frac{1}{2} M_2 I_{ac}}$$

L'intensité de la lumière diffractée relativement à la lumière incidente est alors :

$$\frac{I_{ot}}{I_i} = \frac{E_{0o1}^2}{E_{0i}^2} = \sin^2 \left( \frac{k_i L}{2} \sqrt{\frac{1}{2} M_2 I_{ac}} \right)$$

### Application au visible et à l'infrarouge lointain

Le solide doit être transparent pour l'onde électromagnétique. C'est un cristal de germanium ( $Ge$ ) pour le laser  $CO_2$ , et un cristal de quartz, de silice ou de molybdate de plomb ( $PbMoO_4$ ) pour le visible. Les bandes de fréquences de fonctionnement des modulateurs sont relativement étroites (une dizaine de mégahertz). Elles sont autour de 40 MHz pour l'infrarouge lointain, et autour de 110 MHz pour le visible. Ce sont ces fréquences optimales pour le modulateur qui seront



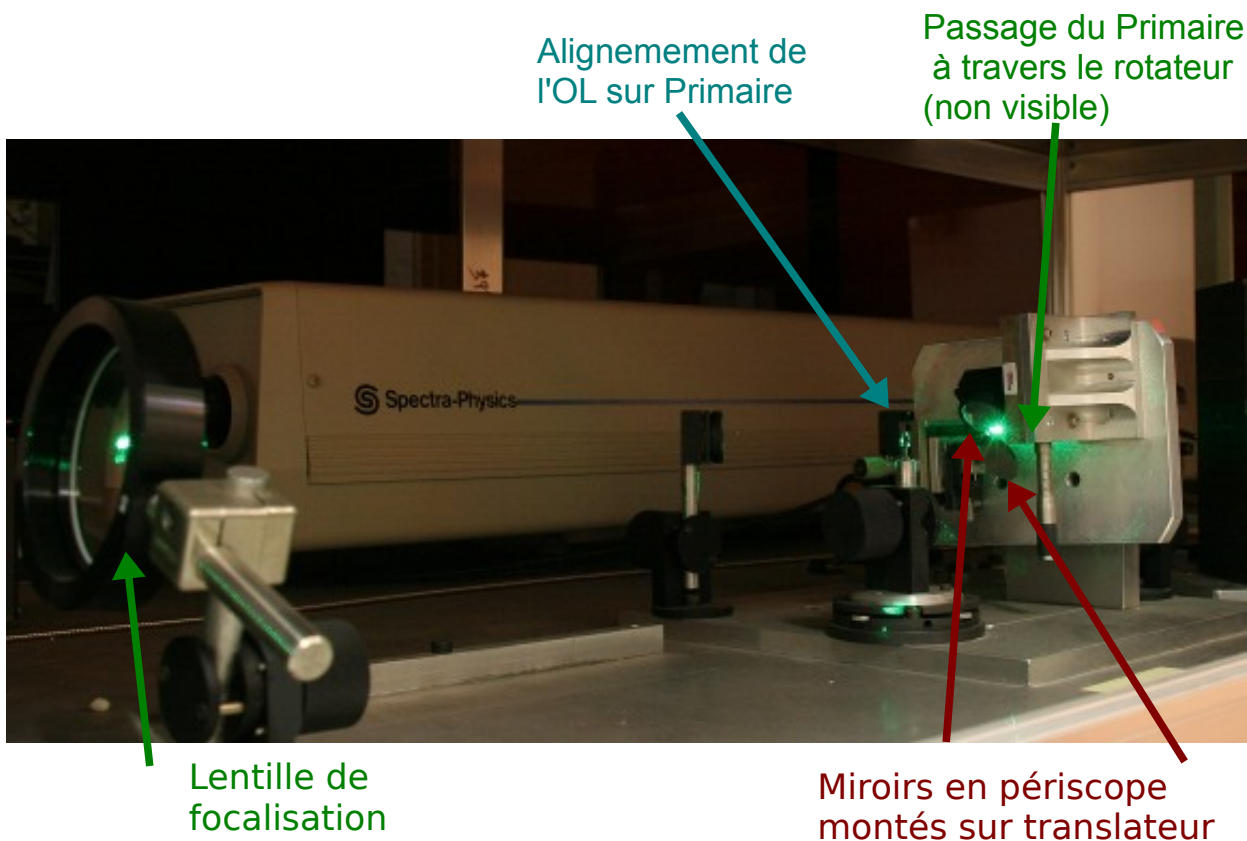
utilisées comme fréquence de modulation pour l'oscillateur local. L'interaction est optimisée pour une polarisation particulière du faisceau. L'onde électromagnétique doit être la plus plane possible dans le cristal. Pour un faisceau gaussien, on se place à proximité de la position de taille minimum du faisceau.

Le tableau ci-dessous montre la figure de mérite photo-élastique pour ces matériaux dans les conditions optimales de l'effet photo-élastique :

Matériau	$\lambda_i$ $\mu\text{m}$	Polar. lumière	Polar. son	$N_0$	$c_s$ $\text{m s}^{-1}$	$\rho_0$ $\text{kg m}^{-3}$	$M_2$ $\text{s}^3 \text{kg}^{-1}$
<i>Ge</i>	10,6			4,003	$5,5 \cdot 10^3$	$5,3 \cdot 10^3$	$840 \cdot 10^{-15}$
<i>PbMoO<sub>4</sub></i>	0,514	ou $\perp$		2,47	$3,63 \cdot 10^3$	$6,95 \cdot 10^3$	$23,7 \cdot 10^{-15}$

Ce système permet que les faisceaux incident et OL soient cohérents entre eux.

## 2.c Lentille de focalisation et rotateur



Le volume de diffusion est défini par le croisement des faisceaux primaire et OL. L'angle de diffusion  $\theta$  est aussi l'angle entre ces 2 faisceaux : pour changer le vecteur d'onde de diffusion  $\vec{k}$ , il faut changer l'angle de croisement des faisceaux. Comment rendre l'angle de diffusion modifiable, en conservant la position du volume de diffusion ?

Le faisceau OL devant être dirigé sur le détecteur, il restera fixe. C'est le faisceau primaire qui sera modifié. Pour changer l'angle tout en conservant la position du croisement, le plus simple est de placer le volume de diffusion au point focale d'une

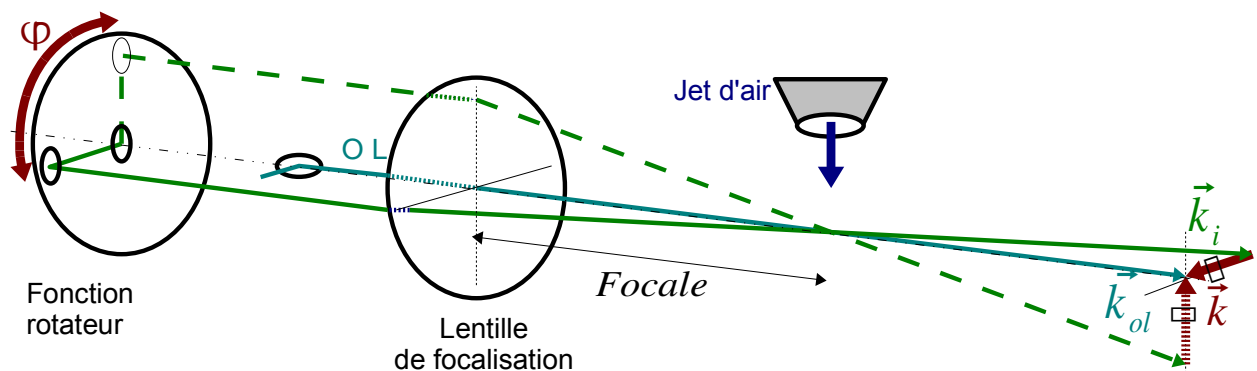
lentille convergente. Il suffit alors de garantir que les faisceaux restent parallèles en amont de la lentille, pour qu'ils se croisent toujours au point focal image.

Le faisceau OL est dirigé sur l'axe central de la lentille.

### Rotation du vecteur d'onde de diffusion

Le faisceau primaire est décalé de cet axe par un système de périscopes monté sur un rotateur. Ce rotateur est aussi sur le même axe que la lentille. La rotation permet de changer la direction du vecteur d'onde de diffusion  $\vec{k}$ .

La rotation est limitée par la gêne que peut susciter le miroir (et son support) qui permet de ramener le faisceau OL sur l'axe de la lentille. Mais la diffusion à  $-\vec{k}$  n'apporte pas d'informations supplémentaires par rapport à celle à  $\vec{k}$  :  $s(-\vec{k}, t) = s^*(\vec{k}, t)$ . Une excursion de  $180^\circ$  suffit.



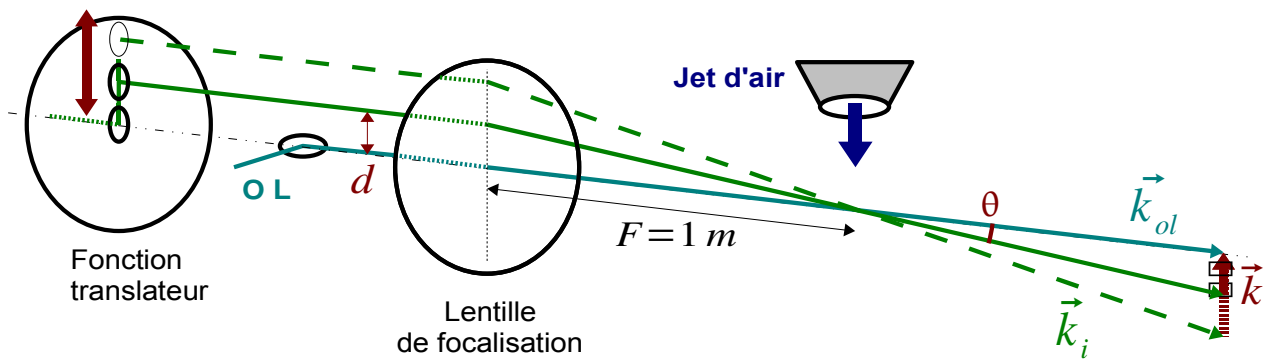
### Modification du nombre d'onde de diffusion

Pour changer l'angle de diffusion  $\theta$ , il faut changer la distance entre les 2 faisceaux. Pour cela le miroir extérieur du périscopes est monté sur un translateur. L'angle  $\theta$  se déduit aisément de la distance  $d$  entre les faisceaux et de la focale

$F$  de la lentille :  $\theta = \frac{d}{F}$ . Dans l'approximation des petits angles, le nombre d'onde de diffusion est  $k = \frac{d}{F} k_i$  et la longueur d'onde de diffusion est  $\lambda = \frac{F}{d} \lambda_i$ .

La taille du faisceau est modifiée par la lentille (voir les annexes). Nous nous placerons dans la situation con-focale : le foyer amont de la lentille est situé sur la position de taille minimum  $w_t$  du faisceau. Le foyer image correspond alors à la position de taille minimum  $w$  du faisceau image. La relation entre les 2 est :

$$w = \frac{\lambda_i F}{\pi w_t}$$



### Gamme de longueur d'onde de diffusion accessible

La gamme de longueurs d'onde de diffusion accessible dépend des constantes  $\lambda_i$ , la longueur d'onde de la source, et  $F$  la focale de la lentille, et de la gamme de distance entre faisceaux  $d$  accessible.

Pour le montage infrarouge, la taille du faisceau au niveau du rotateur est de  $w_i = 0,5 \text{ mm}$ . La taille du faisceau dans la zone de mesure est de  $w = 6 \text{ mm}$ . La distance entre faisceaux est limitée par  $4 \leq d \leq 40 \text{ mm}$ , comme la focale  $F$  est de  $1 \text{ m}$ , l'angle de diffusion varie sur la plage  $4 \leq \theta \leq 40 \text{ mrad}$ . L'échelle de diffusion correspondante  $\lambda \sim \lambda_i / \theta$  varie dans l'intervalle  $0,25 \leq \lambda \leq 2,5 \text{ mm}$ .

Pour le montage visible, la lentille est plus petite. La taille au niveau du rotateur est de  $w_i = 0,3 \text{ mm}$ . La taille dans la zone de mesure est de  $w = 0,5 \text{ mm}$ . La distance  $d$  est limitée par  $4 \leq d \leq 20 \text{ mm}$ . La focale est aussi de  $1 \text{ m}$ :  $4 \leq \theta \leq 20 \text{ mrad}$ . La gamme d'échelles de diffusion correspondante est alors :  $26 < \lambda < 128 \mu\text{m}$ .

L'ensemble des 2 systèmes permet donc de couvrir un ensemble étendu d'échelles dans le milieu.

### Résolution transverse relative en nombre d'onde

Nous avons vu plus haut que la résolution transverse relative en nombre d'onde est fonction du rapport entre l'angle de divergence des faisceaux  $\theta_w = \frac{\lambda_i}{\pi w}$  et l'angle de diffusion  $\theta$  :

$$\frac{dk_t}{k} = \frac{\theta_w}{\sqrt{2}\theta}$$

Pour le montage infrarouge, la résolution relative transverse va de 1 % aux petites échelles de diffusion à 10% aux grandes échelles. Pour le montage en visible, la résolution en visible, elle va de 1,2 % à 6 %.

### Angle de diffusion minimum et maximum

Pour un faisceau gaussien, le diamètre utile des faisceaux est égal à 4 fois la taille du faisceau. En deçà de cette limite, le faisceau peut être déformé par diffraction. Les miroirs du translateur (et celui de l'OL) doivent donc avoir pour diamètre, au moins quatre fois la taille  $w_i$  des faisceaux OL et primaire à cet endroit avant la lentille.

L'angle de diffusion maximum accessible par ce montage est limité par l'écart maximum entre les faisceaux sur la lentille le diamètre de la lentille de focalisation et



par sa focale. Il dépend donc essentiellement du rayon de la lentille  $R_l$  et de sa focale.

$$\theta_{max} \sim (R_l - 2w_t) / F$$

Cet angle maximal peut être doublé si on choisit de décentrer le faisceau OL sur la lentille. Le contrôle de l'angle et de la direction de diffusion par le rotateur devient dans ce cas plus complexe.

Pour l'angle de diffusion minimum (qui permet d'atteindre les plus grandes longueurs d'onde), c'est la taille des faisceaux qui limite. La distance entre le faisceau primaire et l'OL est au moins de 4 fois leur taille :  $4w_t$ . L'angle minimum est alors :

$$\theta_{min} = 4w_t / F$$

Du fait de la configuration con-focale de la lentille, la taille des faisceaux au niveau du rotateur peut être remplacée par la taille des faisceaux dans la zone de mesure dans la zone de de mesure :

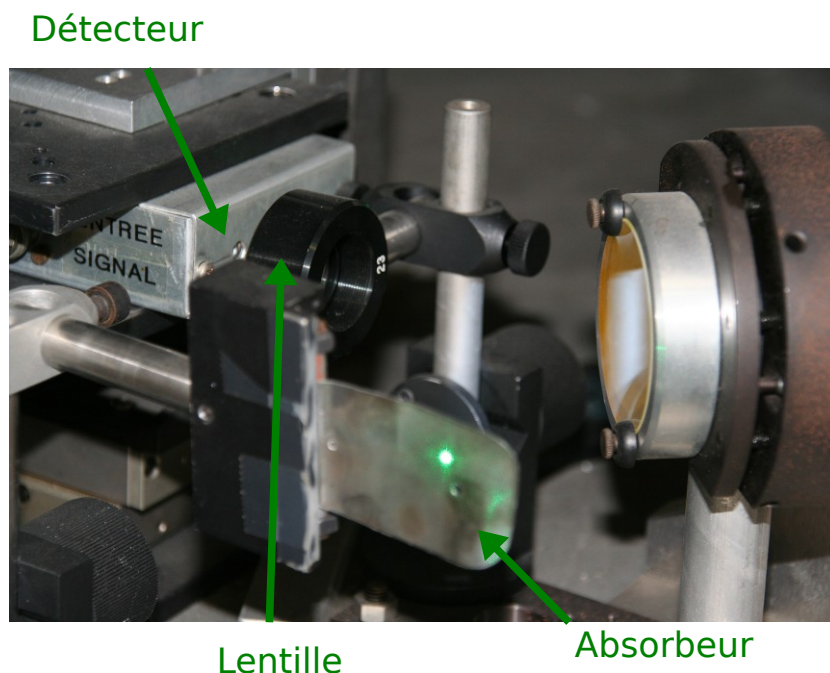
$$\theta_{min} = 4 \frac{\lambda_i}{\pi w}$$

L'angle minimum est alors directement fonction de  $\theta_w$ , l'angle de divergence des faisceaux dans la zone de mesure :

$$\theta_{min} = 4\theta_w$$

Cet angle minimum n'est en fait pas lié à la configuration avec la lentille de focalisation utilisée ici, mais est intrinsèque à la divergence naturelle du faisceau gaussien par diffraction : aucune autre configuration, ni aucune autre forme de faisceau ne permettrait de diminuer plus l'angle entre les faisceaux.

## 2.d Détecteur



Le détecteur est une diode photovoltaïque. Pour un fonctionnement optimale, la diode est polarisée. Elle ne supporte que des puissances photoniques  $P_d$  de l'ordre du milliwatt. Le diamètre  $a_d$  est de l'ordre de quelques centaines de microns. Leur bande passante est quelques centaines de mégahertz.

Pour l'infrarouge, la diode est en HgCdTe (Mercure-Cadmium-Tellure). Elle doit être refroidie à la température de l'azote liquide, pour ne pas être sensible à son propre rayonnement infrarouge.

Pour le visible, c'est une photo-diode PIN silicium ultra rapide, fonctionnant à température ambiante.

### Focalisation des faisceaux

Une lentille est placée en amont afin de pincer le faisceau oscillateur local sur la surface du détecteur. Pour que les conditions de la détection hétérodynes soient réunies, il est essentiel que la taille du faisceau Oscillateur Local soit plus petite que la surface sensible du détecteur. La distance entre la lentille et le détecteur correspond à la focale de la lentille  $F_d$ . Du fait que la diffusion se fait en champ lointain, cette lentille permet de traduire cette limite en ouverture angulaire ( $\theta_d$  est le demi-angle d'ouverture) :

$$\theta_d = \frac{a_d}{2F_d}$$

Le demi-angle de divergence des faisceaux gaussiens depuis le volume de mesure est (cf l'annexe sur les faisceaux gaussiens) :

$$\theta_w = \frac{\lambda}{\pi w}$$

Le demi-angle d'ouverture du détecteur doit alors être plus grand que le double de la divergence des faisceaux :  $\theta_d \geq 2\theta_w$ . Soit :

$$\frac{a_d}{F_d} \geq \frac{4\lambda}{\pi w}$$

### Limite en puissance et angle de diffusion limite

Comme par diffraction, une partie du faisceau primaire atteint le détecteur, l'angle de diffusion peut être limité par la puissance acceptable par le détecteur. Pour l'angle de diffusion  $\theta$ , la part de puissance du faisceau primaire reçue par le détecteur est :

$$P_d = P_i \iint_{-\theta_d}^{\theta_d} \frac{2}{\pi \theta_w^2} e^{-2[(\theta+\theta_x)^2 + \theta_y^2]/\theta_w^2} d\theta_x d\theta_y$$

Pour une source puissante ( $P_i$  de quelques dizaines de Watt), et une taille de faisceau assez grande dans la zone de mesure ( $w$  de quelques millimètres), cette puissance sur le détecteur peut dépasser le seuil de puissance permise sur le détecteur, pour des angles plus grands que la limite propre à la diffraction vue plus haut ( $\theta_{min} = 4\theta_w$ ).

### Bruit photonique

Pour le laser CO<sub>2</sub>, le détecteur est limité en puissance lumineuse recevable (de l'ordre du milliwatt) et en courant le traversant (de l'ordre du milliampère).

Typiquement, la puissance lumineuse propre à l'oscillateur local est de

$P_{ol}=0,2 mW$  . Pour un détecteur avec une efficacité quantique de  $\eta=0,6$  , cette puissance génère un courant continu de :

$$i_{lum} = \eta q_e^2 \frac{P_{lum}}{h \nu_i} = 1 mA$$

La variance de courant propre au bruit photonique,  $\sigma_{iol}^2$  , pour une bande passante de  $\Delta F = 500 MHz$  , est alors :

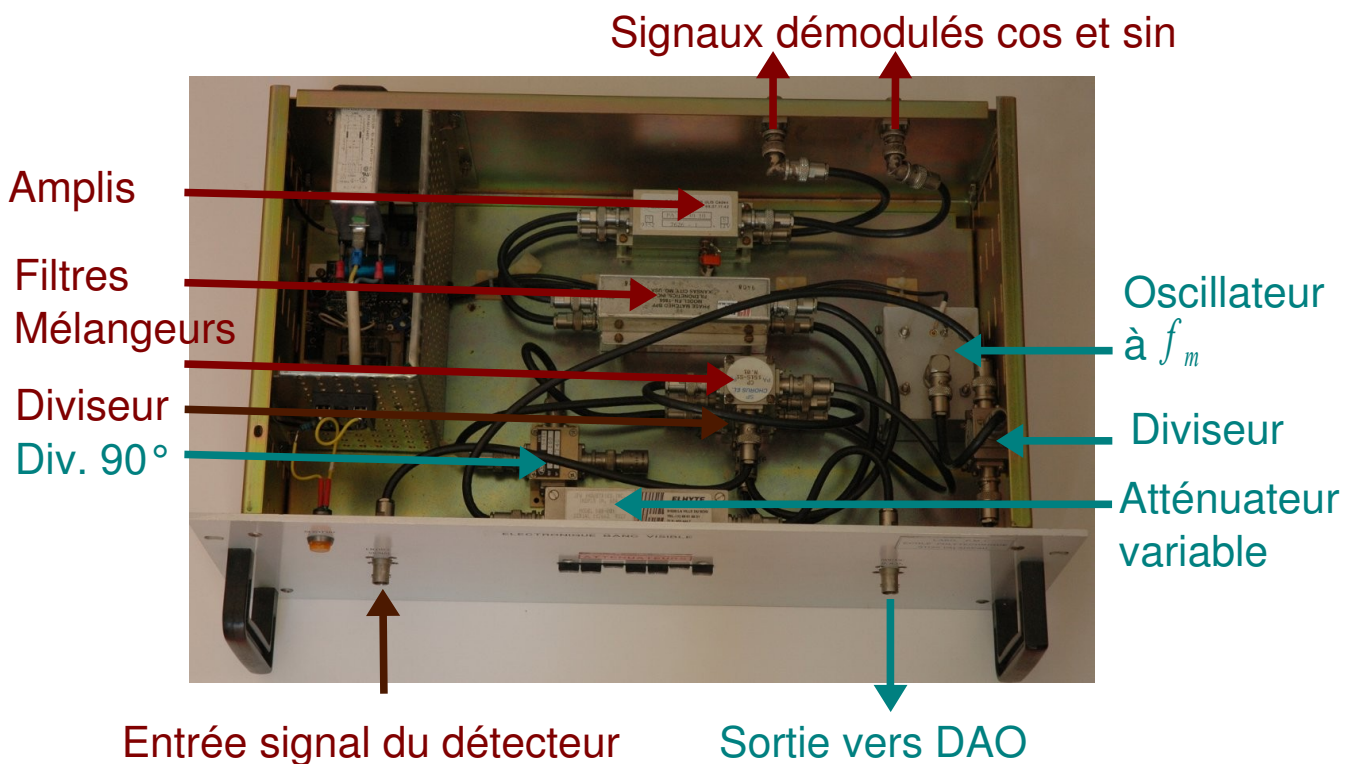
$$\sigma_{iol}^2 = \eta q_e^2 \frac{P_{ol}}{h \nu_i} \Delta F = 0,8 \cdot 10^{-2} \mu A^2$$

Ce bruit photonique est proche de la limite supérieure.

## 2.e Cohérence entre les 2 chemins optiques

Le signal de diffusion étant porté par l'interférence du faisceau OL et de la lumière diffusée par le faisceau primaire, il faut être attentif à la cohérence entre les 2 ondes. La différence de longueur des chemins optiques doit être inférieure à la longueur de cohérence du laser. Il faut aussi réduire au nombre minimum, les miroirs qui ne sont pas communs aux 2 chemins, car seuls ceux-là pourront introduire des signaux parasites, liés aux vibrations mécaniques.

## 5.3 Composants électroniques



## 3.a Quartz à la fréquence de modulation

Le modulateur acousto-optique nécessite une source très stable en fréquence. Pour cela, nous utilisons un oscillateur à quartz. Sa stabilité en fréquence est au moins de  $10^{-6}$  .

### 3.b Té de polarisation du détecteur

La photo-diode du détecteur doit être polarisée de +100 mV pour la diode HgCdTe, et de +12 V pour la diode PIN. Le détecteur est connecté à un Té de polarisation qui sépare les parties continue et alternative du signal. La partie continue est connectée à un polarisateur.

Le polarisateur est équipé d'un système de conversion courant-tension, à base d'ampli opérationnel. Ce schéma permet aussi de limiter le courant traversant le détecteur. La partie continue du signal correspond à la puissance du faisceau OL.

### 3.c Pré-amplificateur faible bruit

La partie fluctuante du courant, correspondant au courant de battement, est très faible. ce signal est alors amplifié par un premier amplificateur, à proximité du détecteur pour limiter les parasites extérieurs potentiels. Ce pré-ampli doit être à faible bruit, de manière à limiter le bruit thermique de l'amplificateur, par rapport au bruit photonique, qui sert de référence.

La variance de courant due au bruit thermique propre d'un amplificateur de facteur de bruit  $F_n$  de 2 dB, à la température ordinaire  $T_0 = 293 K$ , avant amplification, et pour une bande passante  $\Delta F = 500 MHz$  est :

$$\langle i_{therm}^2 \rangle = \frac{4kT_0(F_n - 1)\Delta F}{R_{50}} = 0,9 \cdot 10^{-2} \mu A^2$$

Pour le laser CO<sub>2</sub>, cette variance est inférieure, mais reste du même ordre que le bruit photonique optimisé du détecteur vu plus haut. Pour une évaluation correcte du rapport signal sur bruit photonique, le rapport signal sur bruit mesuré devra être corrigé du bruit thermique de l'ampli.

### 3.d Démodulateur IQ, amplification et filtrage

Le signal en sortie de détecteur peut être directement observé par un analyseur de spectre.

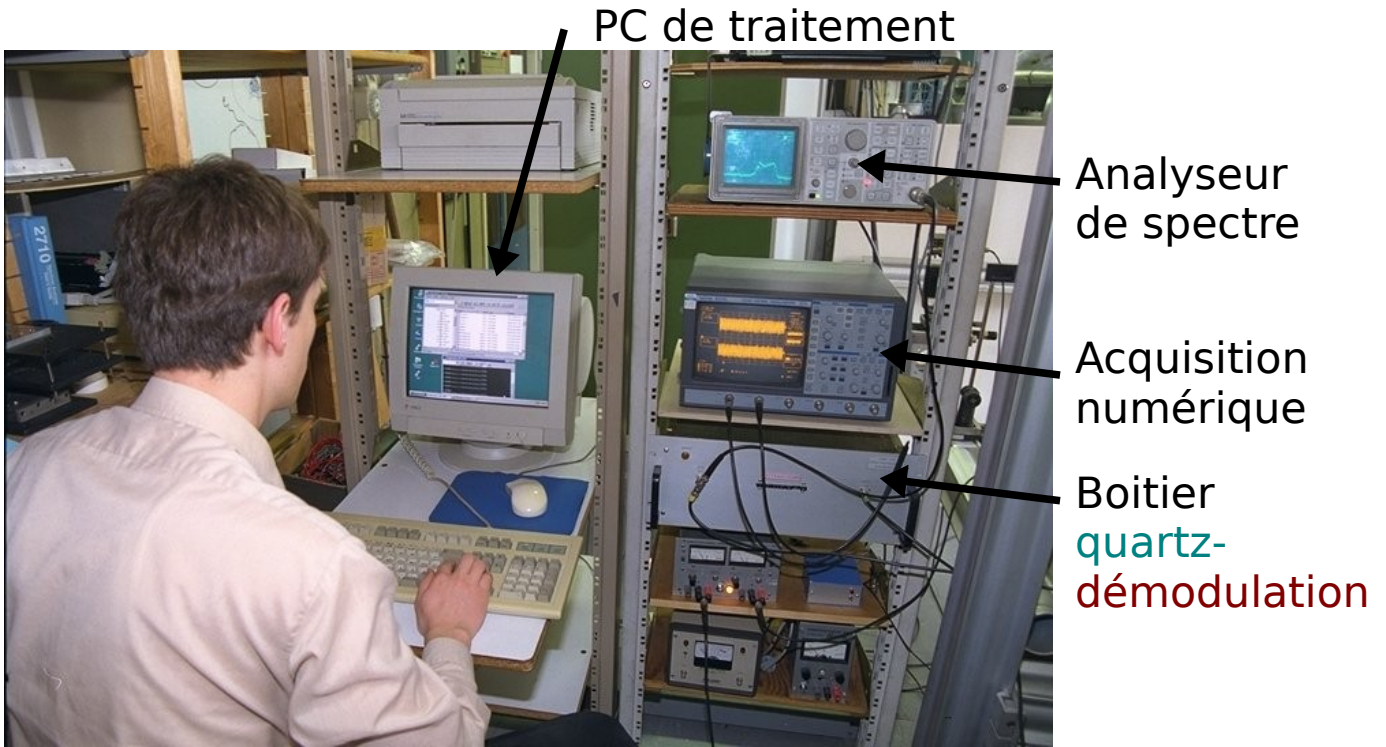
Si nous voulons numériser le signal pour des traitements numériques plus évolués, il est préférable de le démoduler comme vu précédemment. Cette démodulation IQ permet d'utiliser une fréquence de numérisation plus basse, sans perte d'information sur le signal puisque la fréquence maximum du signal est plus basse. Numériser le signal modulé nécessiterait une fréquence d'échantillonnage très grande.

Le schéma de démodulation IQ est réalisé avec des diviseurs de puissance, en phase (pour le signal du détecteur) et en quadrature de phase (ou hybride, pour le signal à la fréquence de modulation). Les signaux en sorties sont envoyés vers des mélangeurs, pour en obtenir le produit des signaux.

Chacun des 2 signaux est ensuite filtré pour éliminer le produit au double de la fréquence de modulation. Il est aussi amplifié pour atteindre un niveau de signal suffisant pour être numérisé avec la meilleure résolution possible. Le facteur de bruit de ces amplis est moins primordial que celui du pré-ampli, en début de chaîne.

## 5.4 Instrumentation





A. Kharchenko

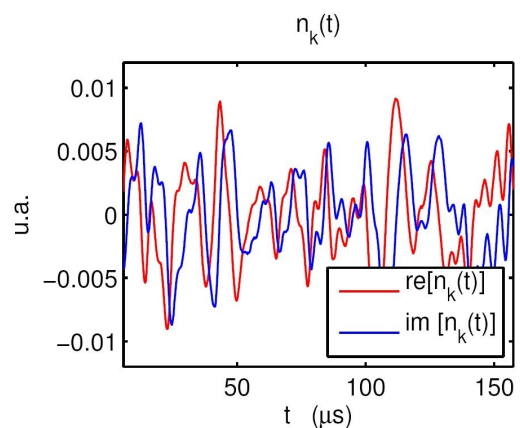
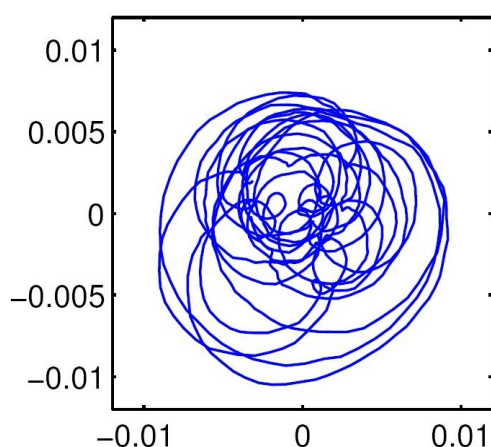
## 4.a Analyseur de spectre

L'analyseur de spectre sert de moniteur en temps réel du spectre du signal de diffusion collective.

## 4.b Acquisition numérique

L'acquisition numérique des signaux de diffusion collective permet, au delà du calcul du spectre, ou d'autres formes de traitement numérique.

## 5.5 Signal typique de diffusion collective



Un signal complexe typique de diffusion  $s(\vec{k}, t)$  sur un gaz turbulent est montré sur la figure ci-dessus.

Le cadre de gauche montre les courbes des parties réelle et imaginaire en fonction du temps. Ils apparaissent aléatoires. Leurs valeurs fluctuent autour de 0. La variance des 2 signaux est comparable. On devine un déphasage. La période des

oscillations est de l'ordre de  $10\mu s$  . La fréquence moyenne est alors de l'ordre de  $100kHz$

La figure de droite montre le même signal dans le plan de phase (partie réelle en abscisse, imaginaire en ordonnée). Nous voyons que les parties réelle et imaginaire sont bien en quadrature de phase, et que le signal peut être vu comme une rotation de phase, avec des fortes variations de module.

Nous avons vu dans l'introduction que cette rotation de phase peut être la signature d'une vitesse moyenne de convection sur le volume de diffusion. Nous tenterons, dans la partie suivante, d'extraire de ce signal des informations plus détaillées sur l'écoulement.

# 6 Diffusion collective et turbulence de l'air

Nous avons vu dans les parties précédentes, le principe de la mesure, et son application pratique. Nous allons voir dans cette partie quelles informations sur l'écoulement, nous pouvons extraire du signal.

Dans un premier temps, nous voyons les propriétés « statiques » de l'écoulement que nous pouvons déduire en prenant, littéralement, une photo de l'écoulement.

Dans un second temps, nous allons voir les propriétés dynamiques de l'écoulement portées par le signal de diffusion collective.

## 6.1 Facteur de forme et loi de Kolmogorov

Suivant le principe de la diffusion, nous avons vu que l'amplitude du signal diffusé est lié au niveau de fluctuations à l'échelle observée. Nous allons voir qu'elle peut être reliée à la cascade de Kolmogorov dans un fluide turbulent.

### 1.a Facteur de forme

L'amplitude du signal est caractérisée par le facteur de forme.

#### Facteur de forme d'un solide

La notion de facteur de forme est définie pour la diffusion appliquée au solide cristallin. La facteur de forme est le signal de diffusion lui-même, indépendant du temps pour un solide :

$$F(\vec{k}) = \sum_j e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_j} = s(\vec{k})$$

#### Facteur de forme statique d'un fluide

Pour un fluide turbulent, la notion doit être adaptée, puisque le signal de diffusion dépend du temps. Sa moyenne temporelle est nulle, car, comme nous l'avons vu sur le signal typique, sa phase est aléatoire. Nous allons définir le facteur de forme à partir de la variance du signal :

$$S(\vec{k}) = \frac{1}{\langle n \rangle_V V_s} \langle |s(\vec{k}, t)|^2 \rangle_T \quad (6.1)$$

La notion reste une notion statique : La moyenne temporelle équivaut à une moyenne statistique (par l'hypothèse ergodique). Le facteur de forme n'est pas lié à la dynamique temporelle du signal : c'est, comme on va le voir, littéralement une photo de l'écoulement.

Par la formule de Parseval, le facteur de forme est l'intégrale du spectre fréquentiel du signal de diffusion :

$$S(\vec{k}) = \int S(\vec{k}, \omega) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (6.2)$$

#### Gaz incohérent

Nous avons vu précédemment que pour un gaz incohérent, la variance du signal de diffusion était égale au nombre de diffuseurs :

$$\langle |s(\vec{k}, t)|^2 \rangle_t = N_s = \langle n \rangle_V V_s$$

Ceci implique que le facteur de forme est indépendant de l'échelle :

$$S(\vec{k}) = 1$$

## Structures cohérentes

Pour un gaz turbulent, des structures apparaissent. La somme des termes croisés n'est plus négligeable, et devient même dominante :

$$S(\vec{k}) \geq 1$$

Aux échelles plus petites que l'échelle de dissipation, les fluctuations restent limitées aux fluctuations incohérentes :

$$k \geq k_{dissipation} \quad S(\vec{k}) = 1$$

### Facteur de forme et taux de fluctuation

Le facteur de forme ne renseigne sur les fluctuations de densité que pour un vecteur d'onde déterminé. Pour pouvoir établir un taux de fluctuations, il faudrait connaître le facteur de forme pour tous les vecteurs d'onde de diffusion de l'espace réciproque.

La relation entre le taux de fluctuations et le facteur est obtenu par application de la formule de Parseval dans le domaine spatial :

$$\langle n(\vec{r}, t)^2 \rangle_{V,T} = n_0 \int S(\vec{k}) \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}$$

### Facteur de forme : grandeur intensive

Le facteur de forme est-il une grandeur intensive ou extensive?

Supposons que l'ensemble des diffuseurs se séparent en 2 sous-ensembles statistiquement indépendants de diffuseurs  $N_{s1}$  et  $N_{s2}$ , pour lesquels les signaux de diffusion sont  $s_1(\vec{k}, t)$  et  $s_2(\vec{k}, t)$ . Du fait de l'indépendance statistique entre les sous-ensembles :

$$\langle s_1^*(\vec{k}, t) s_2(\vec{k}, t) \rangle_t = 0$$

La variance du signal global de diffusion est la somme des variances :

$$\langle |s(\vec{k}, t)|^2 \rangle_t = \langle |s_1(\vec{k}, t) + s_2(\vec{k}, t)|^2 \rangle_t = \langle |s_1(\vec{k}, t)|^2 \rangle_t + \langle |s_2(\vec{k}, t)|^2 \rangle_t$$

Le facteur de forme est alors des facteurs de forme sur les sous-ensembles :

$$S(\vec{k}) = \frac{\langle |s_1(\vec{k}, t)|^2 \rangle_t + \langle |s_2(\vec{k}, t)|^2 \rangle_t}{N_{s1} + N_{s2}} = \frac{N_{s1} S_1(\vec{k}) + N_{s2} S_2(\vec{k})}{N_{s1} + N_{s2}}$$

Comme le facteur de forme est une moyenne sur les ensembles non corrélés, c'est une grandeur intensive.

Le facteur de forme donne une évaluation de l'intensité moyenne des structures cohérentes de l'écoulement, à l'échelle de diffusion.

Dans le chapitre sur la diffusion collective appliquée à la turbulence de l'air, nous relierons la variance du signal de diffusion à la cascade de Kolmogorov.

## 1.b Facteur de forme et cascade de Kolmogorov

Le modèle de la cascade de Kolmogorov permet d'établir une loi pour la variation du facteur de forme avec l'échelle, à condition de considérer la densité comme un scalaire passif de la turbulence. Une description simple est donnée dans le manuel de M. Lesieur [Lesieur1994].

### Cascade de Kolmogorov

Kolmogorov a proposé en 1941 un modèle décrivant la turbulence par une cascade de l'énergie à travers les échelles (cf. U. Frisch [Frisch1995]). L'énergie de



la turbulence est injectée aux grandes échelles. Elle est issue de gradients de vitesse qui induisent la formation de grands tourbillons. Si le produit de la taille par la vitesse typique de ces tourbillons est grande par rapport à la viscosité cinématique, la dissipation sera faible, comparée aux forces inertielles du milieu : c'est ce que caractérise le nombre de Reynolds :

$$R_e = UL/\nu$$

Les tourbillons vont alors être transformés en tourbillons de taille plus petite. Ce phénomène se prolongera jusqu'à atteindre des tailles et vitesses de tourbillons suffisamment petites pour que la dissipation domine les termes d'inertie. À ces échelles, l'énergie sera donc dissipée en chaleur. La gamme d'échelles intermédiaire entre l'échelle de production et l'échelle de dissipation de l'énergie est la gamme inertielle.

Nous introduisons  $\epsilon_r$ , le taux de transfert de l'énergie cinétique de l'échelle  $r$  vers les échelles plus petites. Ce taux de transfert de l'énergie ne dépend que de l'échelle  $r$  et de la vitesse caractéristique de l'écoulement à cette échelle,  $u_r$ . Par analyse dimensionnelle, nous obtenons alors :

$$\epsilon_r \propto u_r^3 r^{-1}$$

Il peut être décomposé en produit de l'énergie cinétique (par unité de masse) à l'échelle  $r$ ,  $E_r \propto u_r^2$ , par un temps correspondant au temps de retournement des tourbillons à cette même échelle  $\tau_r \propto u_r r^{-1}$ .

Kolmogorov pose l'hypothèse que  $\epsilon_r$  est en fait indépendante de l'échelle  $r$  :  $\epsilon$ . Si le flux était différent à des échelles différentes, l'énergie moyenne dans les échelles intermédiaires ne serait pas stationnaire.  $\epsilon$  peut alors être évalué à partir des paramètres de l'échelle de production :

$$\epsilon \propto U^3 L^{-1}$$

Nous pouvons alors en déduire la vitesse à chaque échelle :

$$u_r \propto \epsilon^{1/3} r^{1/3}$$

L'autre hypothèse déterminante est de supposer que la densité d'énergie  $E_k(k)$  n'est fonction que de  $\epsilon$  et  $k$  ( $k = 2\pi/r$ ). L'analyse dimensionnelle impose alors la loi d'échelle de l'énergie :

$$E_k(k) \propto \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (6.3)$$

### Échelle de Kolmogorov

À chaque échelle, nous associons un nombre de Reynolds :

$$R_{er} = u_r r / \nu = \epsilon^{1/3} r^{4/3} / \nu$$

Ce nombre de Reynolds diminue vers les petites échelles. Quand il atteint la valeur 1, la dissipation devient du même ordre que les forces d'inerties : c'est l'échelle de Kolmogorov  $l_d$ . En résolvant sur  $r$ ,  $R_{er} = 1$ , nous trouvons alors :

$$l_d = \nu^{3/4} \epsilon^{-1/4} = R_e^{-3/4} L$$

### Contaminant passif

Corrsin en 1951 a prolongé cette description pour un contaminant scalaire passif de l'écoulement.

Le contaminant passif est caractérisé par sa diffusivité  $D_\theta$ . Le taux de dissipation propre au scalaire est fonction des gradients spatiaux :  $\chi_\theta = 6 D_\theta \langle (\partial_x \theta)^2 \rangle$ .

Corrsin a établi que le spectre du scalaire est donné par :

$$F_k(k) \propto \chi_\theta \epsilon^{-1/3} k^{-5/3} \quad (6.4)$$

Cette description est usuellement appliquée à la température. Nous allons l'appliquer aussi à la densité, bien qu'elle soit encore plus directement liée à la dynamique par les équations de Navier Stokes.

### Loi de Kolmogorov pour le facteur de forme

La diffusion collective permet d'avoir directement accès au facteur de forme, qui est fonction de la transformée de Fourier spatiale de la densité  $S(\vec{k})$ . À la différence des spectres considérés ci-dessus, cette transformée de Fourier s'applique au vecteur  $\vec{r}$  et non simplement à l'échelle (scalaire)  $r$ .

Pour passer de l'un à l'autre, il faut poser l'hypothèse que la turbulence est en moyenne isotrope à l'échelle considérée : même si l'écoulement présente des anisotropies à l'échelle de production, le transfert à travers les échelles induit une perte de mémoire sur la direction initiale. Pour des échelles notablement plus petites que l'échelle de production, la turbulence est isotrope. Le spectre en échelle se déduit du spectre spatial en intégrant tous les vecteurs d'onde de même module, dans toutes les directions angulaires  $\theta, \phi$  d'une sphère.

$$S(k) = \int_0^{2\pi} k d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} k d\theta S(k, \theta, \phi) = 4\pi k^2 S(\vec{k})$$

Ce passage du vectoriel au scalaire fait apparaître un facteur  $k^2$ .

Nous pouvons alors appliquer la loi de Kolmogorov au facteur de forme du signal de diffusion collective :

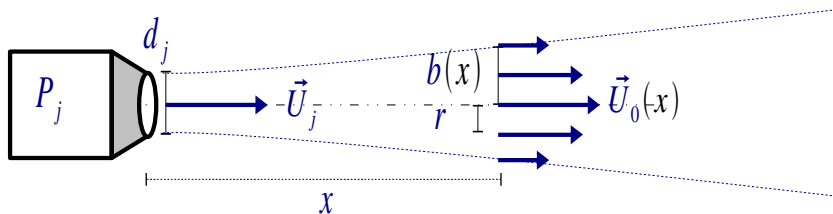
$$S(\vec{k}) \propto \chi \epsilon^{-1/3} k^{-11/3} \quad (6.5)$$

## 1.c Application à un jet d'air turbulent

Pour vérifier cette dépendance sur l'échelle, la diffusion collective a été appliquée à l'observation d'un jet d'air turbulent.

### Jet d'air turbulent à symétrie axiale

Une description très détaillée du jet d'air turbulent est donnée par G.N. Abramovich [Abramovich 1963]. Nous donnons ici quelques propriétés phénoménologiques.



Un jet turbulent est obtenu par expulsion d'un air sous pression  $P_j$  à travers une buse circulaire, dans un volume d'air au repos. Il est caractérisé par  $U_j$ , la vitesse

de l'air éjecté par la buse, et par  $d_j$ , le diamètre de la buse.

Si la vitesse est suffisante, il se forme un jet d'air turbulent en aval sur l'axe de symétrie. Le jet d'air prend une forme de cône d'environ  $10^\circ$  d'ouverture. Le jet ne s'ouvre pas directement en sortie de la buse, mais à une distance  $x_0$ .  $x_0$  est expérimentalement évalué à  $x_0 = 6d_j$ .

À une distance  $x$  en aval de la buse, la vitesse moyenne de l'écoulement sur l'axe est  $U_0(x)$ . Cette vitesse décroît comme l'inverse de la distance  $x$  :

$$U_0(x) = 5,9 \frac{d_j}{x - x_0} U_j$$

Dans un plan perpendiculaire à l'axe du jet, la vitesse  $U(x, r)$  décroît quand on s'écarte de l'axe d'un rayon  $r$ . Le rayon caractéristique  $b(x)$  du jet à cette distance  $x$  est déterminé par le rayon pour lequel la vitesse a diminué de moitié ( $U(x, b(x)) = \frac{U_0(x)}{2}$ ).

Le rayon  $b(x)$  décrit la forme conique du jet : il croît de manière affine avec la distance  $x$ .

$$b(x) = 0,08(x - x_0)$$

Au delà d'une certaine distance, l'écoulement est autosimilaire : les profils transverses à l'axe, de la vitesse, à différentes distances de la buse, se déduisent les uns des autres par homothétie. Dans le manuel de J. O. Hinze, une description de ces profils est donnée [Hinze1975].

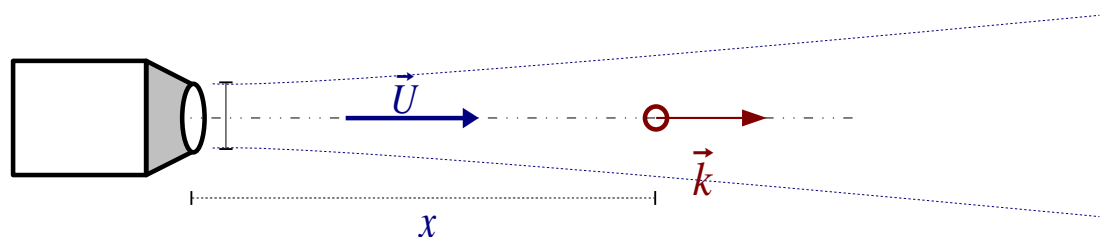
Le nombre de Reynolds est estimé pour chaque distance  $x$  à la buse :

$$R_e(x) = \frac{U_0(x)b(x)}{\nu} = 0,5 \frac{d_j U_j}{\nu}$$

Le nombre de Reynolds reste donc constant le long de l'axe du jet.

### Observation du jet d'air par diffusion collective

Le volume de diffusion a été placé en aval sur l'axe du jet d'air turbulent. La turbulence développée en aval de la buse a été observée avec les montages laser visible [Kharchenko2001] et infrarouge [Honoré2000].



Dans les 2 cas, le diamètre de la buse  $d_j$  est de  $1\text{ mm}$ . Pour l'observation en infrarouge, la pression d'air  $P_j$  a été de  $3,7\text{ bar}$ , la distance à la buse  $x$  est de  $30\text{ mm}$ . Pour celle en visible, la pression est de  $4\text{ bar}$ . la distance à la buse était de  $10\text{ mm}$ .

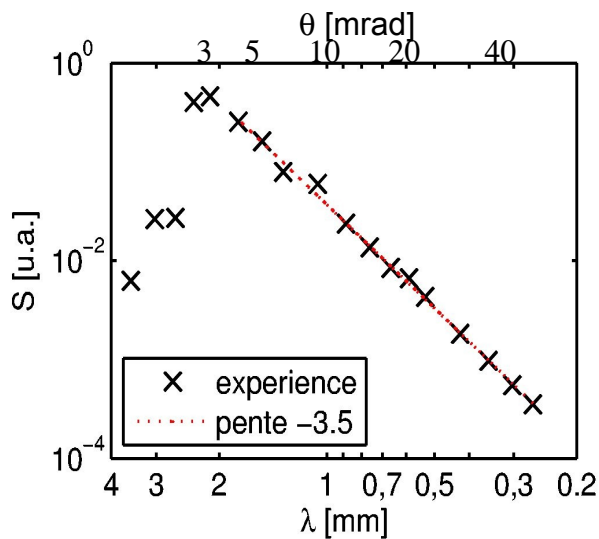
Nous considérons usuellement que, pour un jet d'air à symétrie axiale, la turbulence est développée à la distance de 30 fois le diamètre de la buse. La condition n'a pas été respectée en visible, afin de s'assurer d'un meilleur niveau de signal. Nous verrons que cette condition n'est finalement pas indispensable à l'observation de la loi de Kolmogorov.

### Observation en infrarouge

Le montage en infrarouge permet l'observation des échelles proches de l'échelle de production. La loi d'échelle du facteur de forme est ici donnée en fonction de la longueur d'onde de diffusion. Les résultats sont montrés en échelle logarithmique en abscisse et en ordonnées.

Pour les échelles plus petites que  $2\text{ mm}$ , nous observons une loi d'échelle avec une pente  $-3,5$ , proche des  $-11/3$  prévue.

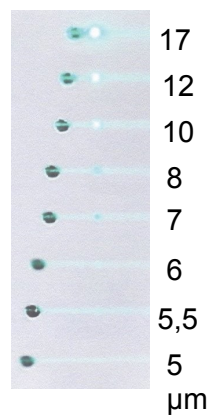
Pour les échelles plus grandes que  $2\text{ mm}$ , le facteur de forme décroît aussi, rapidement. Les plus grandes structures présentes dans la turbulence ont alors pour taille  $2\text{ mm}$ .



### Observation en lumière visible.

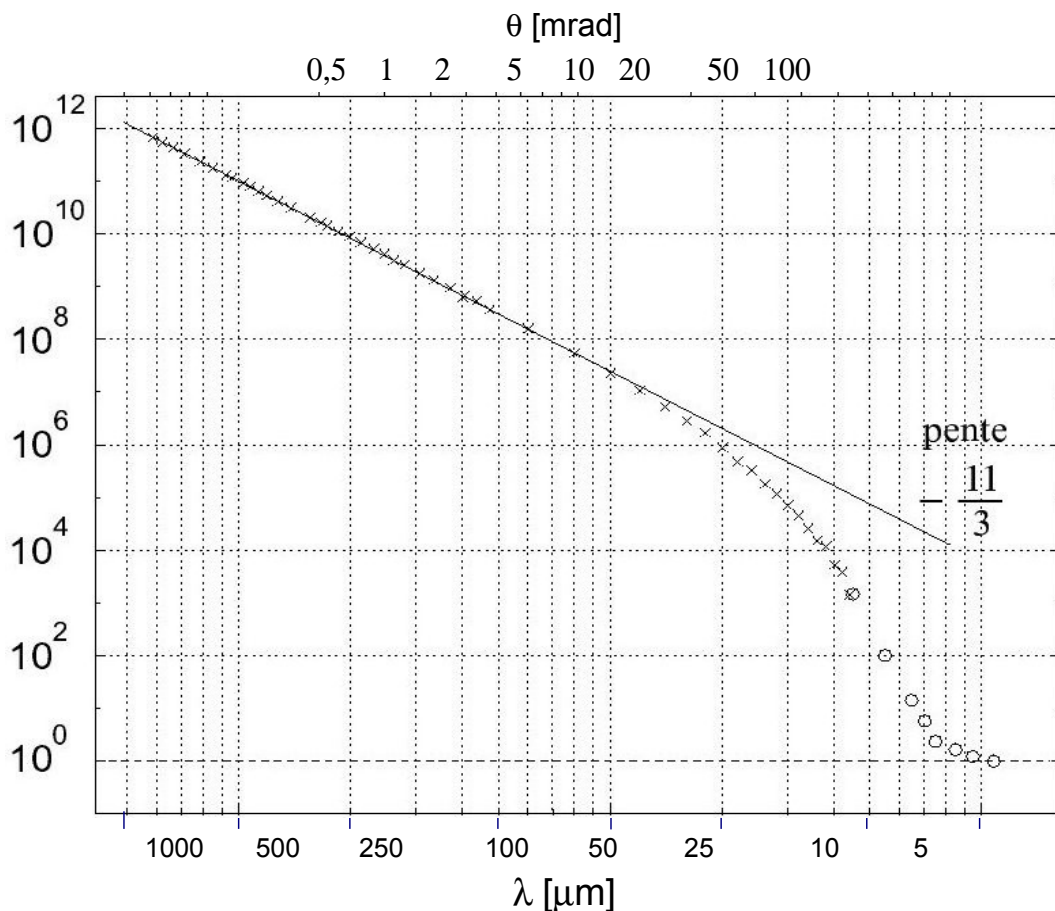
Le montage en visible permet l'observation des petites échelles, proches de l'échelle de dissipation. Afin de pouvoir couvrir une large gamme d'échelles, 2 types de réception différentes :

- soit la photo-diode PIN évoquée dans le montage (pour les petits angles, grandes échelles). Une détection synchrone a été utilisée pour améliorer le rapport signal sur bruit,
- soit l'appareil photo (pour les angles plus grands petites échelles).



la série de photos ci-dessus montre les variations de lumière diffusée avec l'angle de diffusion.

La figure ci-dessous montre donc les variations du facteur de forme (en unité absolue) avec la longueur d'onde. Nous retrouvons la loi d'échelle en  $-11/3$  sur la gamme d'échelle intermédiaire. À l'approche de l'échelle de dissipation, la décroissance est plus rapide pour s'infléchir et rejoindre la valeur 1.



### 1.d Loi de Kolmogorov et limites de l'angle de diffusion

Nous avons vu dans la partie précédente que le rapport signal sur bruit du courant de battement du détecteur était proportionnel au spectre des fluctuations de densité  $S_n(\vec{k}, \omega_m - \omega)$ , et inversement proportionnel à  $\lambda_i$ , la longueur d'onde du laser.

$$I_b(\omega)/I_n = \frac{\pi l_{turb} \langle n \rangle_{v_{turb}} \alpha^2 \eta_H^2 \eta}{h c N^3 \lambda_i w^2} \cos^2 \theta_{pol} P_i S(\vec{k}, \omega_m - \omega)$$

On rappelle que le facteur de forme est l'intégrale du spectre :

$$\int S(\vec{k}, \omega) \frac{d\omega}{2\pi} = S(\vec{k})$$

Nous avons vu que pour un gaz incohérent, le rapport signal sur bruit était très faible : pour obtenir un bon rapport signal sur bruit, il faut donc optimiser les paramètres. On choisira donc une source dont la longueur d'onde  $\lambda_i$  est plus courte. Mais il faut surtout un facteur de forme  $S(\vec{k})$  assez grand : l'échelle observée  $\lambda$  doit être la plus grande possible. Comme  $\lambda = \lambda_i / \theta$ , l'angle de

diffusion doit être le plus petit possible : La diffusion collective dans l'air doit se faire en diffusion vers l'avant.

## 6.2 Modes convectés

Afin de pouvoir extraire des propriétés sur la dynamique de l'écoulement, nous allons étudier la corrélation temporelle du signal de diffusion collective.

### 2.a Structures cohérentes indépendantes

Le volume de diffusion étant assez grand, l'écoulement n'a pas un comportement uniforme sur tout le volume. L'écoulement va être décrit comme une somme de structures cohérentes et non corrélées entre elles. Chaque structure cohérente apparaît à un instant différent. Chacune a une intensité et une vitesse de convection différente.

#### Processus de Poisson

Nous supposons que le signal de diffusion est la somme d'une série  $n=1, \dots, N$  de structures cohérentes à l'échelle de la longueur de diffusion. Elles apparaissent au cours du temps, suivant un processus de Poisson d'intensité  $\gamma$ . Les temps d'apparition sont distincts :  $t_1, \dots, t_N$ . Dans un tel processus, les intervalles entre chaque temps d'apparition sont statistiquement indépendants les uns des autres. L'intensité  $\gamma$  du processus correspond à la fréquence d'apparition de ces structures.

#### Amplitude de la structure au cours du temps

Quel signal de diffusion va générer chaque structure ?

les structures cohérentes ont une durée de vie finie  $\tau_k$ , qui sera la même pour toutes les structures à une même échelle. Ce temps de vie est supposé significativement plus court que le temps de vol des structures à travers le volume de diffusion. Nous appliquerons une enveloppe temporelle gaussienne à l'amplitude du signal diffusé par cette structure :

$$|s_n(\vec{k}, t)| = \frac{\rho_n}{\pi^{1/4}} e^{-(t-t_n)^2/2\tau_k^2}$$

La normalisation est choisie de manière à ce que la variance du signal intégré dans le temps donne :  $\int |s_n(\vec{k}, t)|^2 dt = \rho_n^2 \tau_k$ .

Les intensités du signal de diffusion propre à chaque structure,  $\rho_1 \dots \rho_N$ , sont des variables aléatoires équidistribuées, à variance finie, et indépendantes entre elles. La variabilité de l'intensité de ces structures inclut le fait que suivant la position où apparaît la structure dans le volume de diffusion, le profil du volume,  $u(\vec{r})$ , prend



une valeur aléatoire.

### Vitesse de convection des structures

Ces structures cohérentes sont convectées par le mouvement aux échelles plus grandes que l'échelle de diffusion. Ces vitesses de convection  $\vec{U}_1 \dots \vec{U}_N$  sont supposées constantes sur leur durée de vie. Ces vitesses sont aussi des variables aléatoires equidistribuées, à variance finie et indépendantes entre elles.

La phase du signal de diffusion s'écrit alors comme une phase tournante :  

$$e^{-i\vec{k} \cdot \vec{U}_n t}$$

Le signal de diffusion propre à chaque structure cohérente s'écrira :

$$s_n(\vec{k}, t) = \frac{\rho_n}{\pi^{1/4}} e^{-(t-t_n)^2/2\tau_k^2} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{U}_n t}$$

### Indépendance entre intensité et vitesse de la structure

Nous supposons pour finir que les vitesses de convection, intensités et temps d'apparition de ces structures cohérentes sont tous indépendants entre eux : les structures d'intensité différentes, ont les mêmes distributions de vitesses de convection.

Du fait de l'indépendance entre les vitesses de convection, les signaux de diffusion pour 2 structures distinctes sont décorrélés. Pour  $m \neq n$  :

$$\langle s_n(\vec{k}, t) s_m(\vec{k}, t) \rangle = \left\langle \frac{\rho_n}{\pi^{1/4}} e^{-(t-t_n)^2/2\tau_k^2} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{U}_n t} \frac{\rho_m}{\pi^{1/4}} e^{-(t-t_m)^2/2\tau_k^2} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{U}_m t} \right\rangle = 0$$

Le signal global de diffusion est la somme des signaux de chaque structure cohérente (la partie incohérente du signal est négligée) :

$$s(\vec{k}, t) = \sum_{n=1}^N \frac{\rho_n}{\pi^{1/4}} e^{-(t-t_n)^2/2\tau_k^2} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{U}_n t}$$

## 2.b Autocorrélation du signal

L'autocorrélation du signal peut s'écrire :

$$C(\vec{k}, \tau) = \frac{1}{\langle n \rangle_V V} \langle s^*(\vec{k}, t - \frac{\tau}{2}) s(\vec{k}, t + \frac{\tau}{2}) \rangle_t$$

On développe les sommes sur les structures cohérentes :

$$C(\vec{k}, \tau) = \frac{1}{\langle n \rangle_V V} \left\langle \sum_n \frac{\rho_n}{\pi^{1/4}} e^{-(t - \frac{\tau}{2} - t_n)^2/2\tau_k^2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{U}_n(t - \frac{\tau}{2})} \sum_m \frac{\rho_m}{\pi^{1/4}} e^{-(t + \frac{\tau}{2} - t_m)^2/2\tau_k^2} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{U}_m(t + \frac{\tau}{2})} \right\rangle$$

Comme les signaux propres à chaque structure sont indépendants, on peut remplacer la moyenne de la somme par la somme des moyennes, et éliminer les termes croisés ( $m \neq n$ ) :

$$C(\vec{k}, \tau) = \frac{1}{\langle n \rangle_V V} \sum_n \left\langle \frac{\rho_n^2}{\sqrt{\pi}} e^{-[(t - t_n - \frac{\tau}{2})^2 + (t - t_n + \frac{\tau}{2})^2]/2\tau_k^2} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{U}_n \tau} \right\rangle$$

L'expression de l'exponentielle réelle se simplifie. Comme les valeurs aléatoires sont indépendantes, la moyenne du produit peut être remplacé par le produit des moyennes :

$$C(\vec{k}, \tau) = \frac{1}{\langle n \rangle_V V} e^{-\tau^2/4\tau_k^2} \sum_n \left\langle \frac{\rho_n^2}{\sqrt{\pi}} e^{-(t-t_n)^2/\tau_k^2} \right\rangle \langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{U}_n \tau} \rangle$$



Les vitesses de convection  $\vec{U}_1 \dots \vec{U}_N$  sont equidistribuées : le dernier facteur est commun à chaque terme de la sommation. Nous noterons  $\vec{U}$  cette vitesse de convection aléatoire :

$$C(\vec{k}, \tau) = \frac{1}{\langle n \rangle_V V} e^{-\tau^2/4\tau_k^2} \langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{U} \tau} \rangle \sum_n \langle \frac{\rho_n^2}{\sqrt{\pi}} e^{-(t-t_n)^2/\tau_k^2} \rangle$$

Le dernier facteur se simplifie en moyennant sur la gaussienne et la fréquence  $\gamma$  d'apparition des structures :

$$C(\vec{k}, \tau) = \frac{\gamma \tau_k \langle \rho_n^2 \rangle}{\langle n \rangle_V V} e^{-\tau^2/4\tau_k^2} \langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{U} \tau} \rangle$$

La normalisation de la fonction de corrélation est en fait le facteur de forme :

$$S(\vec{k}) = \frac{1}{\langle n \rangle_V V} \langle |s(\vec{k}, t)|^2 \rangle_t = C(\vec{k}, 0) = \frac{\gamma \tau_k \langle \rho_n^2 \rangle}{\langle n \rangle_V V}$$

L'autocorrélation du signal s'exprime alors :

$$C(\vec{k}, \tau) = S(\vec{k}) e^{-\tau^2/4\tau_k^2} \langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{U} \tau} \rangle \quad (6.6)$$

Le dernier facteur  $\langle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{U} \tau} \rangle$  est la fonction caractéristique du déplacement (aléatoire)  $\vec{U} \tau$  d'une structure cohérente pendant le délai  $\tau$ .

Le facteur précédent,  $e^{-\tau^2/4\tau_k^2}$ , est lié à la durée de vie finie des structures cohérentes.

### Distribution de probabilité de la composante de la vitesse suivant le vecteur d'onde

Le signal de diffusion ne dépend que de la composante de la vitesse suivant le vecteur d'onde, et non des autres directions :

$$U_{\vec{k}} = \frac{1}{k} \vec{k} \cdot \vec{U}_{\vec{k}}$$

$$C(\vec{k}, \tau) = S(\vec{k}) e^{-\tau^2/4\tau_k^2} \langle e^{-ik U_{\vec{k}} \tau} \rangle$$

La moyenne d'une fonction d'une variable aléatoire s'exprime directement avec la distribution de probabilité de cette variable aléatoire :

$$\langle F(x) \rangle = \int dx' P_x(x') F(x')$$

La corrélation se réécrit en fonction de  $P_{U_{\vec{k}}}$ , la distribution de probabilité de la composante de la vitesse suivant  $\vec{k}$  :

$$C(\vec{k}, \tau) = S(\vec{k}) e^{-\tau^2/4\tau_k^2} \int du P_{U_{\vec{k}}}(u) e^{-iku\tau}$$

### Spectre du signal de diffusion

Le spectre fréquentiel est déduit de l'autocorrélation par transformée de Fourier temporelle :

$$S(\vec{k}, f) = S(\vec{k}) \int d\tau e^{-\tau^2/4\tau_k^2} \int du P_{U_{\vec{k}}}(u) e^{i(2\pi f - ku)\tau}$$

Les 2 intégrations peuvent être réarrangées. L'intégration sur le délai  $\tau$  est alors possible :

$$S(\vec{k}, f) = S(\vec{k}) \int du P_{U_{\vec{k}}}(u) \frac{1}{2\sqrt{\pi}\tau_k} e^{-\tau_k^2(f - \frac{1}{2\pi}ku)^2}$$

Nous effectuons un changement de variable, de la vitesse  $u$ , vers la fréquence  $f'$  :  $f' = \frac{1}{\lambda}u$  (et  $df' = \frac{1}{\lambda}du$ ) :

$$S(\vec{k}, f) = \lambda S(\vec{k}) \int df' P_{U_{\vec{k}}}(\lambda f') \frac{1}{2\sqrt{\pi}\tau_k} e^{-\tau_k^2(f - f')^2}$$

L'expression montre que le spectre du signal de diffusion collective a une forme proche de la distribution de la vitesse de convection des structures cohérentes, projetée suivant le vecteur d'onde de diffusion. Cette distribution de probabilité est convoluée par une gaussienne dont la largeur est, à un facteur près, l'inverse à la durée de vie des structures cohérentes.

### Structures cohérentes à durée de vie longue

Dans la suite nous supposons que cet inverse de la durée de vie est petit devant la largeur de la distribution de vitesse,  $\delta U_{\vec{k}}/\lambda$ . On peut alors négliger la convolution. La gaussienne est remplacée par une fonction delta :

$$S(\vec{k}, f) = \lambda S(\vec{k}) \int df' P_{U_{\vec{k}}}(\lambda f') \delta(f - f')$$

Le calcul de l'intégrale sur  $f'$  est direct :

$$S(\vec{k}, f) = \lambda S(\vec{k}) P_{U_{\vec{k}}}(\lambda f) \quad (6.7)$$

Cette relation entre le spectre et la distribution de probabilité de la vitesse peut se retrouver par une image intuitive : sur un temps court, le signal paraît avoir une vitesse constante et uniforme. Ce signal induit un pic à la fréquence Doppler. Sur les temps longs, ce pic change de fréquence car la vitesse de convection fluctue. Le spectre se reconstruit au cours du temps la distribution de probabilité de la vitesse.

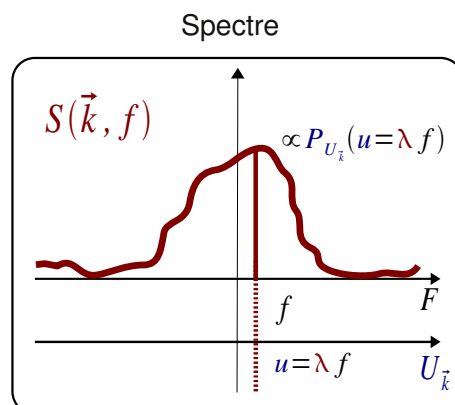
### Formulation inversée :

L'expression permet donc de déduire de la mesure du spectre fréquentiel du signal de diffusion collective, la distribution de probabilité de la vitesse :

$$P_{U_{\vec{k}}}(u) = \frac{1}{\lambda S(\vec{k})} S(\vec{k}, \frac{1}{\lambda}u) \quad (6.8)$$

La relation entre la vitesse et la fréquence est obtenue par effet Doppler :  $f = \frac{1}{\lambda}u$ .

Le spectre est pondéré par le facteur de forme (et  $\lambda$ ) :  $\frac{1}{\lambda S(\vec{k})}$ .



## 2.c Temps de vie des structures

Le raisonnement précédent suppose que le temps de vie des structures cohérentes est suffisamment court pour considérer le mouvement de ces structures est uniforme à leur échelle et que ce temps de vie est négligeable devant le temps de vol des structures dans le volume de diffusion.

Afin de pouvoir étudier cette hypothèse, nous introduisons l'autocorrélation du module du signal :

$$C(\vec{k}, \tau) = \frac{1}{\langle n \rangle_v V} \langle |s(\vec{k}, t)| |s(\vec{k}, t + \tau)| \rangle_t$$

Le signal est décomposé en somme de structures :

$$C(\vec{k}, \tau) = \frac{1}{\langle n \rangle_v V} \langle \left| \sum_j s_j^*(\vec{k}, t) \sum_l s_l(\vec{k}, t + \tau) \right| \rangle_t$$

Les termes non diagonaux (  $j \neq l$  ) sont négligeables :

$$C(\vec{k}, \tau) = \frac{1}{\langle n \rangle_v V} \langle \left| \sum_l s_l^*(\vec{k}, t) s_l(\vec{k}, t + \tau) \right| \rangle_t$$

Comme

$$C(\vec{k}, \tau) = \frac{1}{\langle n \rangle_v V} \langle \sum_l |s_l(\vec{k}, t)| |s_l(\vec{k}, t + \tau)| \rangle_t$$

Les structures étant indépendantes entre elles

## 6.3 Modes sonores

### 3.a Modes propres d'un écoulement

Les modes convectés sont a priori les plus intenses dans le milieu, néanmoins ce ne sont pas les seuls.

Comme décrit par B.T. Chu et L.S.J. Kovaszny [Chu1957], A.S. Monin et A.M. Yaglom [Monin1971] ou J.P. Boon et S. Yip [Boon1991], la linéarisation des équations de Navier-Stokes fait apparaître 3 types de modes de fluctuations dans l'écoulement :

- les modes de vorticité qui ne font intervenir que la partie rotationnelle du champ de vitesses;
- les modes entropiques qui incluent la partie uniquement dissipative de l'entropie et des fluctuations de densité et de vitesse associ es;
- les modes acoustiques, qui diff rent des modes entropiques par le fait qu'ils sont à la fois propagatifs et dissipatifs. Ce sont les ondes sonores. Des fluctuations de pression, entropie, densité et vitesse leur sont associ es.

Les modes acoustiques propagatifs que sont les ondes sonores, vont aussi pouvoir être détectés par diffusion.

### 3.b Onde sonore

#### Onde progressive

Nous considérons une onde sonore de vecteur d'onde  $\vec{k}_{ac}$  et de fréquence  $f_{ac}$ . Les 2 quantités sont reli es par la vitesse du son du milieu :  $2\pi f_{ac} = c_s k_{ac}$ . L'amplitude de l'onde est caract ris e par l'écart type des fluctuations de densité associ es à cette onde :  $n_{ac}$ .

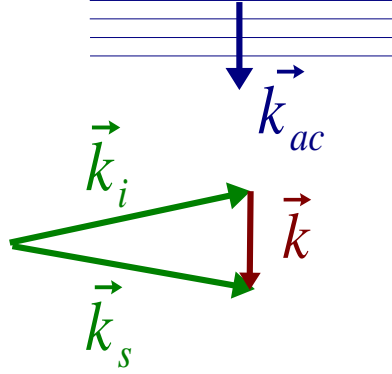
Cette onde induit des fluctuations de densité :

$$n(\vec{r}, t) = n_{ac} \sqrt{2} \Re \left( e^{i(\vec{k}_{ac} \cdot \vec{r} - 2\pi f_{ac} t)} \right)$$

L'observation de ces fluctuations par diffusion collective, donne le signal suivant :

$$s(\vec{k}, t) = \frac{n_{ac}}{\sqrt{2}} \iiint_V u(\vec{r}) \left[ e^{i(\vec{k}_{ac} - \vec{k}) \cdot \vec{r}} e^{-i 2\pi f_{ac} t} + e^{-i(\vec{k}_{ac} + \vec{k}) \cdot \vec{r}} e^{i 2\pi f_{ac} t} \right] d^3 \vec{r}$$

Nous voyons que, pour que l'onde sonore soit détectée par diffusion, il faut que le nombre d'onde de diffusion corresponde exactement à celui de l'onde sonore (ou



son opposé) :

$$\vec{k}_{ac} = \vec{k} \text{ ou } \vec{k}_{ac} = -\vec{k}$$

Pour la suite nous choisissons de nous placer dans le cas où  $\vec{k}$  est proche  $\vec{k}_{ac}$  i.e. la différence entre les 2 est négligeable devant la résolution en nombre d'onde de la diffusion.

Développons le calcul. La forme du profil du volume de diffusion est gaussienne :

$$u(x, y, z) = e^{-x^2 \theta^2 / 2 w^2 - 2y^2 / w^2 - 2z^2 / w^2}$$

L'intégration se décompose suivant chaque direction :

$$\begin{aligned} s(\vec{k}, t) = & \frac{n_{ac}}{\sqrt{2}} \int_{-L_s/2}^{L_s/2} e^{i(k_{acx} - k_x)x - x^2 \theta^2 / 2 w^2} dx \int e^{i(k_{acy} - k_y)y - 2y^2 / w^2} dy \\ & \int e^{i(k_{acz} - k_z)z - 2z^2 / w^2} dz e^{-i 2\pi f_{ac} t} \\ & + \frac{n_{ac}}{\sqrt{2}} \int_{-L_s/2}^{L_s/2} e^{i(k_{acx} + k_x)x - x^2 \theta^2 / 2 w^2} dx \int e^{i(k_{acy} + k_y)y - 2y^2 / w^2} dy \\ & \int e^{i(k_{acz} + k_z)z - 2z^2 / w^2} dz e^{i 2\pi f_{ac} t} \end{aligned}$$

Suivant la direction  $x$ , correspondant à l'axe longitudinal du volume, l'onde sonore ne couvre que la longueur  $L_s$  que nous supposerons courte devant la longueur du volume dans cette direction  $\frac{w \sqrt{2\pi}}{\theta}$ . Le signal  $e^{-x^2 \theta^2 / 2 w^2}$  est alors quasi constant sur cette longueur  $L_s$ . L'intégration suivant les 2 autres direction correspond à la transformée de Fourier d'une gaussienne de longueur transverse

$$w \sqrt{\frac{\pi}{2}} :$$

$$s(\vec{k}, t) = \frac{n_{ac}}{\sqrt{2}} \frac{\pi w^2 L_s}{2} \frac{\sin[(k_{acx} - k_x) L_s / 2]}{(k_{acx} - k_x) L_s / 2} e^{-w^2(k_{acy} - k_y)^2 / 8} e^{-w^2(k_{acz} - k_z)^2 / 8} e^{-i 2\pi f_{ac} t} \\ + \frac{n_{ac}}{\sqrt{2}} \frac{\pi w^2 L_s}{2} \frac{\sin[(k_{acx} - k_x) L_s / 2]}{(k_{acx} - k_x) L_s / 2} e^{-w^2(k_{acy} + k_y)^2 / 8} e^{-w^2(k_{acz} + k_z)^2 / 8} e^{i 2\pi f_0 t}$$

Pour  $\vec{k}$  proche  $\vec{k}_{ac}$ , le second terme est quasi nul.

Le sinus cardinal suivant  $x$  est très proche de 1 si  $|k_{acx} - k_x| \ll 2/L_s$ . Les facteurs exponentiels correspondant aux directions  $y$  et  $z$  sont aussi proches de 1 si  $|k_{acy} - k_y| \ll 2/w$  et  $|k_{acz} - k_z| \ll 2/w$ . Si la différence des 2 vecteurs d'onde est suffisamment plus petite que la résolution en nombre d'onde suivant chaque direction, le signal s'écrit :

$$s(\vec{k}, t) = \frac{n_{ac}}{\sqrt{2}} \frac{\pi w^2 L_s}{2} e^{-i 2\pi f_{ac} t}$$

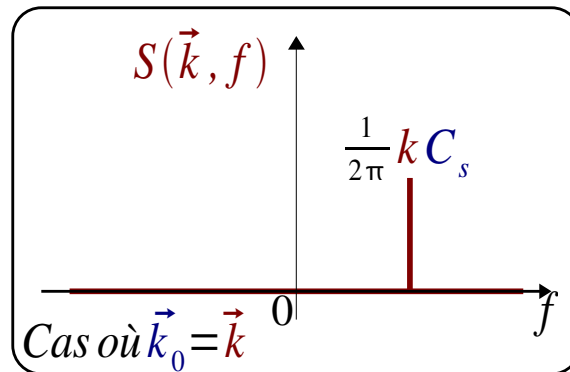
### Spectre fréquentiel

Le spectre du signal a la forme suivante :

$$S(\vec{k}, f) = \frac{n_{ac}^2}{2} \frac{\pi^2 w^4 L_s^2}{4} \delta(f - f_{ac})$$

Le spectre montrera donc une raie à la fréquence de l'onde sonore. La vitesse Doppler correspondante sera alors la vitesse du son. La fréquence sera positive ou négative suivant que les vecteurs d'onde du son et de la diffusion sont alignés ou opposés.

Spectre



La diffusion collective est donc très sélective sur les modes sonores détectés. Elle agit comme un microphone directionnel et résolu en nombre d'onde (donc en fréquence de l'onde sonore).

Par l'intégrale du spectre, on retrouve le facteur de forme associé à l'onde sonore :

$$S(\vec{k}) = \int S_n(\vec{k}, f) df = \frac{1}{\langle n \rangle V_s} \frac{\pi^2 w^4 L_{ac}^2 n_{ac}^2}{8}$$

Si on reprend l'exemple utilisé pour le calcul du rapport signal sur bruit : un piézoélectrique est excité à la fréquence  $f_{ac} = 332 \text{ kHz}$ , avec une amplitude de

mouvement  $a_s = 11.5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  sur un diamètre de  $L_{ac} = 5 \text{ cm}$ , la variance des fluctuations propres à l'onde générée est de :

$$n_{ac}^2 = \frac{1}{2} \frac{a_{ac}^2 \omega_{ac}^2 \langle n \rangle^2}{c_s^2} = 1.9 \cdot 10^{40} \text{ m}^{-6}$$

Le facteur de forme associé à ce mode sonore est ( $L_{inc} = 18 \text{ cm}$  et  $w = 1 \text{ mm}$ ) :

$$S(\vec{k}) = \frac{n_{ac}^2}{\langle n \rangle} \frac{\pi w^2 L_{ac}^2}{2 L_{inc}} = 1.5 \cdot 10^9$$

Il peut atteindre des ordres de grandeur comparables à ceux des modes convectés.

### 3.c Modes convectés et modes propagatifs dans le signal de diffusion

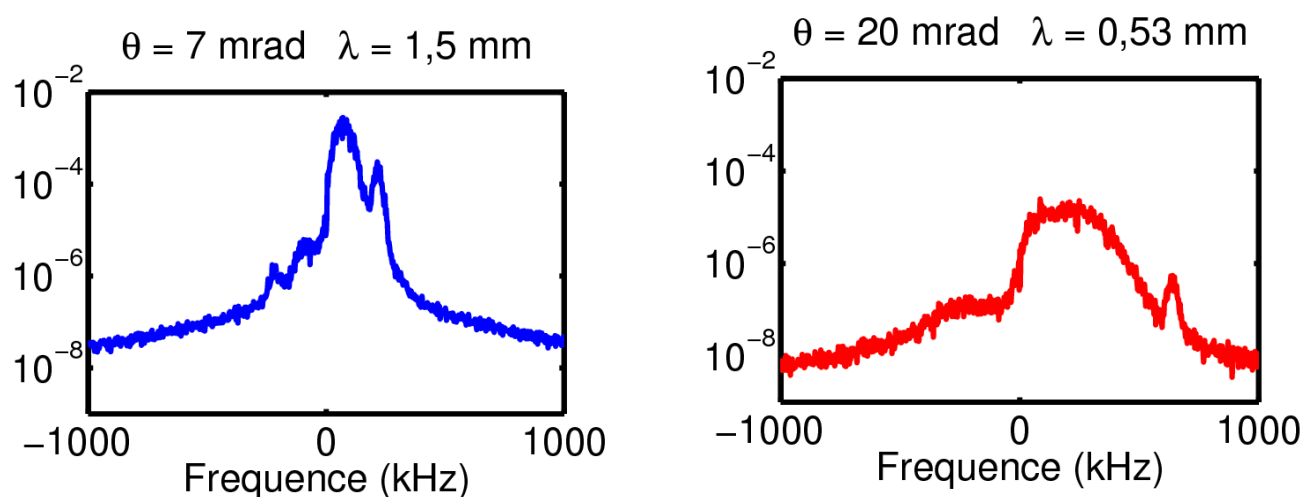
La diffusion est sensible de la même façon aux modes convectés et aux modes propagatifs que sont les ondes sonores. Ce qui permet de les différencier est leur fréquence Doppler : le mode convecté ira à la vitesse de l'écoulement. Le mode propagatif ira à la vitesse, éventuellement décalée de la vitesse de l'écoulement, si le mode se propage avec lui.

## 6.4 Comparaison des spectres du signal de diffusion à différentes échelles

Nous pouvons maintenant analyser la forme des spectres de signal de diffusion collective appliquée à un écoulement turbulent.

L'expérience est un jet d'air turbulent.

Les figures ci-dessous montrent des densités spectrales fréquentielles du signal de diffusion où seul l'échelle de diffusion  $\lambda$  a été changée (d'un facteur 3) :



Ces 2 densités spectrales montrent des formes et des niveaux a priori différents.

Afin de pouvoir mieux les comparer, nous allons utiliser la formule qui permet de passer du spectre à la distribution de probabilité de la vitesse du jet :

$$P_{U_{\vec{k}}}(u_k) = \frac{1}{\lambda S(\vec{k})} S(\vec{k}, \frac{1}{\lambda} u_k)$$

Cette opération nécessite alors 2 homothéties :

En abscisse, il faut passer de la fréquence à la vitesse par la relation de l'effet Doppler :

$$u_k = \lambda f$$

En ordonnée, il faut normaliser le spectre par le facteur de forme :

$$P_{U_{\vec{k}}} = \frac{1}{\lambda S(\vec{k})} S(\vec{k}, .)$$

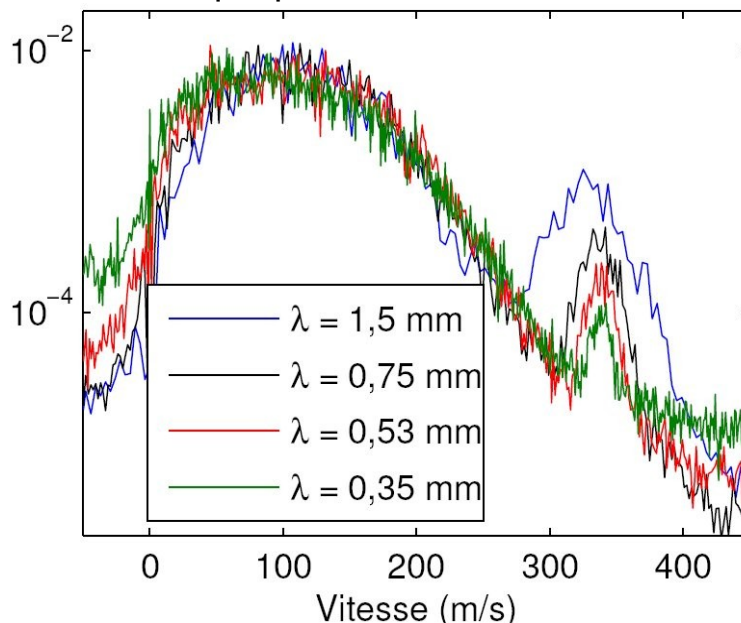
Le facteur de forme peut être calculé directement depuis le spectre du signal par la formule de Parseval :

$$S(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\vec{k}, f) df$$

Nous obtenons alors des densités spectrales normalisées, fonction de la vitesse.

Nous observons que les bosses principales des densités spectrales pour des échelles  $\lambda$  différentes se superposent : Ceci est cohérent avec le fait que la bosse principale correspond à la distribution de la vitesse de convection qui, est indépendante de  $\lambda$  . La vitesse moyenne est de  $100 \text{ m/s}$  .

Nous observons un pic secondaire sur la droite de la bosse principale sur chaque spectre. Celui-ci diffère pour différentes échelles  $\lambda$  . Mais ce pic secondaire est toujours centré sur la même vitesse :  $340 \text{ m/s}$  . Cette vitesse est la vitesse du son dans l'air : il s'agirait d'ondes sonores se propageant dans le référentiel laboratoire, dans l'air non convecté avec le fluide. A chaque échelle différente  $\lambda$  correspond une onde sonore différente (en nombre d'onde et en fréquence). Ceci explique la différence de forme de chaque pic sonore d'une échelle à l'autre.



La comparaison des vitesses de la bosse « convective » et du pic « sonore » permet d'évaluer directement le nombre de Mach de l'écoulement. L'écoulement est ici subsonique.

## 6.5 Diffusion collective et anémométrie laser

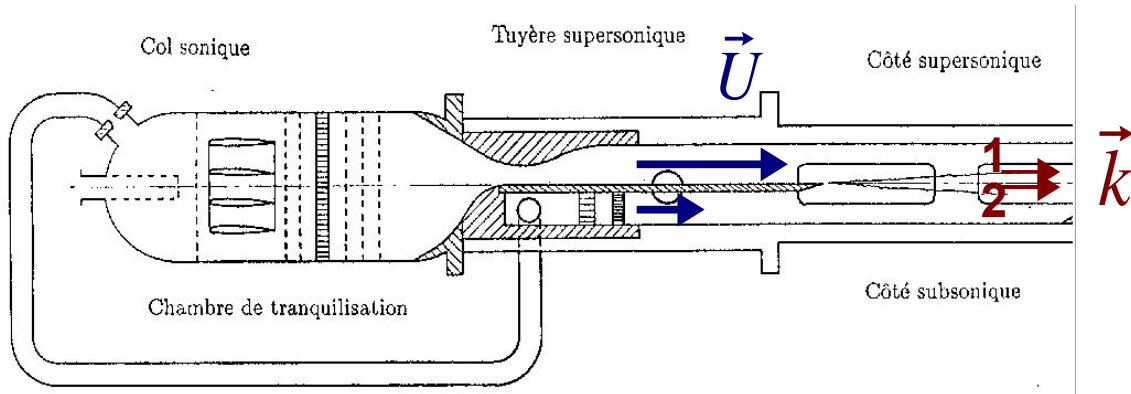
Afin d'établir la correspondance entre la bosse principale du spectre avec la



distribution de la vitesse convective, le spectre de diffusion collective a été comparé à un histogramme de vitesses obtenu par Anémométrie Doppler Laser, sur une même couche de mélange supersonique. L'expérience a été menée par J.P. Bonnet et al. [Bonnet1995, Bonnet1998]

## 5.a Couche de mélange supersonique

Une étude détaillée des couches de mélange supersoniques (introduisant les nombres de Mach convectifs) est donné par D. Papamoschou [Papamoschou 1988].



*JP Bonnet et al. MSI (1995)*

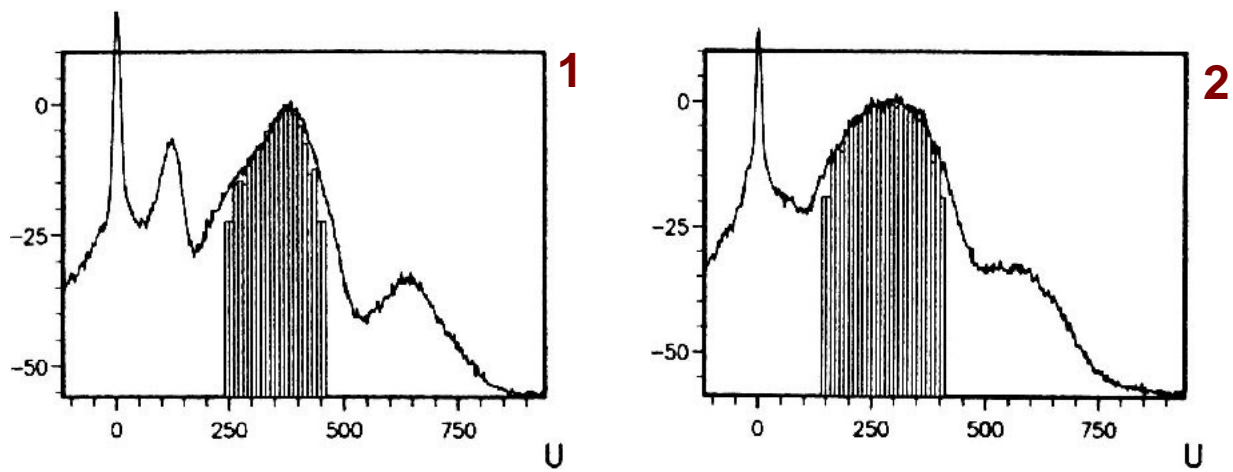
L'expérience a été effectuée sur une couche de mélange supersonique par rafales d'air sous pression (maximum 12 bars).

L'écoulement supersonique supérieur est produit par une tuyère supersonique qui suit une chambre de tranquillisation.

L'écoulement subsonique inférieur est prélevé sur l'alimentation du flux supersonique par un col sonique. L'écoulement passe une chambre de tranquillisation, avant le développement de la couche de mélange entre les 2 écoulements, dans une veine d'essai de 150 x 150 mm<sup>2</sup>.

## 5.b Spectre fréquentiel du signal de diffusion collective et histogrammes d'anémométrie

La mesure est effectuée 240 mm en aval du bord de fuite. Le vecteur d'onde de diffusion est orienté parallèlement à l'écoulement. Nous montrons les densités spectrales pour 2 positions verticales différentes : l'une (1) est plutôt située du côté de l'écoulement supersonique. L'autre (2) est quasiment au centre de la couche de mélange.



*JP Bonnet et al. MSI (1995)*

Sur les figures ci-dessus, le spectre du signal de diffusion collective est la courbe continue. Les histogrammes de vitesse obtenus par anémométrie Doppler Laser sont montrés par des barres. Les 2 courbes ont été normalisées l'une sur l'autre.

Nous observons que la forme de la bosse principale du spectre est correctement adaptée à la forme de l'histogramme de vitesse de l'anémométrie Doppler Laser. Nous observons que la encore le spectre de diffusion collective est plus riche : 2 pics secondaires apparaissent de part et d'autre de la bosse principale, sur la figure (1) : Il s'agit de mode sonores, qui cette fois-ci se propage à la vitesse du son par rapport à l'écoulement supersonique lui-même.

Comme mentionné précédemment, ces 2 techniques sont assez proches : Les 2 mesurent la vitesse par effet Doppler sur un diffuseur. Pour l'anémométrie Doppler, le diffuseur est une particule plus grosseensemencée dans l'écoulement. Pour la diffusion collective, ce sont les fluctuations propres à l'écoulement.

# 7 Diffusion collective et fluctuations dans divers milieux

Ce chapitre présente l'application de la diffusion collective à d'autres milieux que les écoulements d'air turbulents de laboratoire.

Deux natures différentes de milieu sont observés par diffusion collective : les gaz, par diffusion Rayleigh, et les plasmas, par diffusion Thompson. Si les 2 phénomènes de diffusion sont différents, dans les 2 cas le signal de diffusion informe sur le niveau de fluctuation de densité (moléculaire ou électronique) à l'échelle de la diffusion.

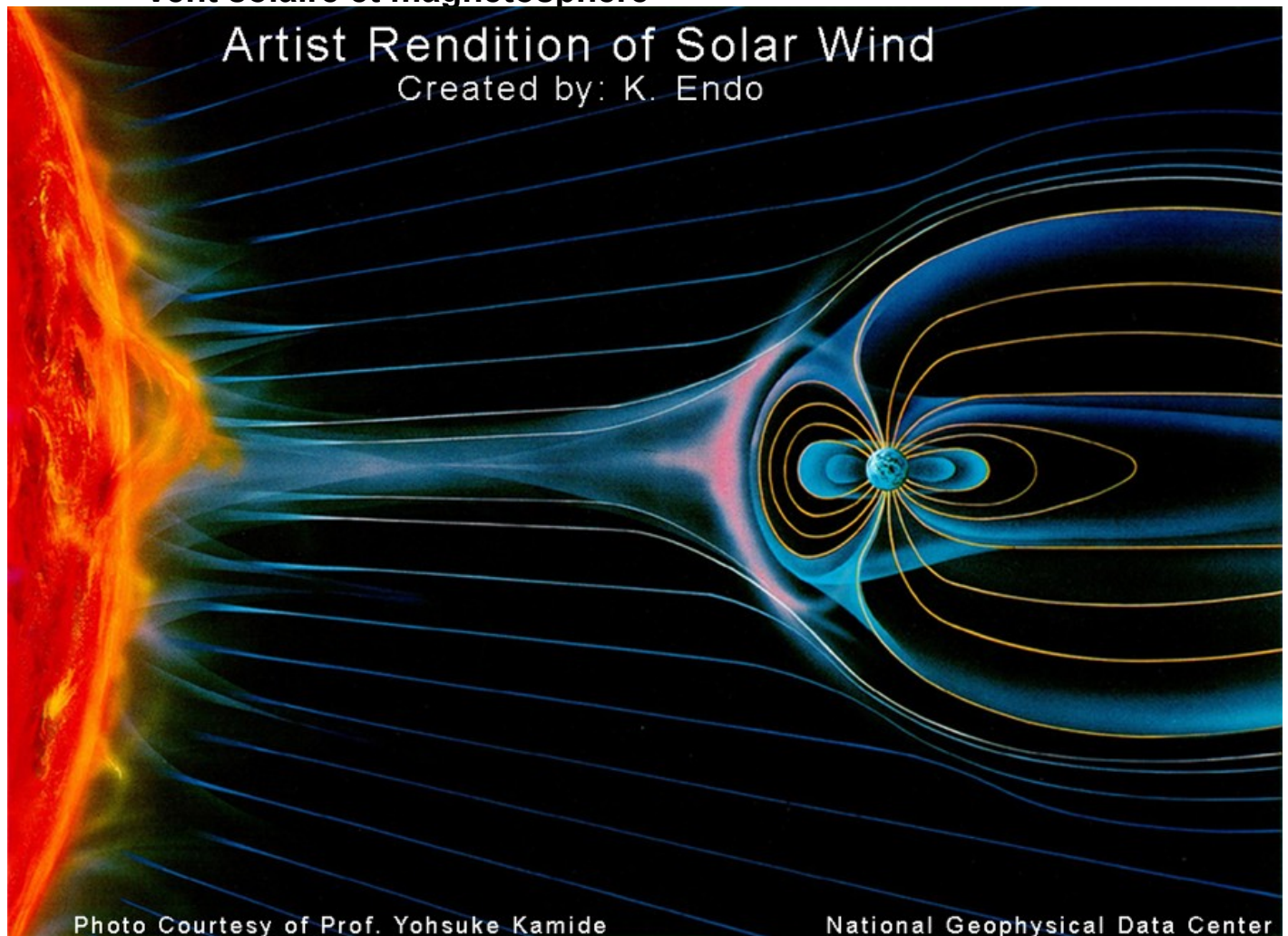
## 7.1 Milieu ionosphérique

### 1.a Ionosphère

#### Rayonnement UV et Ionosphère

L'ionosphère est la partie ionisée de la haute atmosphère autour de 300 km d'altitude. Cette ionisation est due à l'interaction du rayonnement UV venant du soleil avec les hautes couches, peu denses de l'atmosphère.

#### Vent solaire et magnétosphère



L'activité du soleil est la source, outre de son rayonnement, de nombreux processus affectant l'environnement terrestre, tel le vent solaire qui est un flux permanent de particules chargées issues de la couronne solaire. L'interaction du vent solaire sur le champ magnétique terrestre, confine ces particules dans une



cavité de grandes dimensions autour de la Terre : la magnétosphère.

A l'intérieur de la magnétosphère, comme les particules chargées suivent les lignes de champ magnétique, l'interaction du vent solaire aux limites de la magnétosphère a des conséquences sur l'ionosphère.

### **Aurores boréales (et australes)**

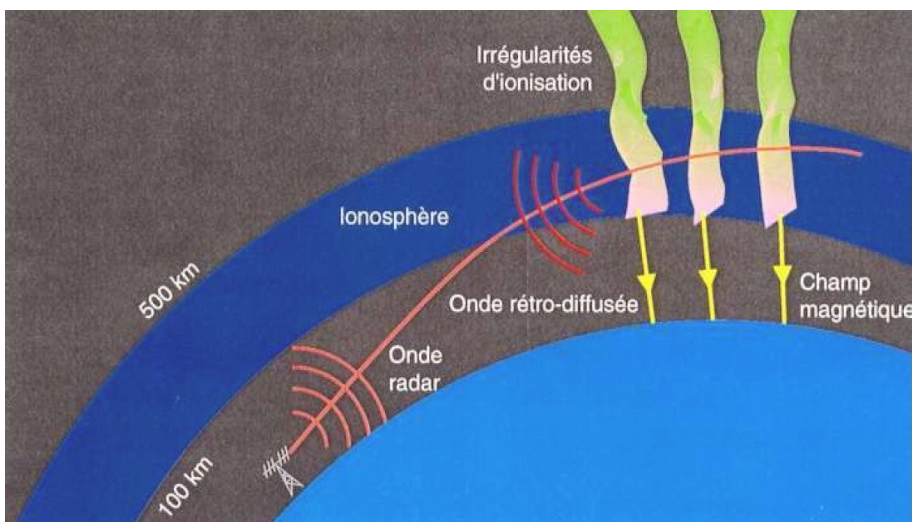


*Aurore boréale vue de la navette spatiale Discovery - NASA*

Comme les lignes de champ magnétique interceptent principalement la surface terrestre à proximité des pôles magnétiques, ce sont sur des couronnes autour des ces pôles que l'activité de l'ionosphère due au vent solaire est la plus intense.

Les aurores boréales (et australes) sont des indicateurs de l'augmentation de l'activité du soleil en surface.

### **1.b Observation par radar HF**



*JC Cerisier et al. SF2A (2002)*

Pour observer la dynamique du plasma de l'ionosphère, des radars HF sont utilisés. L'antenne sert à la fois d'émetteur d'une onde HF, dans la bande 8 à 20 MHz, et de récepteur de l'onde qui sera rétro-diffusée par le plasma ionosphérique.

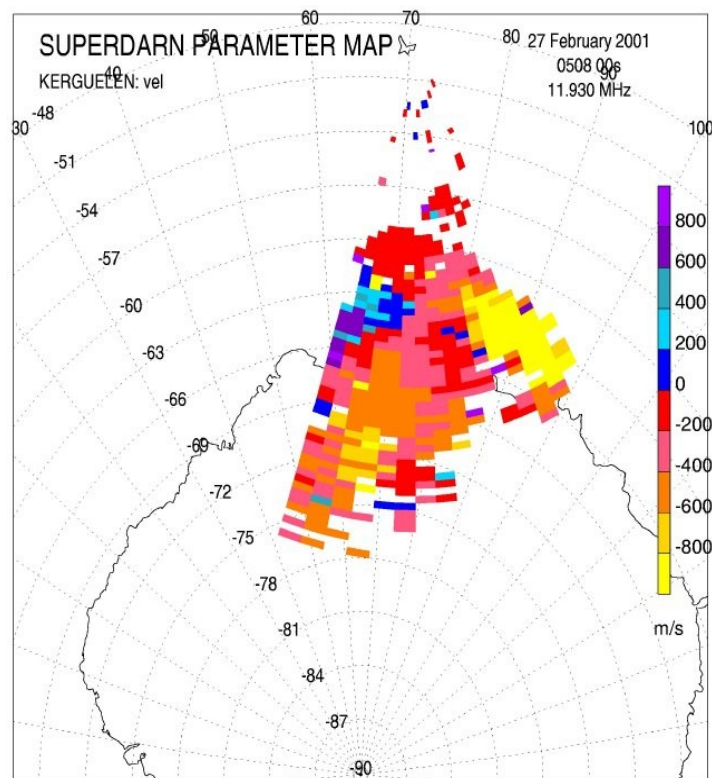
L'antenne est constituée d'un réseau de câbles rayonnants, déphasés les uns par rapport aux autres.

Le radar fonctionnant en rétro-diffusion, la gamme de longueurs d'onde de diffusion observée va de 0,3 à 30 m.

L'onde émise a une inclinaison initiale de  $15^\circ$ . La réfraction de l'onde dans l'ionosphère diminuera cet angle. En jouant sur le déphasage entre les lignes, on peut modifier l'angle dans le plan horizontal d'émission de l'onde, dans une plage de  $30^\circ$ , avec une résolution angulaire de  $2^\circ$ .

Le radar émet des impulsions courtes. Le délai laissé entre l'émission et la réception permet une localisation en distance, avec une résolution de 40 km sur une distance totale de 3 000 km. Pour chaque distance, l'information de l'amplitude et de la phase du signal de diffusion est récupérée.

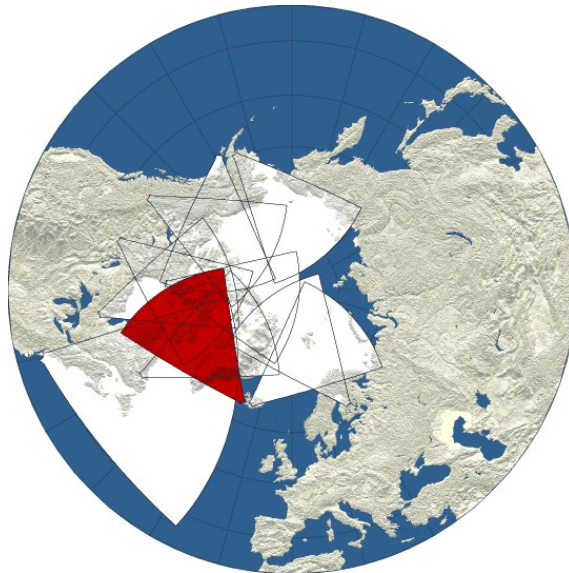
L'observation de l'ensemble de la zone couverte est répétée toutes les 3 ms, afin d'enregistrer la dynamique du signal de diffusion.



*JC Cerisier et al. SF2A (2002)*

La figure précédente donne la mesure de la vitesse, obtenue par effet Doppler, à un instant donné. Les vitesses négatives correspondent à un mouvement en direction du radar. Les zones sans valeur de vitesse correspondent à des signaux de diffusion d'amplitude trop faible pour pouvoir mesurer la vitesse par effet Doppler.

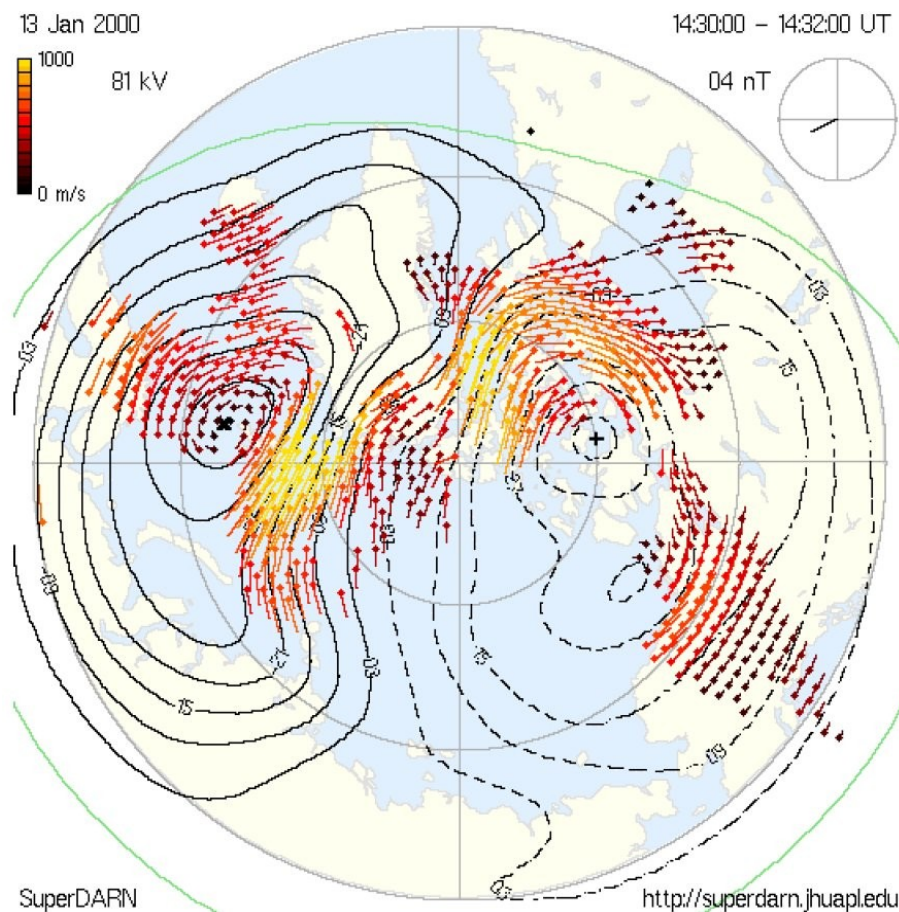
## 1.c Réseau SuperDARN : cartographie des pôles



*SuperDarn*

Afin de pouvoir observer simultanément l'ensemble des 2 couronnes aurorales autour des pôles magnétiques, un réseau de radars HF a été mis en place par une collaboration internationale : SuperDARN (Dual Auroral Radar Network).

Chaque zone est couverte par 2 radars dont les visées sont perpendiculaires afin de pouvoir mesurer les 2 composantes horizontales de la vitesse des fluctuations.



SuperDARN  
JC Cerisier et al. SF2A (2002)

<http://superdarn.jhuapl.edu>

La figure ci-dessus montre une reconstruction du champ de vitesse dans la



couronne autour du pôle magnétique de l'hémisphère nord. On observe la présence de 2 cellules de convection.

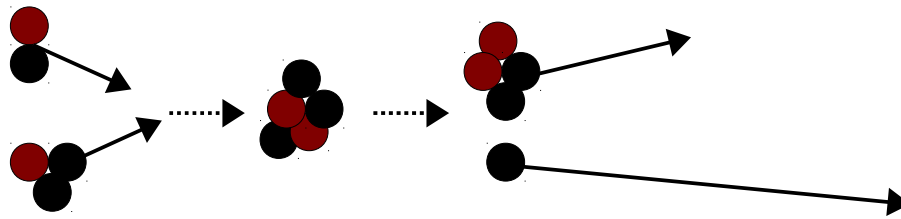
## 7.2 Fluctuations dans les tokamaks

Pour atteindre les conditions de la réaction de fusion nucléaire, il faut chauffer le combustible, un plasma deutérium-tritium, à des températures de l'ordre de 100 millions de degrés. Un moyen envisagé pour y arriver est d'utiliser un confinement magnétique des particules. Le tokamak est la configuration magnétique la plus répandue [Wesson2004, Freidberg2008]. Dans ces enceintes, le confinement est dépendant d'une micro-turbulence présente dans le plasma. La diffusion collective est l'un des principaux diagnostics pour observer cette micro-turbulence au cœur du plasma.

### 2.a Fusion contrôlée par confinement magnétique

#### Réacteur de fusion

La réaction de fusion nucléaire dont les conditions sont les plus faciles à atteindre est la réaction deutérium-tritium. Cette réaction produit un noyau d'hélium et un neutron, avec une énergie de 18 MeV, portée à 80% par le neutron.

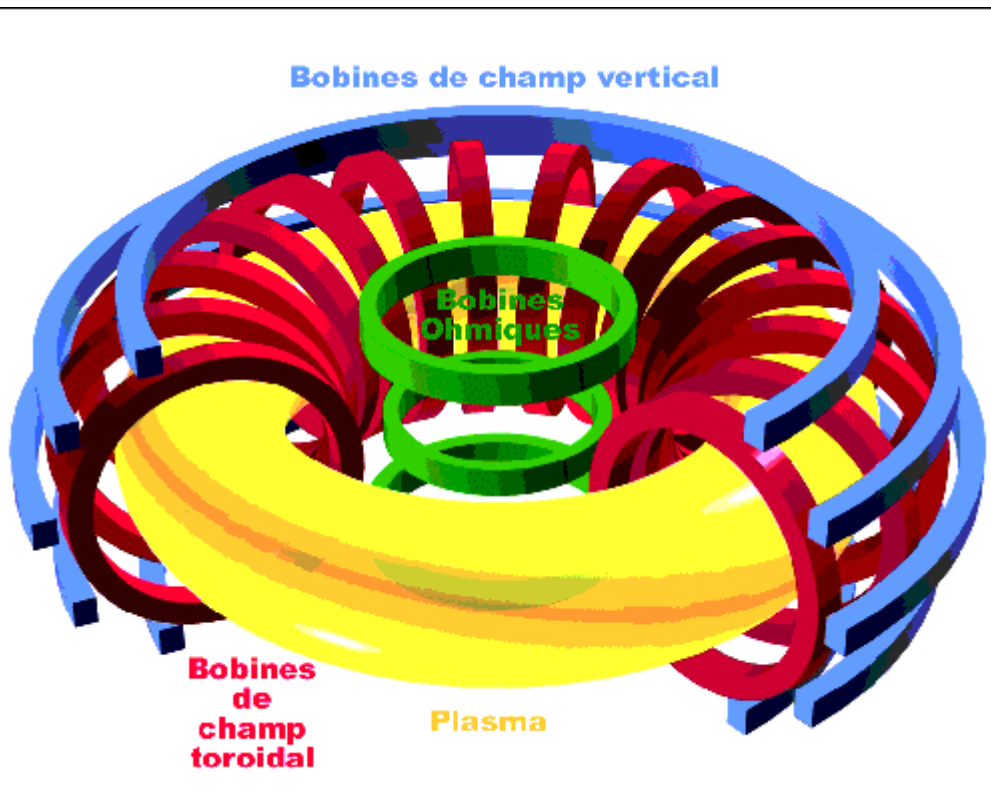


Afin de pouvoir aller au delà de la barrière de répulsion électrique entre les 2 noyaux de deutérium et tritium, chargés positivement, ces noyaux doivent initialement avoir une grande quantité d'énergie. Comme la section efficace de collision est très faible, on ne peut réaliser la réaction de manière efficace par l'interaction du faisceau d'un élément sur une cible constituée de l'autre élément. La réaction ne peut être obtenue qu'en chauffant une masse du mélange de la réaction. L'intensité de la réaction va dépendre de la température et la densité de ce mélange. Afin que la puissance produite par la réaction soit supérieure à la puissance apportée au plasma pour le maintenir en température, le confinement du plasma doit être bon. Ce confinement se caractérise par le temps, défini comme le rapport de l'énergie emmagasinée par le plasma, sur la puissance de chauffage nécessaire pour maintenir cette chaleur.

#### Tokamak et confinement magnétique

Afin d'obtenir un bon confinement, l'idée a été d'utiliser un champ magnétique pour maintenir les noyaux et les électrons chargés du plasma à distance des parois de l'enceinte. L'énergie leur sera ensuite apportée principalement par des ondes résonantes avec leur mouvement cyclotronique. Afin que les lignes de champ magnétique se referment sur elle-même, l'enceinte a une forme de tore (en gris sur figure ci-dessous). L'enceinte est entourée de bobines (en bleu clair sur la figure) afin de créer un champ magnétique toroïdal, c'est à dire de forme circulaire qui suit l'axe principal de l'anneau.



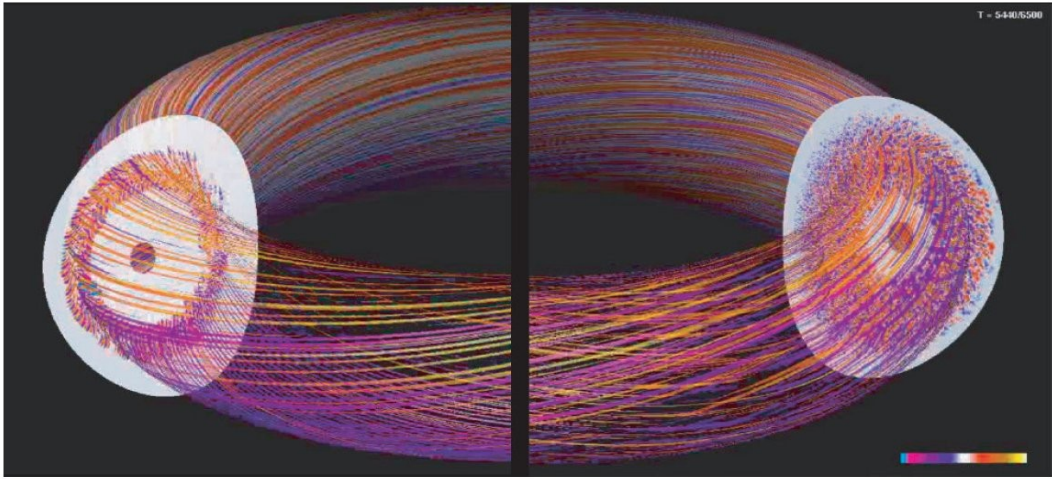


*P-A Gourdain*

Comme le champ magnétique est nécessairement courbé, les particules chargées subissent une dérive centrifuge par rapport à ces lignes de champ. Pour éviter cette dérive, une équipe russe en 1968 a eu l'idée d'induire un courant lui aussi toroïdal dans le plasma. Pour produire ce courant, un solénoïde est placé au centre du tore (en marron foncé sur la figure), Un matériau magnétique (en marron clair) guide l'induction de courant toroïdal à l'intérieur du plasma, suivant le principe du transformateur. Ce courant toroïdal crée un champ magnétique secondaire qui donne aux lignes de champ magnétique une forme hélicoïdale (en bleu foncé sur la figure). Cette forme des lignes de champ a pour effet que la dérive n'emmène plus inexorablement les particules vers la paroi. Le confinement magnétique s'est révélé bien meilleur.

## 2.b Confinement et transport

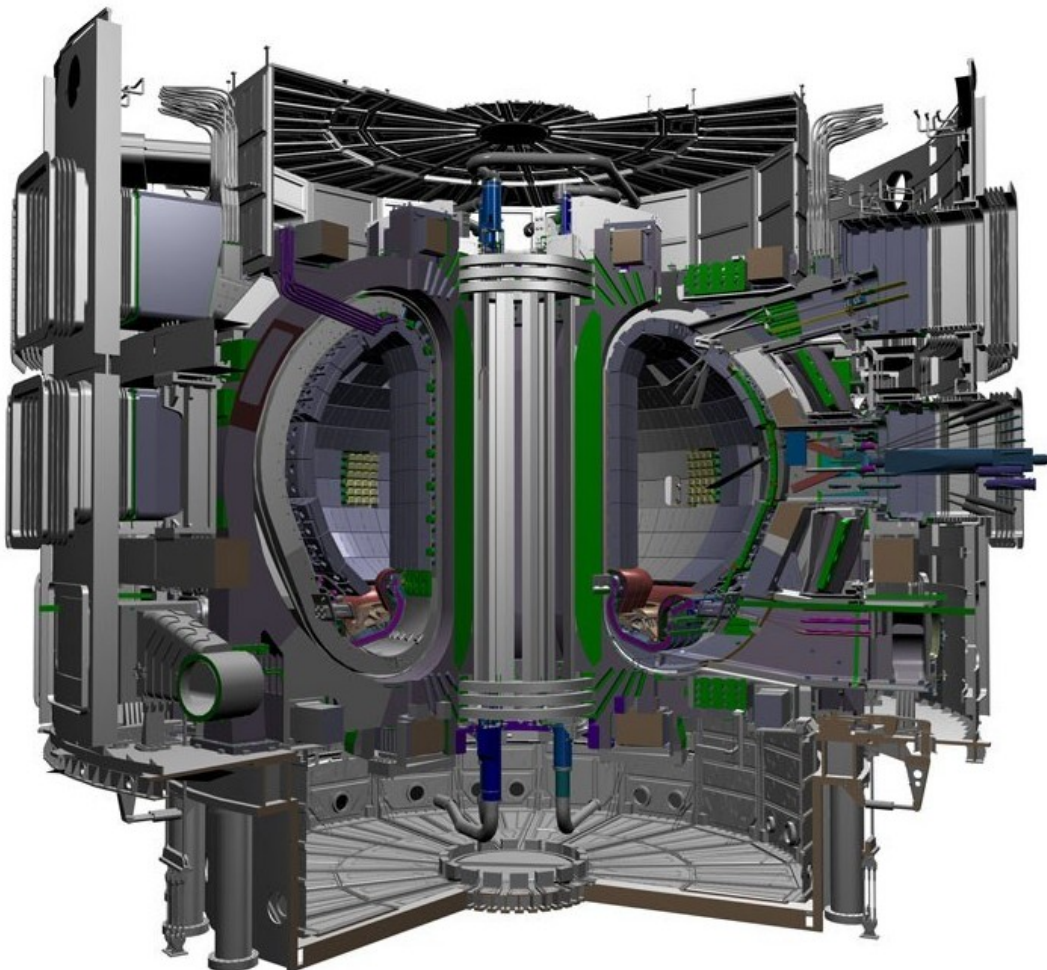
Lors de la construction de tokamaks plus grands, il a été observé que le gain de confinement n'a pas été aussi élevé que celui prévu par les théories de transport dites néoclassiques, pour lesquelles le transport se fait par collisions des particules entre orbites proches. Comme le montre la simulation récente sur la figure ci-dessous [Lee2006], il apparaît au sein du plasma une micro-turbulence, créant un transport à l'échelle du centimètre. Ce transport induit une diffusion plus rapide des particules du centre vers le bord du plasma [Doyle2007].



*W Lee et al. JoPCS (2006)*

## Le tokamak ITER

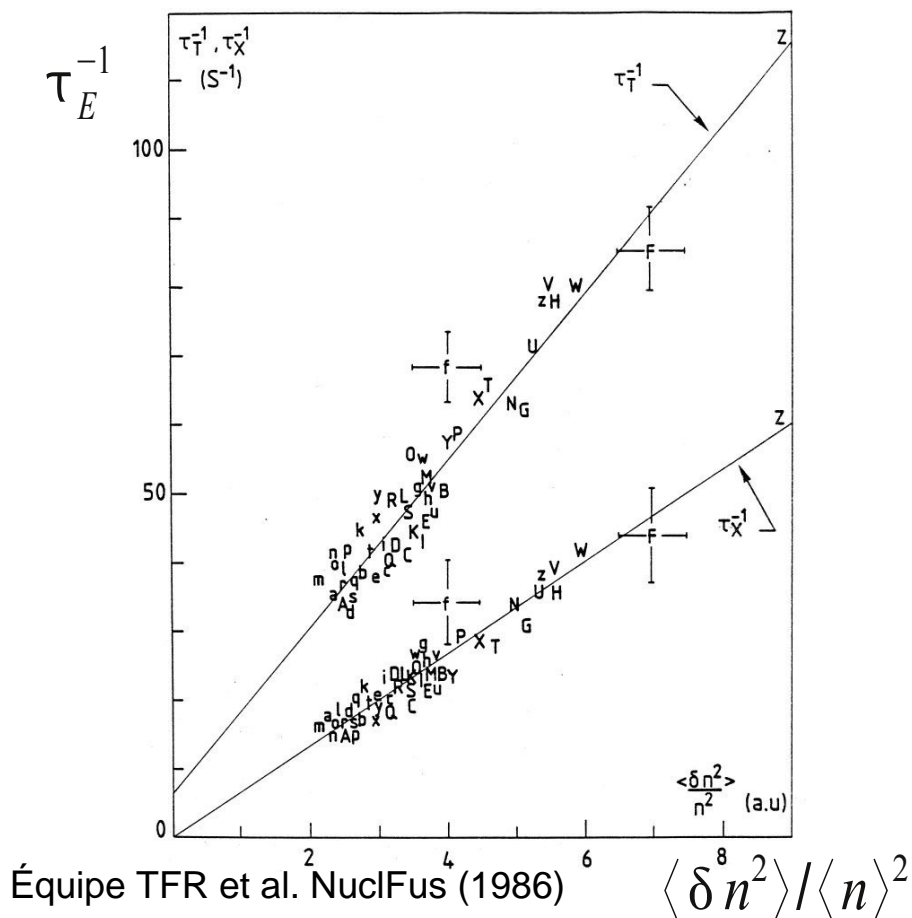
Comme ce transport turbulent détériore le confinement du plasma, il a fallu envisager des tokamaks de taille plus importante afin de d'obtenir un rapport élevé de la puissance produite par fusion sur la puissance à fournir pour maintenir la température du plasma. C'est la raison pour laquelle le tokamak ITER, construit à cet effet, aura une taille si imposante, comme le montre le schéma ci-dessous (la taille humaine est donnée par le personnage en bleu en bas). Le tore aura un grand rayon de 6 m et un petit rayon de 2 m. Le champ magnétique toroïdal sera de 5,3 T. Le courant toroïdal sera de 17 MA. La puissance de chauffage sera de 70 MW, pour une puissance produite par fusion attendue de 500 MW.



## 2.c diffusion collective et micro-turbulence

La diffusion collective a été utilisée dans les plasmas de tokamaks dès les années 1970 [Luhmann1985]. Dans le tokamak TFR, des diagnostics de diffusion collective ont permis d'observer cette micro-turbulence. TFR était une machine de taille encore modeste : grand rayon de 1 m, petit rayon de 20 cm, un champ magnétique toroïdal de 6 T, un courant toroïdal de 0,5 MA, une puissance injectée de l'ordre de 2 MW.

La figure ci-dessous, issue de mesures sur TFR, montre la corrélation entre le niveau de turbulence, obtenu par diffusion collective, et l'inverse du temps de confinement de l'énergie, calculé par un bilan global énergétique du plasma. La figure montre les résultats obtenus pour 2 temps différents de confinement.

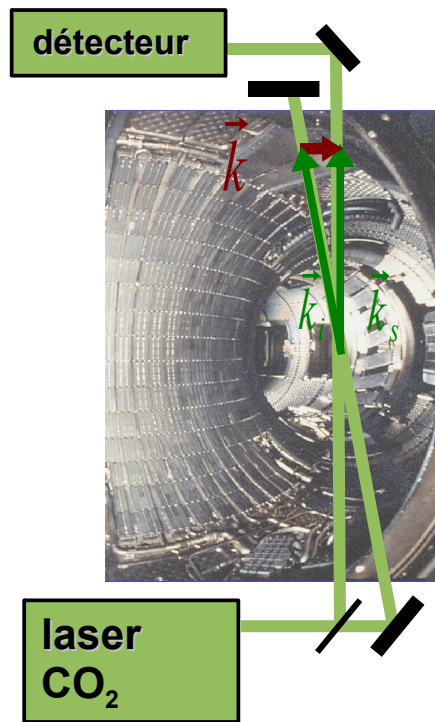


### Montages laser et micro-ondes

Le montage optique de diffusion collective utilisé sur les tokamaks est très proche de celui utilisé pour l'observation de la turbulence fluide par un laser CO<sub>2</sub>. Néanmoins, comme les échelles de la turbulence sont plus grandes, des télescope sont utilisés pour pouvoir atteindre des angles de diffusion plus petits. Les faisceaux optiques traversent la chambre de bas en haut, comme indiqué sur la figure ci-dessous, en application sur le tokamak Tore Supra.

Le tokamak Tore Supra est un tokamak actuellement en activité. Son grand rayon est de 2,25 m, son petit rayon de 70 cm, Son champ magnétique toroïdal est de 3,8 T, son courant toroïdal est de 1,5 MA. La puissance injectée est 12 MW. Il fut la première machine de sa taille à avoir des bobines supra-conductrices pour générer

le champ magnétique toroïdal, et une enceinte activement refroidie, qui permet d'effectuer des plasmas à longue durée, sans que l'enceinte ne chauffe continuellement.

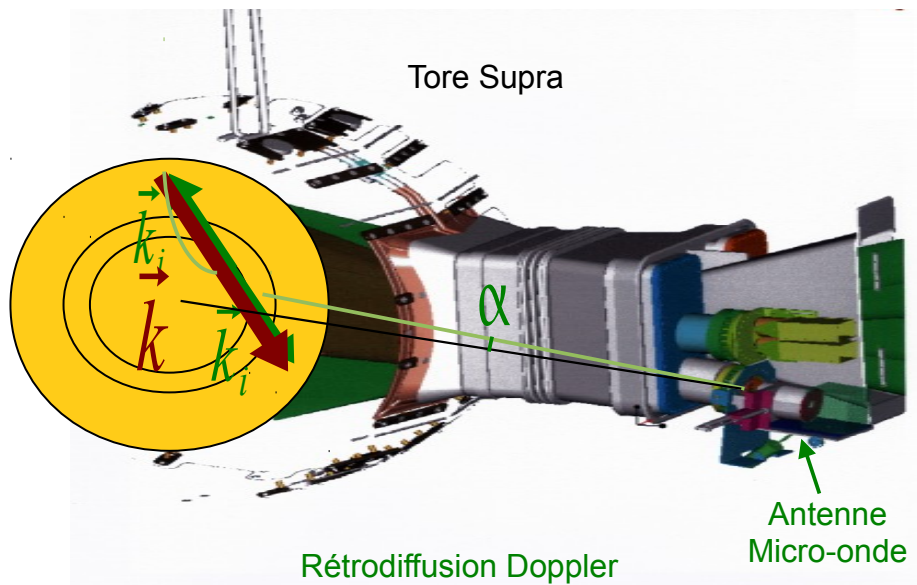


Ce montage laser a permis les observations telles que celles exposées ci-dessus pour TFR, mais il a l'inconvénient que le volume d'observation traverse toute la section de la machine, et ne permet pas de localiser la mesure.

En revanche, il a été observé que les diagnostics micro-ondes utilisés pour la réflectométrie, permettait aussi l'observation par diffusion collective du plasma, dans une zone localisée près de la couche de réflexion du plasma [zou1999]. En effet, le plasma réfléchit une certaine gamme de faisceaux micro-ondes, en fonction de sa densité électronique, voir du champ magnétique. Comme l'indice de réfraction de l'onde varie de manière importante dans le plasma pour ces ondes, il est nécessaire de simuler la propagation du faisceau micro-onde dans le plasma pour connaître la localisation et le vecteur d'onde de diffusion.

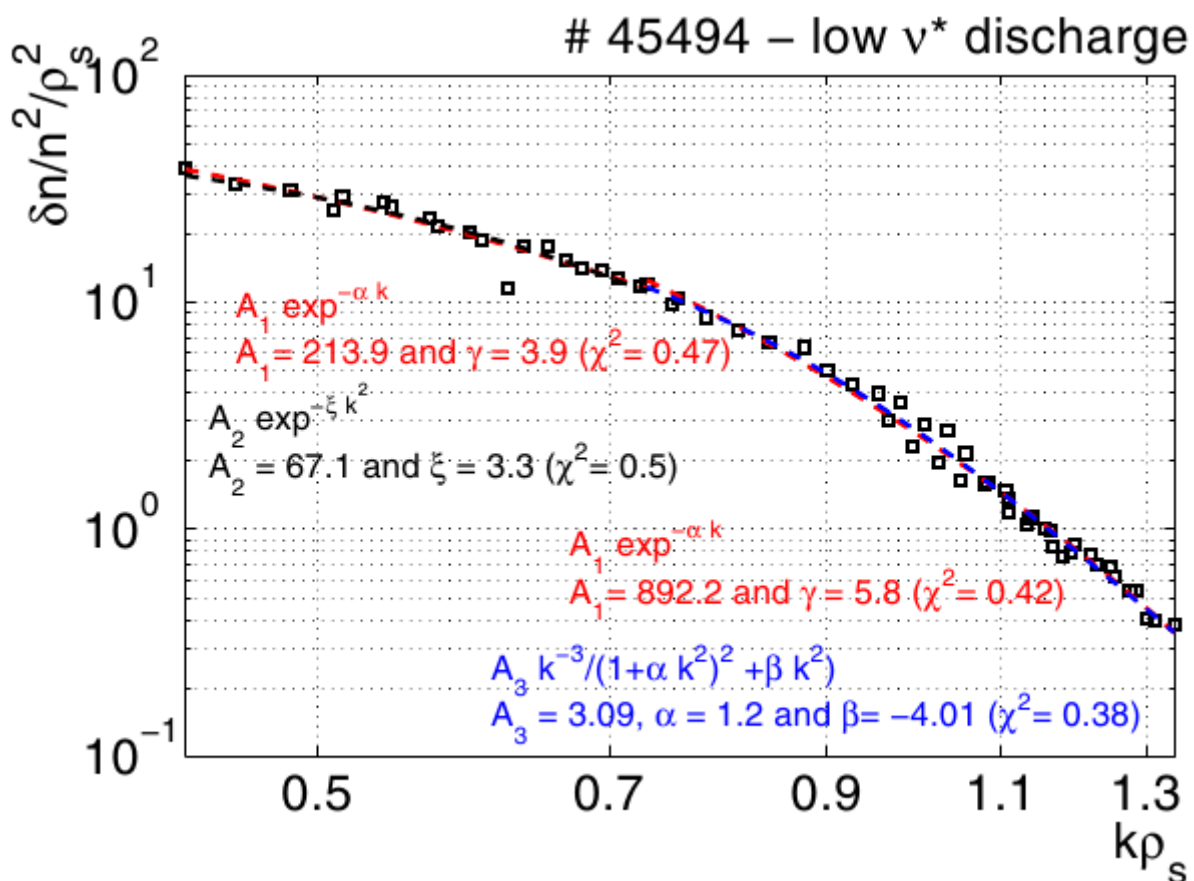
Le schéma ci-dessous montre l'application de ce diagnostic sur le même tokamak Tore Supra. Du fait de son origine, ce diagnostic est communément appelé réflectométrie Doppler, bien que le phénomène en cause soit en fait la rétrodiffusion collective.





*P. Hennequin*

Ce diagnostic permet une mesure localisée de l'intensité, et de la vitesse de rotation poloïdale (dans la direction du vecteur d'onde) de la micro-turbulence du plasma.



*L. Vermare et al. PoP (2011)*

Par exemple, il a permis une mesure fine du spectre en nombre d'onde de la turbulence, comme le montre la figure ci-dessous. Le nombre d'onde est ici normalisé à une échelle caractéristique du mouvement cyclotronique,  $\rho_s$  [Vermare2011]. À la différence de la turbulence de l'air, ce spectre en  $k$  ne suit pas une loi de puissance sur l'ensemble des nombres d'onde, mais semble plutôt proche

## 7.3 Fluctuations dans les propulseurs à effet Hall

Les propulseurs à effet Hall sont des propulseurs spatiaux de petite taille (typiquement de l'ordre de 10 cm de côté). Ces propulseurs sont utilisés pour corriger les orbites des satellites, ou pour diriger les sondes spatiales. Dans le fonctionnement de ces propulseurs, des fluctuations millimétriques semblent jouer un rôle décisif pour expliquer le transport des électrons. La diffusion collective a récemment permis d'observer pour la première fois ces fluctuations.

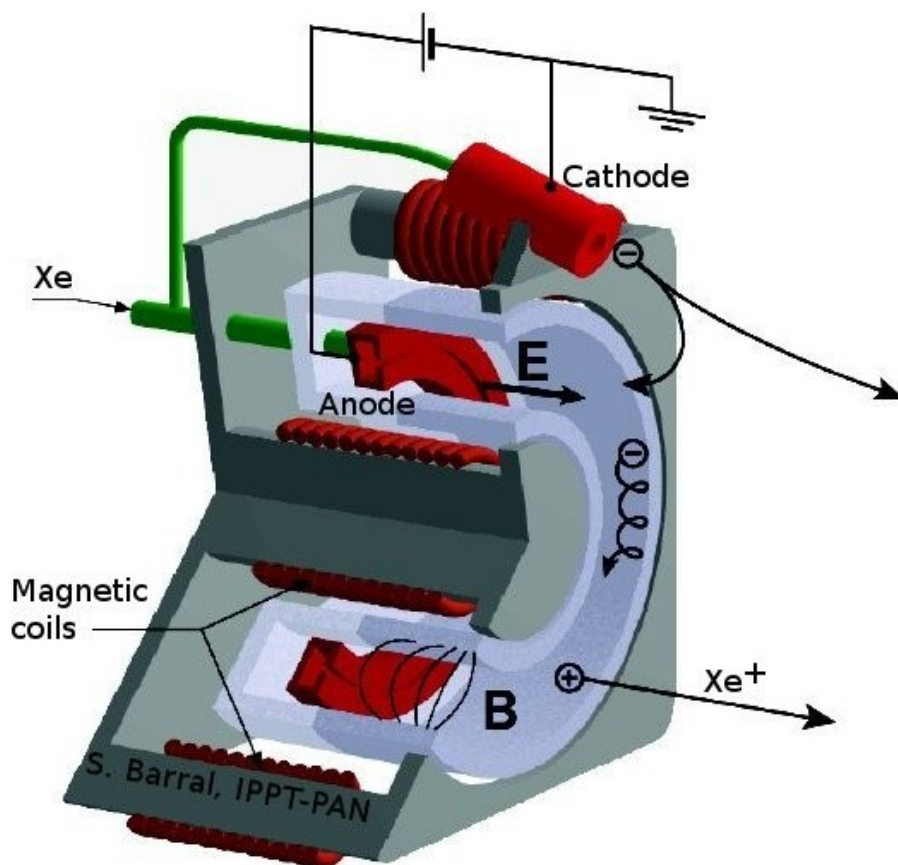
### 3.a Propulseur à effet Hall

Afin d'optimiser la poussée d'un propulseur, en limitant au minimum la masse éjectée, il faut donner une vitesse maximum au gaz propulsé. Une solution est alors d'ioniser ce gaz et d'utiliser un champ électrique accélérateur pour donner la plus grande impulsion aux ions du plasma. L'application la plus simple de ce principe est d'utiliser 2 grilles à des potentiels différents. Le gaz est ionisé par micro-ondes en amont de la première. La seconde grille les accélère. L'inconvénient de ce système est de nécessiter une alimentation complexe pour ioniser le gaz.

A. I. Morozov a remplacé ce système d'ionisation avec les 2 grilles par un champ magnétique [Morozov2000, Zhurin1999]. Le schéma ci-dessous montre le fonctionnement [Barral2004].

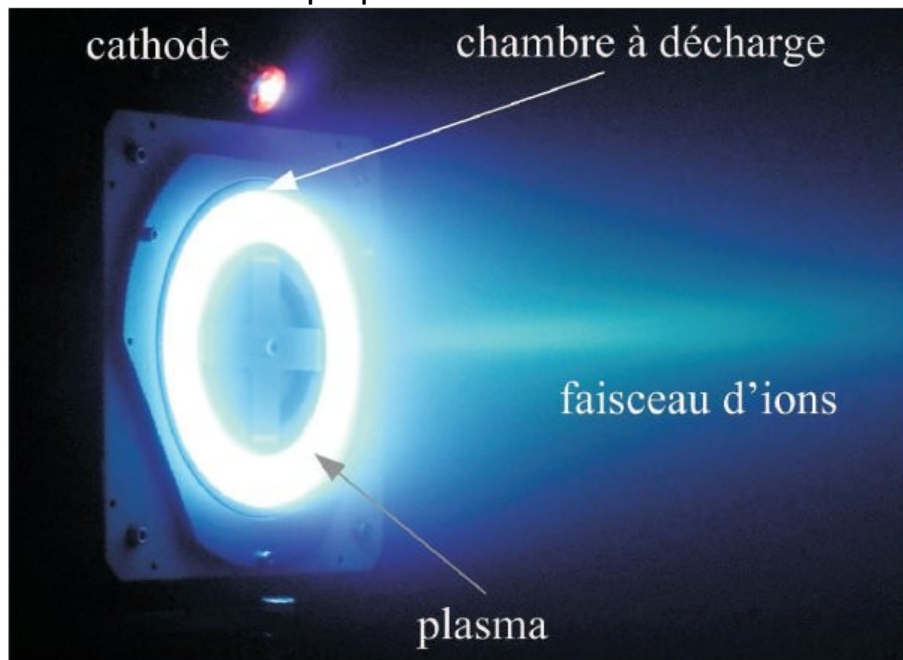
Une tension est maintenue entre une anode, à l'intérieur au fond d'un canal du propulseur, et une cathode placée à l'extérieur. La cathode creuse produit des électrons. Ces électrons sont attirés par l'anode au fond du canal. Un plasma étant un milieu conducteur, la chute de potentiel entre l'anode et la cathode est localisée à proximité des électrodes. Afin de localiser cette chute de potentiel en sortie de canal, un champ magnétique radial est créé à cet endroit. Ce champ magnétique confine les électrons à l'entrée du canal (par le guidage des lignes de champ). Ce confinement en limitant la conductivité des électrons, permet de localiser le champ électrique accélérateur dans cette zone, remplaçant ainsi la présence des grilles. Ce confinement des électrons favorise aussi l'ionisation du gaz au fond du canal. Ce système permet donc l'ionisation et l'accélération des ions (le champ magnétique n'est pas suffisamment fort pour confiner aussi les ions).

Le canal a une forme circulaire, car le champ magnétique radial et le champ électrique axial induisent une dérive de champ croisé (c'est l'effet Hall). Les électrons ont alors un mouvement azimutal dans le canal.



Ces propulseurs permettent des poussées de l'ordre de l'ordre de 100 mN, pour un flux de gaz de l'ordre de 5 mg/s.

La photo ci-dessous montre le propulseur en fonctionnement.



*Snecma*

Le fonctionnement du propulseur dépend de la conductivité des électrons dans le canal. Cependant, le transport des électrons à travers les lignes de champ magnétique est plus grand que le transport propre aux collisions. Ce transport pourrait être lié à des fluctuations millimétriques prévues dans la direction azimutale. Ce transport anormal rend plus difficile la simulation du fonctionnement du

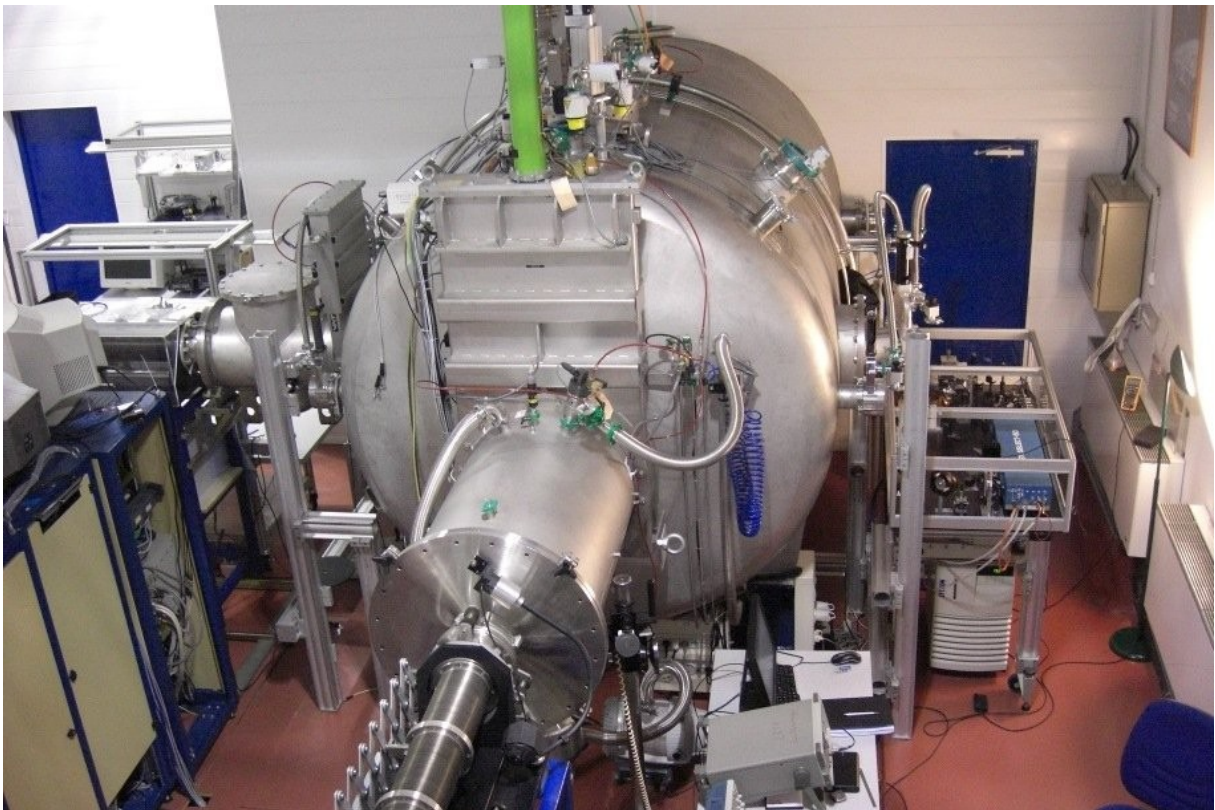


propulseur.

### 3.b Banc laser à haute sensibilité

La diffusion collective a permis d'observer ces fluctuations [Tsikata2009]. Le montage laser CO<sub>2</sub> pour l'observation de la turbulence de l'air est adapté pour l'observation du plasma en sortie de propulseur. Il nécessite néanmoins une sensibilité plus grande. Ce montage a un laser de 40 W, des miroirs avec un dépôt d'or pour limiter les pertes (1%), un détecteur avec une bonne efficacité quantique (70%), associé à une acquisition à haute résolution (14 bits), et une grande profondeur mémoire.

La photo ci-dessous montre l'installation de ce banc laser sur le banc d'essai des propulseurs PIVOINE.

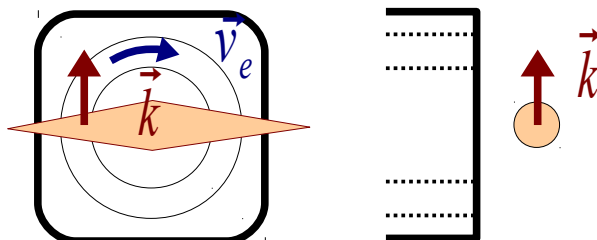


### 3.c Modes azimuthal et axial

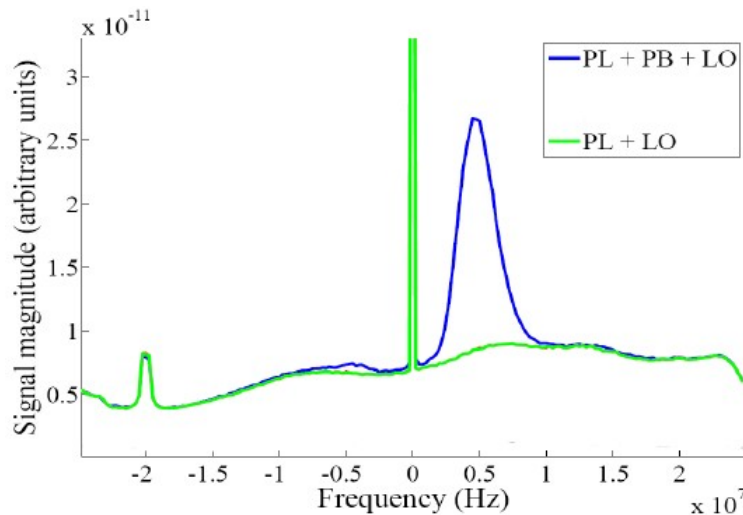
L'observation du plasma en sortie de propulseur a mis en évidence 2 modes de fluctuation différents : un mode azimuthal et un mode axial.

#### Mode azimuthal

Pour le mode azimuthal, le vecteur d'onde est dirigé essentiellement dans la direction azimuthale du canal, suivant la dérive de champ croisé des électrons.

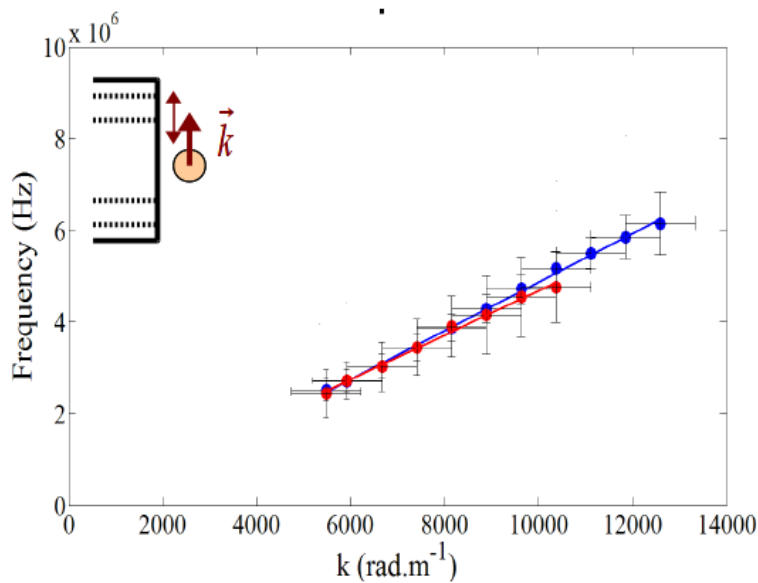


La figure ci-dessous montre la différence entre les spectres avec (PL+PB+LO) et sans faisceau primaire (PL+LO).



S. Tsikata

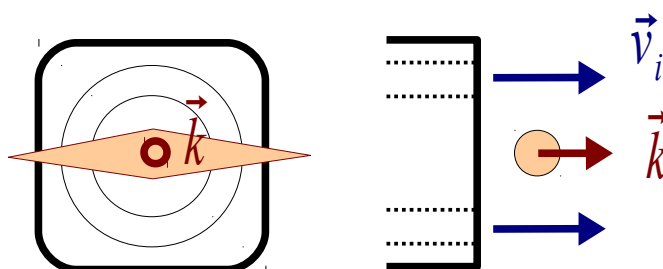
La relation de dispersion montre la variation de la fréquence moyenne du pic du spectre, avec le nombre d'onde. C'est une loi linéaire dont la pente, la vitesse de groupe, est de 3,4 km/s.



S. Tsikata

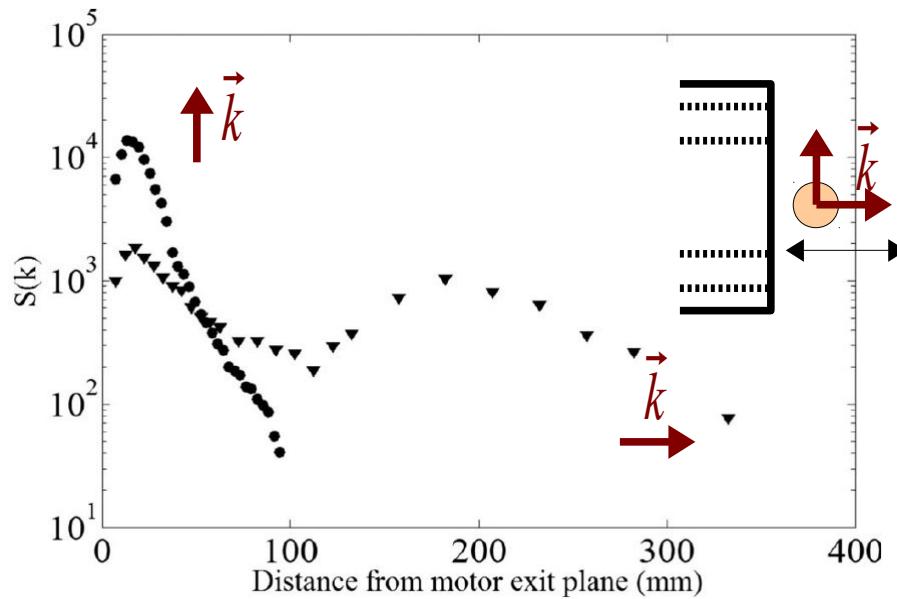
### Mode axial

La direction du mode axial est suivant l'axe de propulsion des ions. Il a une ouverture angulaire plus grande. Il a pour vitesse de groupe, une vitesse proche de celles des ions propulsés.



## Des modes très étendus spatialement

La figure ci-dessous montre que ces modes azimuthal et axial sont présents loin derrière le propulseur ; jusqu'à 10 cm en aval pour le mode azimuthal, et jusqu'à 30 cm pour le mode axial.



## 7.4 Autres applications

### 4.a Hélicon

L'observation par diffusion collective est possible dans des plasmas de taille plus modeste : l'hélicon. Un test de faisabilité a été effectué sur le réacteur HELIX [hardin2008]. Les paramètres du plasma sont proches du propulseur, La température électronique est de quelques électrons-Volt. La densité électronique est proche de  $10^{19} m^{-3}$ .

# 8 Annexe : propriétés des variables aléatoires continues

La première section de cette annexe rappelle quelques définitions et propriétés concernant les variables aléatoires continues. La seconde traite des couples de variables aléatoires.

## 8.1 Variable aléatoire continue

### 1.a Définition et exemples

#### Définition

Une variable aléatoire continue  $X$  est définie par :

- un intervalle continu de valeurs  $V$  (typiquement  $\mathbb{R}$  ou un intervalle de  $\mathbb{R}$  )
- une densité (ou distribution) de probabilité  $P$  , fonction (ou plus généralement distribution) définie de  $V$  vers  $\mathbb{R}^+$  , intégrable (  $\int_{\min(V)}^x P(x') dx'$  existe pour tout  $x \in V$  ), et telle que  $\int_V P(x) dx = 1$

$P(x) dx$  est la probabilité de trouver la variable  $X$  entre les valeurs  $x$  et  $x + dx$  .

Par raccourci, de manière impropre, on identifie souvent la variable aléatoire  $X$  et une de ces réalisations  $x$  .

#### Exemples

Les formes les plus communes de densité de probabilité sont les suivantes (  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}^{+*}$  ).

- La distribution exponentielle, définie sur  $\mathbb{R}^+$  :

$$P(x) = b e^{-bx}$$

- La distribution de Lorentz (ou Cauchy), définie sur  $\mathbb{R}$  :

$$P(x) = \frac{1}{\pi} \frac{b}{(x-a)^2 + b^2}$$

- La distribution gaussienne (ou normale), définie sur  $\mathbb{R}$  :

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} e^{-(x-a)^2/2b^2}$$

### 1.b Moyennes et moments

Dans la suite, nous considérons les distributions de probabilité définies pour les réels.

Nous pouvons définir, à condition que les intégrales suivantes convergent, les valeurs suivantes :

- la moyenne (ou valeur moyenne) de la distribution  $\mu_x$  :

$$\langle x \rangle = \int x P(x) dx = \mu_x$$

- plus généralement, la moyenne de la fonction  $f$  sur la distribution :

$$\langle f(x) \rangle = \int f(x) P(x) dx$$

- le  $m^{\text{ième}}$  moment de la distribution (pour  $m \in \mathbb{N}^*$ ) :

$$\langle x^m \rangle = \int x^m P(x) dx$$

- la variance (ou dispersion, ou écart quadratique moyen) :

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

L'intégrale définissant les moments n'est pas forcément convergente : par exemple pour la distribution de Lorentz, seul le premier moment, la moyenne, existe. La variance, et les moments suivants, n'existent pas.

## 1.c Fonction caractéristique

### Définition

La fonction caractéristique d'un variable aléatoire est la transformée de Fourier de sa distribution :

$$G(k) = \int e^{ikx} P(x) dx = \langle e^{ikx} \rangle$$

Les propriétés de la densité de probabilité induisent les propriétés suivantes pour la fonction caractéristique :

$$G(0) = 1$$

et,

$$\forall k \in \mathbb{R}, |G(k)| \leq 1$$

Pour la distribution de Lorentz, la fonction caractéristique a pour forme :

$$G(k) = e^{ika - b|k|}$$

Pour la distribution gaussienne :

$$G(k) = e^{ika - b^2 k^2 / 2}$$

### La fonction génératrice des moments

Si tous les moments de la distribution existent, la fonction caractéristique se développe suivant la série :

$$G(k) = 1 + ik \langle x \rangle - \frac{k^2}{2} \langle x^2 \rangle + \frac{(ik)^m}{m!} \langle x^m \rangle \dots$$

La fonction caractéristique est dite être la fonction génératrice des moments.

## 1.d Les cumulants

Les cumulants  $\kappa_m$  de  $X$  se définissent à partir du développement du logarithme de la fonction caractéristique de  $X$  :

$$\log G(k) = ik \kappa_1 - \frac{k^2}{2} \kappa_2 + \frac{(ik)^m}{m!} \kappa_m \dots$$

Les cumulants sont des fonctions algébriques des moments. Les quatre premiers s'écrivent :

$$\kappa_1 = \langle x \rangle = \mu_x$$

$$\kappa_2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \sigma_x^2$$

$$\kappa_3 = \langle x^3 \rangle - 3 \langle x^2 \rangle \langle x \rangle + 2 \langle x \rangle^3$$

$$\kappa_4 = \langle x^4 \rangle - 4 \langle x^3 \rangle \langle x \rangle - 3 \langle x^2 \rangle^2 + 12 \langle x^2 \rangle \langle x \rangle^2 - 6 \langle x \rangle^4$$

Le premier cumulante est la moyenne. Le deuxième cumulante est la variance, qui est aussi le carré de l'écart type,  $\sigma_x$ .

Pour la distribution gaussienne, par identification de la forme de  $\log G(k)$ , on trouve :  $\kappa_1 = a$ ,  $\kappa_2 = b$  et  $\kappa_m = 0$  pour  $m \geq 3$ .

À la différence des moments, les cumulants, à partir du deuxième, ne dépendent pas du centrage de la fonction : si on décale la variable aléatoire  $x$  de  $a$  quelconque,  $x' = x - a$ , la distribution de probabilité vérifie :  $P'(x) = P(x - a)$ . La fonction caractéristique est modifiée alors par :  $G'(k) = G(k)e^{-ika}$ . Alors seul le premier terme du développement en série du logarithme de la fonction caractéristique est modifié :  $\kappa_1' = \kappa_1 - a$ , et pour tout  $m \geq 2$ ,  $\kappa_m' = \kappa_m$ .

La variable centrée associée à  $x$ , souvent notée  $\tilde{x}$ , définie par  $\tilde{x} = x - \langle x \rangle$  simplifie alors le calcul des cumulants à partir des moments :

$$\tilde{\kappa}_1 = 0$$

$$\kappa_2 = \tilde{\kappa}_2 = \langle \tilde{x}^2 \rangle = \sigma_x^2$$

$$\kappa_3 = \tilde{\kappa}_3 = \langle \tilde{x}^3 \rangle$$

$$\kappa_4 = \tilde{\kappa}_4 = \langle \tilde{x}^4 \rangle - 3 \langle \tilde{x}^2 \rangle^2$$

Le calcul des cumulants effectué à partir de la variable centrée, montre que le troisième cumulante sera non nul, à condition que la distribution  $P$  ne soit pas symétrique par rapport à sa moyenne : on définira le coefficient de dissymétrie de la distribution (en anglais : skewness) en normalisant ce troisième cumulante par le cube de l'écart type :

$$\gamma_1 = \frac{\kappa_3}{\sigma_x^3} = \frac{\langle \tilde{x}^3 \rangle}{\sigma_x^3}$$

Le quatrième cumulante sera strictement positif si les valeurs éloignées de la valeur moyenne ont un poids important par rapport à celles proches, comparativement à la distribution gaussienne : on définira le coefficient d'aplatissement de la distribution (en anglais : kurtosis) en normalisant ce quatrième cumulante par une puissance de l'écart type :

$$\gamma_2 = \frac{\kappa_4}{\sigma_x^4} = \frac{\langle \tilde{x}^4 \rangle}{\sigma_x^4} - 3$$

## 8.2 Variables aléatoires couplées

### 2.a Variables aléatoires couplées et indépendance

Cette section introduit la notion de  $n$  variables réelles aléatoires  $x_1 \dots x_n$ , définies sur  $n$  intervalles réels  $V_1 \dots V_n$ . Elles sont couplées par la distribution de probabilité à  $n$  variables,  $P(x_1, \dots, x_n)$ , définie de  $(V_1, \dots, V_n)$  vers  $\mathbb{R}^+$ , intégrable et vérifiant :

$$\int_{V_1} \dots \int_{V_n} P(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1 .$$

La loi marginale pour chaque variable  $P_m$  est la distribution de probabilité propre à chaque variable, ne sachant rien de la valeur des autres variables. Elle se déduit de la distribution globale par intégration sur toutes les autres variables :

$$P_1(x_1) = \int_{V_2} \dots \int_{V_n} P(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n$$

$$P_2(x_2) = \int_{V_1} \int_{V_3} \dots \int_{V_n} P(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_3 \dots dx_n \dots$$

### Indépendance

Les variables  $x_1$  à  $x_n$  sont indépendantes si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (V_1, \dots, V_n) \quad P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{m=1}^n P_m(x_m)$$

### Probabilité conditionnelle

Par simplicité d'écriture, nous nous limiterons à 2 variables. La notion se généralise aisément à  $n$  variables.

La probabilité conditionnelle,  $P(x_1|x_2)$ , est la probabilité de  $x_1$  connaissant la valeur de la seconde,  $x_2$ . Elle vaut :

$$P(x_1|x_2) = \frac{P(x_1, x_2)}{P_2(x_2)}$$

La probabilité conditionnelle vérifie :

$$\int_{V_1} P(x_1|x_2) dx_1 = 1$$

Les variables  $x_1$  et  $x_2$  sont indépendantes si et seulement si

$$X_1 X_2 \text{ indépendantes} \Leftrightarrow \forall (x_1, x_2) \in (V_1, V_2) \quad P(x_1|x_2) = P_1(x_1)$$

## 2.b Fonction caractéristique, moments et cumulants

### Moments

En plus des moments propres à chaque variable, il est possible de définir des moments croisés entre variable :

$$\langle x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \rangle = \int_{V_1} \dots \int_{V_n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} P(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que pour tout couple de variables aléatoires (si les moments d'ordre 2 existent) :

$$\langle x_1 x_2 \rangle^2 \leq \langle x_1^2 \rangle \langle x_2^2 \rangle$$

La notion de fonction caractéristique se généralise aussi aisément :

$$G(k_1, \dots, k_n) = \int_{V_1} \dots \int_{V_n} e^{ik_1 x_1 + \dots + ik_n x_n} P(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Si les variables sont indépendantes, la fonction caractéristique de la somme de variables indépendantes est le produit des fonctions caractéristiques de chaque variable :

$$X_1 \dots X_n \text{ indépendants} \Rightarrow G_{X_1 + \dots + X_n}(k_1, \dots, k_n) = \prod_{m=1}^n G_{X_m}(k_m)$$

La notion de cumulants peut aussi se généraliser au cas multidimensionnel, en développant en série le logarithme de la fonction caractéristique sur l'ensemble des



variables. Les cumulants d'ordre  $m$  forment une matrice de taille  $n^m$ .

Les premiers cumulants sont au nombre de  $n$  : ce sont les moyennes suivant chaque direction :

$$\mu_m = \langle x_m \rangle$$

Les seconds cumulants forment une matrice de taille  $n^2$ , appelée matrice de variance. Ces éléments valent :

$$\sigma_{ml} = \langle x_m x_l \rangle - \langle x_m \rangle \langle x_l \rangle$$

Cette matrice est symétrique.

Les termes diagonaux sont les variances propres à chaque variable. Les termes non diagonaux sont appelés covariances.

Si la covariance de 2 variables est nulle, on dit que ces variables sont non corrélées. Des variables indépendantes sont toujours non corrélées. Mais l'inverse n'est pas vrai : la condition d'indépendance des variables est beaucoup plus restrictive que la notion de corrélation de leurs valeurs.

On introduit la notion de coefficient de corrélation :

$$\rho_{ml} = \frac{\sigma_{ml}}{\sigma_m \sigma_l}$$

Du fait de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\rho_{ml}| \leq 1$$

### Loi de probabilité gaussienne à plusieurs variables

La forme gaussienne de la loi de probabilité peut se généraliser à  $n$  dimensions. Le vecteur  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$  regroupe l'ensemble des variables aléatoires. La forme gaussienne est déterminée par le vecteur des moyennes  $\bar{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  et par la matrice de variance,  $\Sigma$ , définie positive :

$$P(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \det(\Sigma)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\bar{x} - \bar{\mu}) \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\bar{x} - \bar{\mu})}$$

La fonction génératrice de la loi gaussienne multidimensionnelle s'écrit pour le vecteur  $\bar{k} = (k_1, \dots, k_n)$  :

$$G(\bar{k}) = e^{i \bar{k} \cdot \bar{\mu} - \frac{1}{2} \bar{k} \cdot \Sigma \cdot \bar{k}}$$

# 9 Annexe : propriétés du spectre d'un signal de puissance finie

## Énergie ou puissance finie

Le terme de spectre (ou densité spectrale) est utilisé de manière équivalente pour deux types de signaux de nature différente : ceux à énergie finie et ceux à puissance finie.

### Signal à énergie finie

Le signal  $u(t)$  à énergie finie correspond au cas, le plus usuel, où l'énergie (la variance du signal) intégrée sur tout l'espace converge :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt < +\infty$$

On peut alors appliquer l'analyse de Fourier classique. Nous la rappelons dans la première partie.

### Signal de puissance finie

Cette analyse n'est pas possible, dans le cas où l'énergie de la fonction diverge. Ce sera pour nous typiquement le cas pour les signaux temporels issues de la diffusion sur la turbulence à flux continu  $s(t)$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = +\infty$$

Néanmoins, si la moyenne temporelle du carré du signal a une limite finie quand la durée d'intégration tend vers l'infini, nous allons pouvoir adapter l'analyse de Fourier et donner une nouvelle définition du spectre :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt < +\infty$$

Nous parlons alors de signal à puissance finie.

La notion de spectre et de corrélation étant commune aux deux types de signaux, mais avec des définitions et des propriétés différentes, le lecteur doit être attentif au type de signal auquel la notion s'applique.

## 9.1 Fonction à énergie finie

### 1.a Transformée de Fourier, autocorrélation et spectre

La transformée du Fourier du signal est donnée par :

$$\hat{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{i\omega t} dt$$

Son expression dans le domaine fréquentiel diffère :

$$\check{u}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{i2\pi f t} dt = \hat{u}(2\pi f)$$

Le spectre est défini par le module au carré de la transformée de Fourier:

$$U(\omega) = |\hat{u}(\omega)|^2$$

Nous définissons la corrélation temporelle du signal par :

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u^*(t) u(t + \tau) dt$$

Il existe alors une relation directe par transformée de Fourier entre la corrélation et

le spectre :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau C(\tau) e^{i2\pi f\tau}$$

La relation entre les deux se retrouvent par changement de variables à l'intérieur des intégrales. Le calcul est équivalent à celui pour les signaux à puissance finie que nous verrons plus loin.

La relation de Parseval appliquée aux signaux à énergie finie, donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt = C(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(f) df$$

## 1.b Relation d'incertitude

Une propriété importante de la transformation de Fourier est la relation d'incertitude. Elle découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz [Appel2008]. Elle est applicable si les intégrales  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |u(t)|^2 dt$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} |u'(t)|^2 dt$  existent.

Dans ce cas, les variances :

$$\langle t^2 \rangle = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |u(t)|^2 dt$$

et :

$$\langle \omega^2 \rangle = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(\omega)|^2 d\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |\hat{u}(\omega)|^2 d\omega = \frac{16\pi^4}{\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |u'(t)|^2 dt$$

vérifient la relation :

$$\langle t^2 \rangle \langle \omega^2 \rangle \geq \frac{1}{4}$$

De plus  $\langle t^2 \rangle \langle \omega^2 \rangle = 1/4$  si et seulement si  $u(t)$  est une fonction gaussienne centrée.

Il faut noter que  $\langle t^2 \rangle$  et  $\langle \omega^2 \rangle$  sont calculer à partir de l'intégrale des carrés des fonctions :  $|u(t)|^2$  et  $|\hat{u}(\omega)|^2$ .

Pour une fonction gaussienne de variance  $\sigma^2$  :

$$u(t) = e^{-t^2/2\sigma^2}$$

la transformée de Fourier est aussi gaussienne :

$$\hat{u}(\omega) = e^{-\omega^2\sigma^2/2}$$

Les 2 largeurs sont la moitié des des variances des gaussiennes :

$$\langle t^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{2}$$

et

$$\langle \omega^2 \rangle = \frac{1}{2\sigma^2}$$

La relation d'incertitude est alors bien dans ce cas une égalité.

En conséquence pour l'autocorrélation et le spectre, plus l'autocorrélation aura une largeur étroite en temps, plus le spectre sera large en fréquence.

## 9.2 Signal à puissance finie

### 2.a Spectre d'un signal de puissance finie

Les signaux temporels que nous manipulons, comme le signal de diffusion collective appliquée à la turbulence sont des signaux temporels aléatoires. Ces signaux étant continus dans le temps, l'énergie d'un tel signal  $s(t)$  diverge :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = +\infty$$

On ne peut alors pas calculer de spectre par la transformée de Fourier pour tous les temps.

En revanche, leur puissance, la moyenne temporelle sur une durée finie, est finie. On peut alors définir la variance temporelle du signal par :

$$\langle |s(t)|^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt \quad (9.1)$$

Pour analyser les fréquences du signal, nous pouvons effectuer une transformée de Fourier sur une durée arbitraire  $T$  :

$$\hat{s}_T(\omega) = \int_T s(t) e^{i\omega t} dt$$

Nous utiliserons aussi l'expression en fonction de la fréquence :

$$\check{s}_T(f) = \int_T s(t) e^{i2\pi f t} dt = \hat{s}_T(2\pi f)$$

Nous introduisons le spectre fréquentielle du signal :

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} |\hat{s}_T(\omega)|^2 \quad (9.2)$$

La normalisation du spectre est  $1/T$  et non en  $1/T^2$ . En effet, pour 2 intervalles de temps distincts  $I_1 = [T; T']$  et  $I_2 = [T'; T'']$  qui ne sont pas corrélés, le module de carré de  $s(\omega)$  sur l'union des 2 intervalles de temps s'écrit :

$$|\hat{s}_{1+2}(\omega)|^2 = (\hat{s}_1(\omega) + \hat{s}_2(\omega))(\hat{s}_1^*(\omega) + \hat{s}_2^*(\omega))$$

après développement :

$$|\hat{s}_{1+2}(\omega)|^2 = |\hat{s}_1(\omega)|^2 + |\hat{s}_2(\omega)|^2 + 2 \Re(\hat{s}_1(\omega) \hat{s}_2^*(\omega))$$

Pour des intervalles non corrélés,  $\hat{s}_1(\omega) \hat{s}_2^*(\omega) = 0$  :

$$|\hat{s}_{1+2}(\omega)|^2 = |\hat{s}_1(\omega)|^2 + |\hat{s}_2(\omega)|^2$$

Les modules au carré de  $s_T(\omega)$  sur des intervalles non corrélés, s'ajoutent. Sur des temps  $T$ , bien plus grands que le temps corrélation du signal  $s(t)$ , le module au carré  $|\hat{s}_T(\omega)|^2$  ne croît alors pas comme  $T^2$ , mais augmente linéairement avec le temps  $T$ .

### 2.b Autocorrélation temporelle et spectre fréquentiel

#### Relation entre autocorrélation et spectre

Pour les signaux à puissance finie, l'autocorrélation et le spectre sont liés par transformée de Fourier.

L'autocorrélation temporelle du signal  $s(t)$  s'écrit :

$$C(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^*(t) s(t+\tau) dt \quad (9.3)$$

Le spectre peut s'écrire :

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^*(t) e^{-i2\pi f t} dt \int_{-T/2}^{T/2} s(t') e^{i2\pi f t'} dt'$$

Les 2 intégrations sont imbriquées :

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} s^*(t) s(t') e^{i2\pi f (t'-t)} dt dt'$$

Un changement de variable est nécessaire :  $t' \rightarrow \tau$   $\tau = t' - t$   $d\tau = dt'$  :

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T \int_{\min(-T/2, \tau)}^{\max(T/2+\tau, T/2)} s^*(t) s(t+\tau) e^{i2\pi f \tau} dt d\tau$$

Les facteurs sont réorganisés :

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T \left( \frac{1}{T} \int_{\min(-T/2, \tau)}^{\max(T/2+\tau, T/2)} s^*(t) s(t+\tau) dt \right) e^{i2\pi f \tau} d\tau$$

D'où la relation entre le spectre fréquentiel et l'autocorrélation temporelle :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau C(\tau) e^{i2\pi f \tau} \quad (9.4)$$

### Formule de Parseval

L'équivalent de la formule de Parseval pour les signaux à énergie finie permet de relier la moyenne temporelle du signal à l'intégrale du spectre :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt = C(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) df \quad (9.5)$$

### Relation d'incertitude

Il n'y a pas d'équivalent à la relation d'incertitude pour les signaux à puissance finie. Néanmoins, comme le spectre est la transformée de Fourier de l'autocorrélation, la relation d'incertitude peut être appliquée à l'autocorrélation : elle donne alors une relation entre la largeur de l'autocorrélation et la largeur du spectre.

# 10 Annexe : Le mode gaussien

## 10.1 Le mode gaussien

La description des faisceaux par un profil gaussien de taille (waist en anglais) constante n'est qu'une expression approchée d'un mode fondamental de propagation d'une onde électromagnétique, valable en champ proche.

Comme ce mode a une extension spatiale finie, par les lois de la diffraction, elle doit diverger en champ lointain. Nous rappellerons les lois de la diffraction. Elle nous permettront d'étudier l'effet d'un diaphragme sur le faisceau.

Nous verrons aussi comment établir la forme de ce mode à partir des équations de Maxwell. Nous décrivons dans la section suivante les propriétés de ce mode : sa divergence. Cette solution par une équation de proche en proche nous permettra d'aborder la transformation de ce mode par une lentille.

### 1.a Première approche : La diffraction de Fresnel

Les lois de la diffraction s'appliquent pour une onde monochromatique de pulsation  $\omega_i$  à polarisation linéaire. Elles s'appliquent à la partie spatiale du champ électrique (ou magnétique) de l'onde :

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \Re (E_{i0}(\vec{r}) \vec{e}_x e^{i\omega_i t})$$

La diffraction, permet de calculer la forme du champ scalaire en aval ( $z > 0$ ) du plan initial, directement à partir de la valeur du champ dans le plan initial ( $z' = 0$ ).

La valeur du champ dans le plan initial est donnée : Il s'agira d'une onde plane à profil gaussien de taille  $w$  :

$$E_{i0}(r, z) = E_{iM} e^{-r^2/w_0^2}$$

Comme nous le verrons plus loin, la taille faisceau gaussien diverge depuis le plan où l'onde est plane : ce plan initial est également appelé le plan de pincement du faisceau gaussien.

#### Principe de la diffraction d'Huygens-Fresnel

Suivant le principe de la diffraction d'Huygens-Fresnel, chaque point du plan initial est considéré comme une source. La valeur du champ est calculée comme la superposition des ondes sphériques issues de chacune de ces sources ponctuelles.

La loi de Sommerfeld donne une solution approchée de l'équation d'onde dans le vide, valable si la distance entre le plan initial et le point de mesure est grande devant la longueur d'onde :

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \gg \lambda_i$$

Le champ électrique au point  $\vec{r}$  est alors donné par la l'intégrale :

$$E_{i0}(\vec{r}) = \frac{1}{i\lambda_i} \iint_{-\infty}^{+\infty} E_{i0}(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{e}_z}{(\vec{r} - \vec{r}')^2} e^{-ik_i |\vec{r}' - \vec{r}|} dx' dy'$$

où, pour simplifier l'écriture, nous notons :

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

$$\vec{r}' = x' \vec{e}_x + y' \vec{e}_y$$

## Diffraction de Fresnel : approximation paraxiale

On se place dans l'approximation paraxiale, où la dimension du faisceau dans le plan initial  $a$ , et la distance du point de mesure à l'axe sont petites devant la distance suivant l'axe :

$$z^2 \gg (x-x')^2 + (y-y')^2$$

L'expression de la distance  $|\vec{r}-\vec{r}'|$  se développe au premier ordre :

$$|\vec{r}-\vec{r}'| \sim z + \frac{(x-x')^2}{2z} + \frac{(y-y')^2}{2z}$$

L'expression du facteur de décroissance des ondes sphériques centrées sur chaque source, se simplifie comme le facteur de décroissance d'une onde sphérique unique :

$$\frac{(\vec{r}-\vec{r}') \cdot \vec{e}_z}{(\vec{r}-\vec{r}')^2} \sim \frac{1}{z}$$

Cette approximation correspond à la loi de la diffraction de Fresnel :

$$E_{i0}(x, y, z) = \frac{e^{-ik_i z}}{i\lambda_i z} \iint E_{i0}(x', y', 0) e^{-ik_i [(x-x')^2 + (y-y')^2]/2z} dx' dy'$$

Cette approximation n'est a priori pas valide pour le profil initial gaussien : celui-ci s'étend dans tout le plan initial. Néanmoins sa décroissance radiale est suffisamment rapide pour pouvoir considérer que sa dimension est finie. Elle est proportionnelle à la taille initiale du faisceau :

$$a = 2w_0$$

Nous justifierons plus loin le choix du facteur de proportionnalité.

Appliquée au profil gaussien du faisceau dans le pincement, la formule de la diffraction de Fresnel permet de retrouver l'expression analytique de son expansion suivant l'axe de propagation. Le résultat est le même que la solution que nous trouverons par la résolution de l'équation d'onde dans la section suivante.

## Diffraction de Fraunhofer : approximation en champ lointain

On se place en champ lointain : la distance sur l'axe  $z$  est grande devant la longueur de Fresnel associée à la dimension du faisceau dans le plan initial  $a$  :

$$z \gg a^2/\lambda_i .$$

$$\frac{(x-x')^2}{2z} + \frac{(y-y')^2}{2z} \sim \frac{x^2}{2z} + \frac{x^2}{2z} - \frac{xx'}{z} - \frac{yy'}{z}$$

La diffraction de Fresnel se reformule, en champ lointain, par l'intégrale de Fraunhofer :

$$E_{i0}(x, y, z) = \frac{e^{-ik_i z}}{i\lambda_i z} e^{-ik_i(x^2+y^2)/2z} \iint E_{i0}(x', y', 0) e^{ik_i(xx'+yy')/z} dx' dy'$$

Les 2 premiers facteurs décrivent la forme de l'onde : la forme sphérique du front d'onde et la décroissance en  $1/z$  de son module.

L'intégrale s'écrit comme une transformée de Fourier suivant les 2 directions transverses  $x$  et  $y$  :



$$E_{i0}(x, y, z) = \frac{e^{-ik_i z}}{i\lambda_i z} e^{-ik_i(x^2+y^2)/2z} \hat{E}_{i0}^* \left( \frac{k_i x}{z}, \frac{k_i y}{z}, 0 \right)$$

où

$$\hat{E}_{i0}(k_x, k_y, 0) = \iint_{-\infty}^{+\infty} E_{i0}(x, y, 0) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

Le module du champ électrique en champ lointain ne dépend plus que de  $x$  et  $y$ , à travers les angles dans chacune des deux directions transverses :

$$|E_{i0}(x, y, z)| = \frac{1}{\lambda_i z} |\hat{E}_{i0}(k_i \xi_x, k_i \xi_y, 0)|$$

où

$$\xi_x = x/z$$

$$\xi_y = y/z$$

Du fait de cette transformée de Fourier, la largeur angulaire en champ lointain est reliée la largeur du profil dans le plan initial par la relation d'incertitude :

$$\langle x_0^2 \rangle k_i^2 \langle \xi_x^2 \rangle \geq \frac{1}{4}$$

où

$$\langle x_0^2 \rangle = \frac{1}{\iint |E_{i0}(x, y, 0)|^2 dx dy} \iint x^2 |E_{i0}(x, y, 0)|^2 dx dy$$

et

$$\langle \xi_x^2 \rangle = \frac{1}{\iint |\hat{E}_{i0}(k_x, k_y)|^2 dk_x dk_y} \iint \frac{k_x^2}{k_i^2} |\hat{E}_{i0}(k_x, k_y, 0)|^2 dk_x dk_y$$

Pour le profil gaussien, cette inégalité devient une égalité : Le profil gaussien est le profil pour lequel, à taille initiale fixée ( $\langle x_0^2 \rangle$ ), l'angle de divergence en champ lointain est le plus faible.

Les variances ne sont pas calculées sur le champ lui-même, mais son module au carré : Ce sont donc les variances de la distribution de puissance électromagnétique qui rentrent en compte ici.

### Divergence gaussienne du mode gaussien

Pour le profil gaussien :

$$E_{i0}(r, z) = E_{iM} e^{-r^2/w_0^2}$$

La distribution angulaire en champ lointain vaut :

$$E_{i0}(x, y, z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{-ik_i z}}{i\lambda_i z} e^{-ik_i(x^2+y^2)/2z} e^{-(x^2+y^2)k_i^2 w_0^2/2z^2}$$

### Diffraction de Fresnel à symétrie axiale

La formule de diffraction de Fresnel se simplifie si le profil dans le plan initial est à symétrie axiale autour de l'axe de propagation  $\vec{e}_z$  :

$$E_{i0}(r, z) = \frac{k_i}{iz} e^{-ik_i z} e^{-ik_i r^2/2z} \int_0^a E_{i0}(r', 0) J_0(k_i r r'/z) e^{-ik_i r'^2/2z} r' dr'$$

où  $J_0$  est la fonction de Bessel d'ordre 0, définie par :

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \theta} d\theta$$

## 1.b Équation de l'onde paraxiale

### Équations de Maxwell

Pour retrouver la forme du mode gaussien, nous revenons aux équations de Maxwell que nous appliquons à l'onde incidente. L'équation de Maxwell-Ampère est appliquée dans l'air, décrit comme un milieu linéaire, homogène, isotrope, non magnétique, non dispersif et sans perte. Le milieu est un espace libre, sans terme source :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_i(\vec{r}, t) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}_i(\vec{r}, t)$$

que nous associerons avec l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_i(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_i(\vec{r}, t)$$

En utilisant l'identité vectorielle  $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})) - \nabla^2 \vec{A}$ , le fait que dans le milieu est sans source  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_i(\vec{r}, t) = 0$ , ainsi que les relations

$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{C^2}$  et la définition de l'indice optique  $\varepsilon = n^2$  nous retrouvons l'équation d'onde :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}_i(\vec{r}, t) - \frac{n^2}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}_i(\vec{r}, t) = 0$$

### Équation d'Helmutz

Nous cherchons les solutions monochromatiques à la pulsation  $\omega_i$  :

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \Re (\vec{E}_{i0}(\vec{r}) e^{i\omega_i t})$$

La partie spatial du champ doit alors suivre l'équation d'Helmutz portant sur les variations spatiales du champ :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}_{i0}(\vec{r}) + k_i^2 \vec{E}_{i0}(\vec{r}) = 0$$

où  $k_i = n\omega_i/C$  est le nombre d'onde de l'onde à la pulsation  $\omega_i$  dans le milieu d'indice  $n$ .

Nous supposons qu'il existe des solutions à polarisation linéaire :

$$\vec{E}_{i0}(\vec{r}) = E_{i0}(\vec{r}) \vec{e}_x$$

L'équation vectorielle est remplacée par une équation scalaire :

$$\vec{\nabla}^2 E_{i0}(\vec{r}) + k^2 E_{i0}(\vec{r}) = 0$$

Cette équation a une solution simple, l'onde plane, homogène dans tout l'espace :

$$E_{i0}(\vec{r}) = E_{iM} e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$$

où la direction de  $\vec{k}_i$  est quelconque.

Appliqué à tout l'espace, sauf un point origine quelconque, l'onde sphérique est

aussi une solution :

$$E_{i0}(\vec{r}) = \frac{A_{iM}}{r} e^{-ik_i r} .$$

Ces solutions occupent tout l'espace. Du fait de la diffraction, une onde confinée dans l'espace ne conserve pas son profil original. Il n'y a pas de solution évidente où l'onde a une extension finie dans l'espace.

### Équation de l'onde paraxiale

Nous cherchons alors plus généralement des solutions sous forme d'une onde dirigée suivant la direction  $\vec{e}_z$ , avec un profil  $u_i(\vec{r})$  :

$$E_{i0}(\vec{r}) = E_{iM} u_i(\vec{r}) e^{-ik_i z} .$$

$E_{iM} = \max |E_{i0}(\vec{r})|$  est la maximum du module du champ. Le profil est alors une fonction spatiale sans dimension, qui doit alors vérifier alors  $\max(u_i(\vec{r})) = 1$ . Le produit  $E_{iM} u_i(\vec{r})$  est l'enveloppe du champ  $E_{i0}(\vec{r})$ .

Le profil doit satisfaire l'équation :

$$\vec{\nabla}^2 u_i(\vec{r}) - 2ik_i \frac{\partial}{\partial z} u_i(\vec{r}) = 0$$

On suppose que les variations du profil suivant l'axe de propagation sont lentes comparé à la longueur d'onde :

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} \ll 2k_i \frac{\partial u_i}{\partial z}$$

L'équation du profil se simplifie alors en l'équation d'onde paraxiale :

$$\vec{\nabla}_{\perp}^2 u_i(\vec{r}) - 2ik_i \frac{\partial}{\partial z} u_i(\vec{r}) = 0$$

où  $\vec{\nabla}_{\perp}^2$  correspond au laplacien dans la direction perpendiculaire à la propagation :

$$\vec{\nabla}_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

## 1.c Solution de l'équation d'onde paraxiale

### Forme symétrique de solution recherchée

Nous recherchons des solutions à symétrie axiale de l'équation :  $u_i(\vec{r}) = u_i(r, z)$  où  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . L'équation de l'onde paraxiale s'écrit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} u_i \right) - 2ik_i \frac{\partial}{\partial z} u_i = 0$$

Nous recherchons des solutions qui s'approchent du profil gaussien uniforme suivant z,  $u_i(r, z) = u_{i0} e^{-r^2/w_0^2}$ . Celui-ci n'est pas solution de l'équation, car du fait de la divergence naturelle, l'onde devient une onde sphérique à longue distance : la forme doit inclure une taille dépendant de z,  $w(z)$ , et un terme de phase décrivant la forme sphérique des fronts d'onde :  $e^{-ikr^2/2R(z)^2}$ . Du fait de la divergence, et afin de conserver la puissance de l'onde, la normalisation doit aussi dépendre de z,  $u_{i0}(z)$ . Nous allons rechercher des solutions de la forme :

$$u_i(r, z) = u_{iz}(z) e^{-r^2/w(z)^2 - i k_i r^2 / 2 R(z)}$$

L'équation de l'onde paraxiale va être réécrite une équation différentielle du premier ordre sur les fonctions  $u_{iz}(z)$ ,  $w(z)$  et  $R(z)$ . Nous donnons les conditions initiales dans le plan origine  $z=0$  correspondant à un profil gaussien : l'onde a pour taille  $w(0)=w_0$  ; le front d'onde est plan :  $R(0)=+\infty$ . L'onde étant plane dans ce plan, elle divergera à partir de celui. C'est dans ce plan que  $u_{iz}(z)$  sera maximum :  $u_{iz}(0)=1$ . Le profil initial s'exprime alors :

$$u_i(r, z=0) = e^{-r^2/w_0^2}$$

### Les paramètres p et q

Pour simplifier l'écriture, nous introduisons les 2 paramètres complexes  $p(z)$  et  $q(z)$  pour séparer les variations sur l'axe, des variations radiales du mode.

$p(z)$  est définie par :

$$u_{iz}(z) = e^{-i p(z)}$$

La partie réelle de  $p(z)$  exprime donc la phase du mode le long de l'axe de propagation. Sa partie imaginaire contient l'information sur l'amplitude du champ sur l'axe.

Le paramètre  $q(z)$  est défini par :

$$u_i(r, z) = u_{iz}(z) e^{-i k_i r^2 / 2 q(z)}$$

la partie réelle de  $1/q(z)$  décrit les variations radiales de la phase. Sa partie imaginaire décrit la décroissance radiale de l'amplitude du champ.

$1/q(z)$  s'exprime par :

$$1/q(z) = 1/R(z) - 2i/k_i w^2(z)$$

Le profil du mode s'exprime alors :

$$u_i(r, z) = e^{-i p(z) - i k_i r^2 / 2 q(z)}$$

### Résolution par les paramètres p et q

Nous introduisons cette forme dans l'équation de l'onde paraxiale :

$$\left[ \left( \frac{-k^2}{q^2} r^2 - \frac{2i k_i}{q} \right) - 2i k_i \left( -i \frac{d p}{d z} - i \frac{k_i r^2}{2 q^2} \frac{d q}{d z} \right) \right] u = 0$$

soit, en réarrangeant les termes :

$$\left[ \left( \frac{-k_i^2}{q^2} - 2k \frac{k_i}{2 q^2} \frac{d q}{d z} \right) r^2 + \left( \frac{-2i k_i}{q} - 2 k_i \frac{d p}{d z} \right) \right] u = 0$$

Nous cherchons des solutions non triviales ( $u_i \neq 0$ ), vérifiant l'équation pour tout  $r$ . Les 2 facteurs entre parenthèses doivent alors être nuls. Le profil doit alors être solution du système d'équations :

$$\frac{d q}{d z} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{d p}{d z} = \frac{-i}{q}$$

À l'origine  $z=0$  , les valeurs initiales sont :

$$q(0)=i z_R$$

$$p(0)=0$$

où  $z_R$  est la longueur de Rayleigh :

$$z_R = k_i w_0^2 / 2 = \pi w_0^2 / \lambda_i$$

La solution pour  $q(z)$  est simplement :

$$q(z) = z + i z_R$$

Sa partie réelle exprime donc simplement l'abscisse suivant l'axe du mode (avec l'origine au point de pincement). Sa partie imaginaire est la distance de Rayleigh du mode

La solution pour  $p(z)$  est :

$$i p(z) = \ln(1 - i z / z_R)$$

Son expression est moins directe que pour  $q(z)$  . Nous verrons plus loin son interprétation.

La solution pour le profil est alors :

$$u_i(r, z) = \frac{1}{1 - i z / z_R} e^{-i k_i r^2 / 2 (z + i z_R)}$$

## 1.d Expression du profil en paramètres physique

Pour analyser la forme de ce mode, nous identifions la solution pour le profil avec son expression dans une forme plus proche de la physique :

$$u_i(r, z) = u_{iz}(z) e^{-r^2 / w(z)^2 - i k_i r^2 / 2 R(z)}$$

Le second facteur de la solution est réécrit en séparant partie réelle et imaginaire pour pouvoir identifier les paramètres  $w(z)$  et  $R(z)$  :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z / z_R)^2}$$

Du fait de la divergence, la taille du faisceau croît de puis l'origine où l'onde est plane

$$R(z) = z + z_R^2 / z$$

Le rayon de courbure décroît depuis l'origine (où l'onde est plane), jusqu'à la distance de Rayleigh  $z = z_R$  , pour ré-augmenter au delà (l'onde devient asymptotiquement sphérique).

Le premier facteur se décompose en module et phase :

$$\frac{1}{1 - i z / z_R} = \frac{e^{i \arctan(z / z_R)}}{\sqrt{1 + (z / z_R)^2}} = \frac{w_0}{w(z)} e^{i \phi(z)}$$

La phase  $\phi(z) = \arctan(z / z_R)$  est la phase de Gouÿ [Gouy1890]. Cette phase va modifier légèrement la phase de l'onde suivant l'axe de propagation. Elle écarte légèrement les fronts d'onde, essentiellement en champ proche : la vitesse de phase est légèrement accélérée. La phase de Gouÿ ne varie que de 0 à  $\pi/2$  entre l'origine et l'infini suivant l'axe, alors que le terme principal de la phase varie de  $2\pi$

pour chaque période axiale  $\lambda$ .

Le module du profil décroît suivant  $w_0/w(z)$  pour équilibrer l'étalement radial de l'onde.

Le profil du faisceau s'écrit :

$$u_i(r, z) = \frac{w_0}{w(z)} e^{-r^2/w(z)^2} e^{i\phi(z) - ik_i r^2/2R(z)}$$

## 10.2 Propriétés du mode gaussien

### 2.a Expression du faisceau gaussien

Nous résumons ici la forme du champ électrique du mode gaussien de taille au pincement  $w_0$ . Il est aussi appelé mode transverse fondamental ou mode TEM<sub>0,0</sub> :

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \Re \left( E_{iM} \vec{e}_x \frac{w_0}{w(z)} e^{-r^2/w(z)^2} e^{i(\omega t + \phi(z) - k_i z)} e^{-ik_i r^2/2R(z)} \right)$$

$E_{iM}$  est l'amplitude maximum du champ

$\vec{e}_x$  est sa polarisation linéaire.

#### Phase de l'onde sur l'axe

$e^{i(\omega t + \phi(z) - k_i z)}$  est le facteur de phase de l'onde sur l'axe. C'est le même que celui de l'onde plane  $e^{i(\omega t - k_i z)}$ , corrigé de la phase de Gouy  $e^{i\phi(z)}$  :

$$\phi(z) = \arctan(z/z_R)$$

où  $z_R$  est la distance de Rayleigh

$$z_R = \pi w_0^2 / \lambda_i$$

#### Divergence du profil gaussien

$\frac{w_0}{w(z)} e^{-r^2/w(z)^2}$  est le module du profil. Le profil reste toujours gaussien dans la direction perpendiculaire, mais sa taille augmente avec la distance suivant l'axe :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/z_R)^2}$$

À distance petite devant  $z_R$ , en champ proche, le mode diverge lentement : le profil peut être considéré constant :

$$w(z) \underset{z \ll z_R}{\sim} w_0$$

À la distance  $z_R$ , la taille n'a grandi que d'un facteur  $\sqrt{2}$  :

$$w(z_R) = w_0 \sqrt{2}$$

À longue distance, en champ lointain, la taille croît linéairement avec la distance sur l'axe :

$$w(z) \underset{z \gg z_R}{\sim} \frac{w_0 z}{z_R}$$

Le mode diverge en champ lointain avec un demi-angle d'ouverture  $\xi$  :

$$\xi = \frac{w(z)}{z} \sim \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda_i}{\pi w_0}$$

La normalisation du profil  $w_0/w(z)$  assure que la puissance de l'onde reste constante le long de l'axe :

$$P_i = \frac{N}{\mu_0 C} E_{iM}^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(y^2+z^2)/w_0^2} dydz$$

$$P_i = \frac{\pi w(z)^2 N}{2 \mu_0 C} \left( E_{iM} \frac{w_0}{w(z)} \right)^2 = \frac{\pi w_0^2 N}{2 \mu_0 C} E_{iM}^2 = P_{i0}$$

### Rayon de courbure du front d'onde

Le facteur  $e^{-ik_i r^2/2R(z)}$  décrit la phase de l'onde dans la direction perpendiculaire.  $R(z)$  est le rayon de courbure :

$$R(z) = z + z_R^2/z$$

En champ proche, l'onde est quasi plane :

$$R(z) \gg z \quad z \ll z_R$$

À la distance de Rayleigh  $z_R$ , la courbure est maximale (le rayon, minimal) :

$$R(z) = 2 z_R$$

En champ lointain, l'onde est quasi sphérique :

$$R(z) \sim z \quad z \gg z_R$$

### Approximation du champ proche

Nous voyons qu'en champ proche le mode gaussien est proche d'une onde plane à forme gaussienne à rayon constant. Ceci justifie l'approximation faite pour décrire les profils des faisceaux et le profil du volume de diffusion à condition la demi-longueur du volume de diffusion (si le pincement est au centre), soit notablement plus courte que la longueur de Rayleigh de chacun des faisceaux :

$$\frac{\sqrt{\pi} w_0}{\theta} \ll \frac{\pi w_0^2}{\lambda_i}$$

La taille du faisceau doit alors être grande devant la longueur d'onde de diffusion :

$$w_0 \gg \frac{\lambda_i}{\sqrt{\pi} \theta} = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}$$

Cette condition se rapproche de celle pour obtenir une bonne résolution relative en nombre d'onde de la diffusion.

## 2.b Propagation des faisceaux gaussiens à travers une lentille mince

Pour étudier la transmission des faisceaux gaussiens à travers des optiques, nous décrivons le faisceau par un ensemble de rayons paraxiaux. H. Kogelnik a donné une formulation synthétique de ce modèle [Kogelnik1966].

### Transmission d'une lentille mince

Nous nous limiterons au cas où la lentille est centrée sur le même axe que le faisceau, afin de conserver la symétrie cylindrique.



Une lentille mince est un milieu d'indice optique,  $n_f$  limité par 2 surfaces sphériques  $R_{f1}$  et  $R_{f2}$  distantes d'une longueur  $e_f$  sur l'axe. Par convention, le rayon de courbure est positif si la face de la lentille est convexe, négatif pour une face concave. Les centres des sphères sont sur l'axe.

Dans l'hypothèse de la lentille mince, nous supposons que la distance parcourue à travers la lentille est suffisamment courte pour négliger les variations radiales des rayons qui traversent la lentille. De plus, nous supposons que la lentille n'a d'effet que sur la phase de l'onde. Nous estimerons ce déphasage par les chemins optiques à travers la lentille

À la distance  $r$  de l'axe, l'épaisseur de lentille traversée est :

$$e_{fr}(r) = e_f - \left[ \frac{r^2}{R_{f1}} + \frac{r^2}{R_{f2}} \right]$$

Les chemins optiques sont donc modifiés de la quantité :

$$s_{fr}(r) = (n_f - 1) e_f - (n_f - 1) \left[ \frac{r^2}{R_{f1}} + \frac{r^2}{R_{f2}} \right]$$

La focale de lentille,  $f$ , apparaît naturellement :

$$\frac{1}{f} = (n_f - 1) \left[ \frac{1}{R_{f1}} + \frac{1}{R_{f2}} \right]$$

La focale sera positive pour une lentille convergente.

La fonction de transmission à travers la lentille,  $T(r)$ , qui traduit le déphasage qui lui est propre s'exprime alors :

$$T(r) = e^{-i k_i (n_f - 1) e_f} e^{+i k_i r^2 / 2f}$$

Pour une lentille placée en  $z_0$ , le profil de l'onde derrière la lentille  $u'_i(r, z_0)$  est déduit du profil avant la lentille  $u_i(r, z_0)$  par la fonction de transmission :

$$u'_i(r, z_0) = T(r) u_i(r, z_0)$$

### Transformation des paramètres p et q par la lentille

Nous reprenons l'expression des profils  $u_i$  et  $u'_i$  en fonction des paramètres  $p$  et  $q$  :

$$u_i(r, z) = e^{-i p(z) - i k_i r^2 / 2q(z)}$$

$$u'_i(r, z) = e^{-i p'(z) - i k_i r^2 / 2q'(z)}$$

La transmission à travers la lentille s'écrit :

$$e^{-i p'(z) - i k_i r^2 / 2q'(z)} = e^{-i k_i (n_f - 1) e_f} e^{+i k_i r^2 / 2f} e^{-i p(z) - i k_i r^2 / 2q(z)}$$

Par identification, on déduit l'effet de la lentille sur les paramètres  $p$  et  $q$  :

$$p'(z) = p(z) + k_i (n_f - 1) e_f$$

$$\frac{1}{q'(z)} = \frac{1}{q(z)} - \frac{1}{f}$$

La forme du faisceau reste gaussienne, mais avec des paramètres  $p$  et  $q$  modifiés.

## Position du pincement et taille du faisceau derrière la lentille

Pour une distance  $d$  entre le pincement initial et la lentille, la valeur de  $q$  à l'approche de la lentille est :

$$q(z_f) = d - i z_R$$

Juste derrière la lentille, le paramètre  $q$  vaut :

$$\frac{1}{q'(z_f)} = \frac{1}{d - i z_R} - \frac{1}{f}$$

Comme la partie de  $q$  est l'abscisse de l'onde par rapport à la position du pincement, la distance de la lentille au point de pincement du faisceau est donnée par :

$$d' = -\Re[q'(z_f)]$$

Elle vaut :

$$d' = f + (d - f) \frac{f^2}{(d - f)^2 + z_R^2}$$

Comme la distance de Rayleigh du faisceau est donnée par la partie imaginaire de  $q$  :

$$z_R' = \Im[q'(z_f)]$$

On peut déduire la valeur du pincement derrière la lentille ( $z_R' = \pi w_0'^2 / \lambda_i$ ) :

$$w_0'^2 = w_0^2 \frac{f^2}{(d - f)^2 + z_R^2}$$

Si le pincement du faisceau initial est au point focal de la lentille :

$$d = f$$

le pincement image se trouve au plan focal image :

$$d' = f$$

le pincement image vaut :

$$w_0' = \frac{f \lambda_i}{\pi w_0}$$

C'est le pincement le plus grand que l'on puisse obtenir pour une distance  $d$  variable.

## Cavité laser

Une cavité laser est généralement formée d'un miroir plan semi-transparent et un miroir sphérique, espacés d'une distance  $L$ . Le second miroir est sphérique pour éviter la divergence du faisceau dans la cavité.

Un miroir sphérique de rayon  $R_f$  peut être décrit comme une lentille avec une focale :

$$f = \frac{1}{R_f}$$

Le seul mode stationnaire qui puisse être présent sera un mode gaussien, dont le pincement sera placé sur le miroir plan, et dont l'image par le miroir sphérique sera un mode dont le pincement sera aussi placé sur le miroir plan, avec le même

pincement.

Il faut alors :

$$f = L$$

et

$$w_0 = \frac{f \lambda_i}{\pi w_0}$$

soit :

$$f = L = z_R$$

Nous remarquons que le rayon de courbure du mode gaussien sur le miroir sphérique est :

$$R(z_R) = 2 z_R = R_f$$

Le rayon de courbure de l'onde est le même que celui du miroir : le système est dit con-focal pour ce mode.

## 2.c Diamètre utile des faisceaux gaussiens

Le mode gaussien a théoriquement une extension spatiale dans tout l'espace. Dans la réalité, la propagation du mode est toujours limité par la taille des optiques utilisées. Quelle est la conséquence sur la propagation du mode gaussien? Quelle est la limite acceptable pour sa déformation? Cette question a été étudié par, entre autres, P. Belland et al. [Belland1982].

Nous exposerons ici la forme la plus simple du problème. Nous supposons que le faisceau gaussien est limité par une ouverture plane circulaire de rayon  $a$ , centrée sur le faisceau, située dans le plan de pincement de celui-ci ( $z=0$ ). Nous nous intéressons à la forme du faisceau ainsi tronqué en champ lointain.

### Puissance du faisceau tronqué

Nous avons vu que la puissance du faisceau gaussien dans le plan de pincement est donnée par :

$$P_i = \frac{N}{\mu_0 C} E_{iM}^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(y^2+z^2)/w_0^2} dydz$$

Comme le faisceau est à symétrie circulaire, la formule se simplifie :

$$P_i = \frac{N}{\mu_0 C} E_{iM}^2 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-2r^2/w_0^2} r dr$$

Pour le faisceau complet, comme nous l'avons vu, la valeur est :

$$P_i = \frac{\pi w_0^2 N}{2\mu_0 C} E_{iM}^2$$

Pour le faisceau tronqué au rayon  $a$ , la puissance est diminuée :

$$P_{ia} = \frac{N}{\mu_0 C} E_{iM}^2 2\pi \int_0^a e^{-2r^2/w_0^2} r dr$$

soit :

$$P_{ia} = P_i \left( 1 - e^{-2a^2/w_0^2} \right)$$

La perte de puissance ne dépend donc que du rapport  $a/w_0$ . L'effet est sensible pour  $a/w_0 < 2$  :

$a/w_0$	$P_{ia}/P_i$
1	86,46%
$\pi/2$	99,28%
2	99,97%
2,5	99,998%

Mais cet effet ne suffit pas à rendre compte de la déformation de l'onde due au diaphragme. Deux autres effets peuvent être évalués :

- un effet d'ondulation (ripple en anglais) sur le profil de l'onde en champ proche. Il a été évalué par Siegman [Siegman1985]. Il n'y a pas de solution analytique.
- un élargissement de l'onde en champ lointain.

## Diffraction du faisceau tronqué

Sur l'axe :

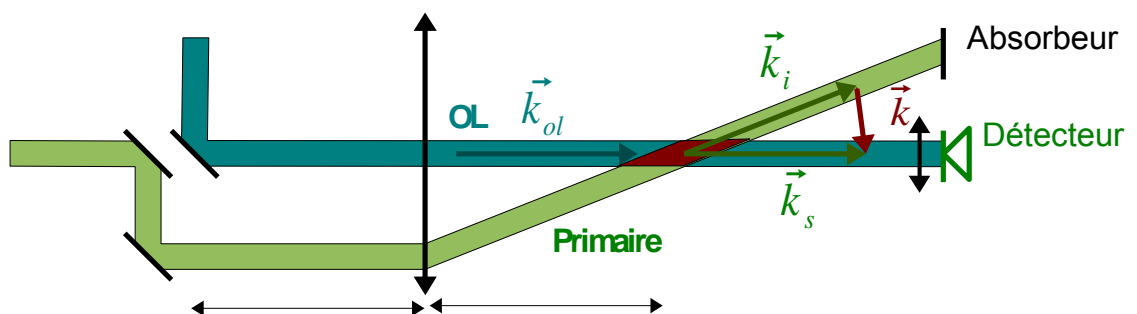
### Approximation gaussienne du faisceau tronqué

L'ouverture sera suffisamment grande par rapport à la taille du faisceau pour pouvoir utiliser une approche perturbative.

La correction sur le champ électrique due au diaphragme s'exprime par :

$$E_{ia}(r, z) = e^{-r^2/w_0^2} \sum_0^{+\infty} \left( \frac{-k_i w_0 r}{a z} \right)^2 J_n \left( \frac{k_i a r}{z} \right)$$

## 2.d Angle minimal de diffusion pour un banc de diffusion collective



Pour réduire l'angle de diffusion, il faut rapprocher l'axe de faisceau OL et du détecteur, de celui du faisceau primaire. Le rapprochement des faisceaux primaires et OL en amont de la lentille dépend de leur rayon utile. Suivant l'étude précédente, nous considérerons que ce rayon utile est égal à deux fois la taille du faisceau à cette position :  $a = 2 w'_0$ . la distance minimale de rapprochement est alors

$d_{min} = 2 a = 4 w'_0$ . L'angle minimal est alors :

$$\theta_{min} = \frac{4 w'_0}{f}$$

Si la position de taille minimale du faisceau est à la focale de la lentille, l'angle minimal ne dépend que de l'angle de divergence des faisceaux dans la zone d'observation  $\xi$  :

$$\theta_{min} = \frac{4 \lambda_i}{\pi w_0} = 4 \xi$$

L'angle minimal de diffusion est aussi limité par le rapprochement du détecteur de l'axe du faisceau primaire : plus le détecteur est proche de l'axe du primaire, plus la puissance de primaire reçu par le détecteur sera grande. La puissance maximale que peut recevoir est de l'ordre de  $P_{lim} = 100 \mu W$  La puissance du faisceau primaire est de l'ordre de  $P_0 = 10 W$

Comme le détecteur se trouve en champ lointain, nous raisonnerons en angle. La répartition par angle solide du faisceau primaire est (  $\theta$  est l'angle dans le plan de diffusion,  $\varphi$  ) :

$$P(\theta, \varphi) = P_0 \frac{2}{\pi \xi^2} e^{-2(\theta^2 + \varphi^2)/\xi^2}$$

Le détecteur est décalé de l'angle  $\theta$  par rapport à l'axe du faisceau primaire. L'angle d'ouverture du détecteur (avec sa lentille de focalisation) est proche de l'angle de divergence du faisceau OL :

$$P(\theta, \varphi) = \frac{N}{\mu_0 C} E_{iM}^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(y^2+z^2)/w_0^2} dydz$$

# Bibliographie

## Historique de diffusion Rayleigh collective sur les écoulements

H.Z. Cummins, N. Knable & Y. Yeh, *Observation of Diffusion Broadening of Rayleigh Scattered Light*, Phys. Rev. Lett., 12 (1964), p. 150-153.

Y. Yeh & H.Z. Cummins, *Localized Fluid Flow Measurements With an He-Ne Laser Spectrometer*, Appl. Phys. Lett., 4 (1964), p. 176-178.

T.J. Greytak & G.B. Benedek, *Spectrum of Light Scattered From Thermal Fluctuations In Gases*, Phys. Rev. Lett., 17 n°4 (1966), p. 179-182.

R.J. Goldstein & W.F. Hagen, *Turbulent Flow Measurements Utilizing the Doppler Shift of Scattered Laser Radiation*, Phys. Fluid, 10 (1967), p. 1349-1352.

W.K. George & J.L. Lumley, *The Laser Doppler velocimeter and its application to the measurement turbulence*, J. Fl. Mech., 60 (1973), p. 321-362.

J.C. Lelièvre & J. Picard, *Observation d'une Lumière Laser Diffusée Par un Gaz En Mouvement Turbulent*, C. R. Acad. Sc. Paris, 290 (1980), p. 473-476.

P. Gilles de Gennes, *L'Observation des corrélations de Vitesse et de Pression dans un Ecoulement Turbulent*, C. R. Acad. Sc. Paris, 262 (1966), p. 74-77.

H.L. Frisch, *Study of Turbulence by Spectral Fine Structure of Scattered Light*, Phys. Rev. Lett., 19 n°22 (1967), p. 1278-1279.

G.B. Benedek, *Optical Mixing Spectroscopy, with Application to Problems in Physics, Chemistry and Engineering*, Polarisation, Matière et Rayonnement, Ed. S.F.P., P.U.F., Paris (1964), p. 49-84.

## Physique de la diffusion collective

### Diffusion Rayleigh

J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, J. Wiley and Sons ed., New York (1975).

Chap. 4.5 : Polarisabilité moléculaire

Chap. 9 : Diffusion et diffraction

B. Chu, Laser Light Scattering, Academic Press, New York (1974).

Chap. III : Théorie de la diffusion

G. Chartier, Manuel d'optique, Chap. 8A, Ed. Hermes, Paris (1997).

Chap. 1.4 : Rayonnement dipolaire

M. Born & E. Wolf, Principles of Optics, University Press, Cambridge (2002)

Chap 2.3 : Relation de Lorentz-Lorenz

Chap 14.5 : Théorie de Mie

M. Snee & W. Ubachs, *Direct measurement of the Rayleigh scattering cross section in various gases*, J. Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 92 (2005), p. 293-310

S. Yip & M. Nelkin, *Application of a kinetic model to time-dependent density correlations in fluids*, Phys. Rev., 135 n°5A (1964), p. A1241-A1248.

R. B. Miles, W. R. Lempert & J. N. Forkey, *Laser Rayleigh Scattering, Measurement, Science and Technology* 12 (2001), p. R33-R51

J.-P. Perez, R. Carles & R. Fleckinger, Electromagnétisme, Dunod, Paris (2002)

Chap. 20 IV Rayonnement dipolaire d'un électron atomique

## **Diffusion collective et écoulements turbulents**

C. Stern & D. Grésillon, *Fluctuations de Densité dans la Turbulence d'un Jet, Observation par Diffusion Rayleigh et Détection Hétérodyne*, J. Physique, 44 (1983), p. 1325-1335.

G. Antar, *Visible light scattering to measure small scale turbulence*, Rev. Sci. Instr. 71 1 (2000) p. 113-117

L. Lading & R.V. Edwards, *Laser velocimeters : lower limits to uncertainty*, Appl. Opt., 32 n°21 (1993), p. 3855-66.

Y. L. Klimontovich, Turbulent motion and the structure of Chaos, Kluwer Academic Publishers (1991)

## **Détection hétérodyne et rapport signal sur bruit**

A. E. Siegman, *The Antenna properties of Optical Heterodyne Receivers*, Applied Optics, 5 n° 10 (1966), p. 1588-1594

E. Holzhauser & J. H. Massig, *An Analysis Of Optical Mixing In Plasma Scattering Experiments*, Plasma Physics, 20 (1978), p. 867-877

D. Grésillon, C. Stern, A. Hémon, A. truc & T. Lehner, *Density Fluctuations Measurement by Far Infrared Light Scattering*, Physica Scripta, T2/2, (1982) p. 459-466

J. Sheffield, Plasma Scattering of Electromagnetic Radiation, Academic Press, New York (1975)

J. Cavalier, N. Lemoine, G. Bonhomme, S. Tsikata, C. Honoré & D. Grésillon *Device convolution effects on the collective scattering signal of the ExBmode from Hall thruster experiments: 2D dispersion relation*, Physics of Plasmas, 19 (2012), 082117.

### Chap. 5.8 : Detectors

S. C. Cohen, *Heterodyne detection: phase front alignment, beam spot size, and detector uniformity*, Applied Optics 14 (1975), p. 1953-1959

R. G. Frehlich, *Heterodyne efficiency for a coherent laser radar with diffuse or aerosol targets*, Journal of Modern Optics 41 (1994) p. 2115-2129

D. M. Chambers, *Modeling heterodyne efficiency for coherent laser radar in the presence of aberrations*, Optics Express 1(1997), p. 60-67

S. Tsikata, C. Honoré, D. Grésillon, & N. Lemoine, *Collective light scattering for the study of fluctuations in magnetized plasmas: the Hall thruster case study*, Contributions to Plasma Physics (2011)

## **Acousto-optique**

J. Sapriel, L'acousto-optique, Masson, Paris (1976).

A. Yariv & P. Yeh, Optical Waves in Crystals, J. Wiley and Sons, Hoboken NJ (2003)

### Chap. 9 : Acousto-optics

A. Yariv & P. Yeh, Photonics, Oxford University Press, New York, NY (2007)

### Chap. 9 : Electro-optic Modulation of Laser Beams

J.-M. Jonathan, Electro-acousto-optique, Cours IOGS (2008)

### Part. II : Effets et composants acousto-optiques

R. W. Dixon, *Photoelastic properties of selected materials and their relevance for applications to acoustic light modulation and scanners*, Journal of Applied Physics 38



(1967), p. 5149-5153.

## **Diffusion collective et écoulements turbulents**

### **Turbulence : loi de Kolmogorov**

M. Lesieur, La Turbulence, Presses Universitaires de Grenoble (1994).

Chap. IV 2 : Kolmogorov

U. Frisch, Turbulence: the Legacy of A. N. Kolmogorov, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995)

Chap. 7 : Phénoménologie de Kolmogorov

H. Tennekes & J.L. Lumley, A First Course in Turbulence, 2 Ed., MIT Press, Cambridge Ma (1972).

Chap. 1.5 : Les échelles de la turbulence et Kolmogorov

J.O. Hinze, Turbulence, 2nd Ed., McGraw-Hill, New-York (1975).

Chap. 3.5 : Spectre d'énergie (Kolmogorov)

Chap. 6.8 : Jet d'air axisymétrique

G.N. Abramovich, The Theory of Turbulent Jets, MIT Press, Cambridge Ma (1963).

### **Turbulence : jet d'air, couches de mélange**

Chap. 1 : Propriétés générales es jets turbulents

D. Papamoschou, *The Compressible Turbulent Shear Layer : an Experimental Study*, J. Fluid Mech., 197 (1988), p. 453-477.

D. Papamoschou, *Structure of the Compressible Turbulent Shear Layer*, AIAA Journal, 29 n°5 (1991), p. 680-681.

S.G. Goebel & J.C. Dutton, *Experimental Study of Compressible Turbulent Mixing Layers*, AIAA Journal, 29 n°4 (1991), p. 538-546.

M.R. Gruber, N.L. Messersmith & J.C. Dutton, *Three-dimensional Velocity Field in a Compressible Mixing Layer*, AIAA Journal, 31 n°11 (1993), p. 2061-2067.

### **Diffusion collective et loi de Kolmogorov**

C. Honoré & D. Grésillon, *Turbulence Cascade and dynamical exchange between spatial scales*, J. Fluid Mech. 411 (2000) p. 187-211

A. Kharchenko, La diffusion de la lumière par les gaz : de la diffusion incohérente à la diffusion exacerbée ; application à la vélocimétrie, thèse de doctorat de l'École Polytechnique (2000)

A. Kharchenko & D. Grésillon, *Visible enhanced scattering from air flow turbulence*, Europhys. Lett. 55 n°4 (2001), p. 486-491

### **Spectre du signal de diffusion collective et distribution de la vitesse de l'écoulement**

J.P. Bonnet, D. Grésillon, B. Cabrit & V. Frolov, *Collective Light Scattering : a Non Particle Laser Velocimetry*, Meas. Sci. Technol., 6 (1995), p. 620-636.

J.P. Bonnet, D. Grésillon & J.P. Taran, *Non-intrusive Measurements For High-speed, supersonic and hypersonic Flows*, Annu. Rev. Fluid Mech. 30 (1998), p. 231-273

C. Honoré, J.P. Bonnet, D. Grésillon & T. Ouzaa, *Collective Light Scattering and Instantaneous Fluid Velocity Measurement*, J. of Atm. and Ter. Phys., 58 n°8/9 (1996), p. 1025-1032.

## **Modes convectifs et modes sonores**

B.T. Chu & L.S.J. Kovaszny, *Non-linear Interactions in a Viscous Heat-conducting Compressible Gas*, *J. of Fl. Mech.*, 3 (1957), p. 494-514.

A.S. Monin & A.M. Yaglom, *Statistical Fluid Dynamics : Mechanics of Turbulence, volume 1*, L. Lumley Ed., MIT Press, Cambridge (1971)

Chap. I.7 : Petites oscillations d'un gaz compressible

J.P. Boon & S. Yip, *Molecular Hydrodynamics*, Dover Pub., New York (1991),

Chap. 5 : Modes hydrodynamiques

## **Applications**

### **Observation de l'ionosphère**

R. A. Greenwald et al., *DARN/SuperDARN, a global view of the dynamics of high latitude convection*, *Space Science Reviews*, 71 (1995), p. 761-796

J.-P. Villain, R. André, M. Pinnock, R. A. Greenwald & C. Hanuise, *A Statistical study of the Doppler spectral width of high-latitude ionospheric F-region echoes recorded with SuperDARN coherent HF radars*, *Annales Geophysicae* 20 (2002), p. 1769-1781

### **Fusion magnétique**

J. Wesson, *Tokamaks*, 3<sup>rd</sup> edition, Clarendon Press Oxford (2004)

Chap. 1 : Fusion

J. P. Freidberg, *Plasma Physics and Fusion Energy*, Cambridge Univ. Press (2008)

Chap. 6 : Design of a simple fusion reactor

E. Doyle & al., *Chapter 2: Plasma confinement and transport*, *Nuclear Fusion*, 47, S18 (2007)

W. W. Lee & al., *Gyrokinetic particle simulation of fusion plasmas: path to petascale computing*, *Journal of Physics: Conference Series*, 46, p. 73-81 (2006)

N. C. Luhmann & W. A. Peebles, *Laser Diagnostics of Magnetically Confined Thermo-nuclear Plasmas*, *Laser Handbook, volume 5*, edited by M. Bass & M. L. Stitch, North Holland (1985)

Chap. 4.4 : Collective scattering from waves and fluctuations

TFR Group & A. Truc, *Correlation between low frequency turbulence and energy confinement in TFR*, *Nuclear Fusion*, 26 n°10 (1986), p. 1303-1310

A. Truc & al., *ALTAIR: An infrared laser scattering diagnostic on the TORE SUPRA tokamak*, *Review of Scientific Instruments*, 63 n°7 (1992), p. 3716-3724

X. L. Zou & al., *Poloidal Rotation Measurement in Tore Supra by Reflectometry*, 26th EPS Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, (1999), P3.022

P. Hennequin et al., *Doppler backscattering system for measuring fluctuations and their perpendicular velocity on Tore Supra*, *Review of Scientific Instruments*, 75 n°10 (2004), p. 3881-3883

L. Vermare & al., *Impact of collisionality on fluctuation characteristics of micro-turbulence*, *Physics of Plasmas*, 18 (2011) p. 012306.1-7

### **Propulseur à effet Hall**

A. I. Morozov & V. V. Savelyev, *Fundamentals of stationary plasma thruster theory*, *Reviews of Plasma Physics* 21 (2000), p. 203-391

V V Zhurin, H R Kaufman & R S Robinson, *Physics of closed drift thrusters*,

Plasma sources Science and Technology, 8 (1999), p. R1-R20

S. Barral, *Electric propulsion*, cours, (2004) :

[http://www.ippt.gov.pl/~sbarral/misc/EP\\_course.pdf](http://www.ippt.gov.pl/~sbarral/misc/EP_course.pdf)

S. Tsikata, N. Lemoine, V. Pisarev & D. Grésillon, *Dispersion relations of electron density fluctuations in a Hall thruster plasma, observed by collective light scattering*, Physics of Plasmas, 16 (2009), p. 033506

### **Hélicon**

R. A. Hardin, E. E. Scime & J. Heard, *A 300 GHz Collective Scattering diagnostic for low pressure plasma*, Review of Scientific Instruments, 79 (2008), 10E725

## **Annexes**

### **Variables aléatoires continues**

W. Appel, *Mathématiques pour la physique*, H&K éditions, Paris (2008)

Chap. 21 : variables aléatoires

D. Revuz, *Probabilités*, Hermann, Paris (1997)

Chap. II : modèle définitif

N.G. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, 3rd Ed., North-Holland, Amsterdam (2007)

Chap. I : Stochastic variable

### **Transformée de Fourier**

W. Appel, *Mathématiques pour la physique*, H&K éditions, Paris (2008)

Chap. 14.6 : fonctions de puissance finie

### **Faisceaux gaussiens**

A. Yariv & P. Yeh, *Photonics*, Oxford University Press, New York (2007)

Chap. 2.5 : Gaussian beam in homogeous media

B.E.A. Saleh & M.C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, J. Wiley and Sons, New York (1991)

Chap. 2 : Beam Optics

A.E. Siegman, *Lasers*, University Science Books, Mill Valley Ca (1986)

Chap. 17 : Physical properties of a gaussian beam

L.-G. Gouÿ, *Sur une propriété nouvelle des ondes lumineuses*, C.R. Académie des Sciences Paris 110 (1890), p. 1251-1253

H. Kogelnik & T. Li, *Laser beams and resonators*, Applied Optics, 5 (1966), p. 1550-1567

R.G. Schell & G. Tyras, *Irradiance from an aperture with a truncated gaussian beam distribution*, Journal of the Optical Society of America 61 (1971), p. 31-35

P. Belland & J. P. Crenn, *Changes in the characteristics of a Gaussian beam weakly diffracted by a circular aperture*, Applied Optics 21 (1982), p. 522-527

A. Culoma, *Propagation des faisceaux gaussiens. Transport des faisceaux de puissance*, École d'été sur les systèmes optiques, Cargèse, juillet 1991, Collection de la Société Française d'Optique 3 (1992)

# Table des matières

Introduction.....	1
Historique de la diffusion collective dans les écoulements.....	2
Constantes physiques.....	3
Notations.....	5
1 Principe de la diffusion collective.....	7
1.1 Diffusion particulière.....	7
1.2 Diffusion collective sur un fluide turbulent.....	9
2.a Signal de diffusion collective.....	9
2.b Facteur de forme du signal de diffusion collective.....	10
2.c Loi de Kolmogorov.....	11
2.d Convection et effet Doppler.....	12
2.e Les ondes sonores.....	15
2.f Comparaison avec l'anémométrie Doppler.....	16
1.3 Observation visuelle de la diffusion collective.....	16
2 Diffusion Rayleigh collective.....	18
2.1 Polarisabilité des molécules.....	18
1.a Polarisation d'une molécule.....	18
1.b Indice de réfraction et polarisabilité.....	19
2.2 Diffusion Rayleigh.....	21
2.a Rayonnement d'un dipôle.....	21
2.b Onde sphérique diffusée.....	22
2.c Rayon de Rayleigh et section efficace de diffusion.....	23
2.3 Approximation champ lointain.....	25
3.a Conditions de l'approximation champ lointain.....	25
3.b Vecteur d'onde de diffusion et figure de Bragg.....	26
2.4 Diffusion collective.....	26
4.a De la molécule au fluide.....	27
4.b Transformée de Fourier de la densité.....	28
4.c Fluctuations de densité et turbulence.....	28
3 Détection hétérodyne du signal de diffusion.....	29
3.1 Détection hétérodyne.....	29
1.a Détection homodyne du champ diffusé.....	29
1.b Faisceau oscillateur local (OL).....	30
1.c Puissance des faisceaux et battement.....	31
1.d Efficacité d'hétérodynage.....	32
3.2 Battement des ondes OL et diffusée.....	32
2.a Expression des champs électriques pour le battement.....	32
2.b Battement des champs, loi de Kirchhoff-Sommerfeld.....	33
2.c Profils des faisceaux et du volume de diffusion.....	33
3.3 Courant issu de la détection hétérodyne.....	34
3.a Effet photovoltaïque.....	34
3.b Courants continu et de battement.....	35
3.4 Le signal de diffusion collective.....	35
4.a Définition du signal de diffusion collective.....	35
4.b Gaz incohérent.....	36
4.c Facteur de forme statique.....	36
3.5 Démodulation du courant du détecteur.....	37
4 Spectre du signal de diffusion collective.....	38
4.1 Profils gaussiens et volume de diffusion.....	38
1.a Le faisceau gaussien.....	38
1.b Profil du volume de diffusion.....	39
1.c Amplitude des champs électriques.....	41
4.2 Spectre du signal et résolution.....	41
2.a Transformée de Fourier du profil.....	41

2.b	Résolution en nombre d'onde.....	42
4.3	Spectre fréquentiel.....	45
4.4	Spectre fréquentiel du courant du détecteur.....	45
4.a	Spectre du courant.....	46
4.b	Effet de volume fini.....	46
4.5	Rapport signal sur bruit du courant.....	47
5.a	Bruit photonique du détecteur.....	47
5.b	Rapport signal sur bruit et spectre de la densité.....	48
5.c	Rapport signal sur bruit pour un gaz incohérent.....	48
5.d	Rapport signal sur bruit pour une onde sonore.....	50
5	Montage laser de diffusion collective.....	53
5.1	Schéma général.....	53
1.a	Choix de la source.....	53
1.b	Description générale.....	53
5.2	Montage optique.....	54
2.a	Source laser.....	55
2.b	Modulateur acousto-optique.....	56
2.c	Lentille de focalisation et rotateur.....	60
2.d	Détecteur.....	63
2.e	Cohérence entre les 2 chemins optiques.....	65
5.3	Composants électroniques.....	65
3.a	Quartz à la fréquence de modulation.....	65
3.b	Té de polarisation du détecteur.....	66
3.c	Pré-amplificateur faible bruit.....	66
3.d	Démodulateur IQ, amplification et filtrage.....	66
5.4	Instrumentation.....	66
4.a	Analyseur de spectre.....	67
4.b	Acquisition numérique.....	67
5.5	Signal typique de diffusion collective.....	67
6	Diffusion collective et turbulence de l'air.....	69
6.1	Facteur de forme et loi de Kolmogorov.....	69
1.a	Facteur de forme.....	69
1.b	Facteur de forme et cascade de Kolmogorov.....	70
1.c	Application à un jet d'air turbulent.....	72
1.d	Loi de Kolmogorov et limites de l'angle de diffusion.....	75
6.2	Modes convectés.....	76
2.a	Structures cohérentes indépendantes.....	76
2.b	Autocorrélation du signal.....	77
2.c	Temps de vie des structures.....	80
6.3	Modes sonores.....	80
3.a	Modes propres d'un écoulement.....	80
3.b	Onde sonore.....	80
3.c	Modes convectées et modes propagatifs dans le signal de diffusion.....	83
6.4	Comparaison des spectres du signal de diffusion à différentes échelles.....	83
6.5	Diffusion collective et anémométrie laser.....	84
5.a	Couche de mélange supersonique.....	85
5.b	Spectre fréquentiel du signal de diffusion collective et histogrammes d'anémométrie.....	85
7	Diffusion collective et fluctuations dans divers milieux.....	87
7.1	Milieu ionosphérique.....	87
1.a	Ionosphère.....	87
1.b	Observation par radar HF.....	88
1.c	Réseau SuperDARN : cartographie des pôles.....	90
7.2	Fluctuations dans les tokamaks.....	91
2.a	Fusion contrôlée par confinement magnétique.....	91
2.b	Confinement et transport.....	92

2.c diffusion collective et micro-turbulence.....	94
7.3 Fluctuations dans les propulseurs à effet Hall.....	97
3.a Propulseur à effet Hall.....	97
3.b Banc laser à haute sensibilité.....	99
3.c Modes azimutal et axial .....	99
7.4 Autres applications.....	101
4.a Hélicon.....	101
8 Annexe : propriétés des variables aléatoires continues.....	102
8.1 Variable aléatoire continue.....	102
1.a Définition et exemples.....	102
1.b Moyennes et moments.....	102
1.c Fonction caractéristique.....	103
1.d Les cumulants.....	103
8.2 Variables aléatoires couplées.....	104
2.a Variables aléatoires couplées et indépendance.....	104
2.b Fonction caractéristique, moments et cumulants.....	105
9 Annexe : propriétés du spectre d'un signal de puissance finie.....	107
Énergie ou puissance finie.....	107
9.1 Fonction à énergie finie.....	107
1.a Transformée de Fourier, autocorrélation et spectre.....	107
1.b Relation d'incertitude.....	108
9.2 Signal à puissance finie.....	109
2.a Spectre d'un signal de puissance finie.....	109
2.b Autocorrélation temporelle et spectre fréquentiel.....	109
10 Annexe : Le mode gaussien.....	111
10.1 Le mode gaussien.....	111
1.a Première approche : La diffraction de Fresnel.....	111
1.b Équation de l'onde paraxiale.....	114
1.c Solution de l'équation d'onde paraxiale.....	115
1.d Expression du profil en paramètres physique .....	117
10.2 Propriétés du mode gaussien.....	118
2.a Expression du faisceau gaussien.....	118
2.b Propagation des faisceaux gaussiens à travers une lentille mince.....	119
2.c Diamètre utile des faisceaux gaussiens.....	122
2.d Angle minimal de diffusion pour un banc de diffusion collective.....	123
Bibliographie.....	125
Physique de la diffusion collective.....	125
Diffusion collective et écoulements turbulents.....	127
Applications .....	128
Annexes.....	129