Physique des Plasmas & de la Fusion

Rappels sur les Fonctions Holomorphes

roch smets — 2015

Table des matières

— 1 —

Fonctions analytiques

Quelques rappels de définitions sur les ensembles dans le plan complexe.

Définition 1. *Un ensemble est ouvert—fermé— s'il ne contient aucun—contient tous les— points de sa frontière.*

Définition 2. *Un ouvert est connexe si chaque couple de points peut être lié par un chemin constitué d'un nombre fini de segments de droites, situé entièrement dans l'ouvert.*

Définition 3. *Un ouvert connexe est appelé un domaine. Muni de tout ou partie de sa frontière, c'est une région.*

Définition 4. *Un domaine simplement connexe est un domaine "sans trous" ni "poignées"*[1]*. Un domaine doublement connexe*[2] *ne possède qu'un "trou" ou qu'une "poignée".*

1.1 Fonction d'une variable complexe

Une fonction d'une variable complexe dépend de 2 variables réelles. Sa dérivée dépend ainsi souvent du chemin suivi pour calculer son accroissement, ce qui peut *a priori* ne pas rendre cette dérivée unique. Pour s'affranchir de cette contrainte, une fonction doit donc satisfaire certaines propriétés qui permettent de les différencier ou de les primitiver ; ce sont les fonctions holomorphes.

Il faut aussi étendre la notion de fonction aux fonctions multiformes[3] : par exemple, $f(z) = z^{1/2}$ prend 2 valeurs pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$. Par ailleurs, une fonction complexe peut-être à valeur réelle comme $f(z) = |z|$ par exemple. Enfin, on peut aussi définir un polynôme de degré n de la variable complexe z $P(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$ ou une fraction rationnelle comme quotient de 2 polynômes.

Avant d'aborder la notion de dériveabilité, il faut préciser celle de limite dans le plan complexe. Si l'on souhaite définir la limite d'une fonction

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f_0 \tag{1.1}$$

1. Tout lacet doit pouvoir être réduit par homotopie à un point.
2. Comme un disque privé d'une autre disque de même centre et de rayon plus petit.
3. On les appelle aussi "formes multivaluées"

il faut *a priori* préciser la manière dont z tend vers z_0. Nous verrons un peu plus loin que la dériveabilité d'une fonction complexe implique que celle-ci vérifie certaines conditions, qui rendent précisement la valeur de cette dérivée indépendante du chemin suivi pour calculer son accroissement. Pour faire le lien avec les limites pour les fonctions réelles, si l'on note $z_0 = x_0 + \imath y_0$ et $f_0 = \varphi_0 + \imath\psi_0$, l'eq. (1.1) implique

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \Re[f(z)] = \varphi_0 \ , \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \Im[f(z)] = \psi_0 \tag{1.2}$$

où $\Re$ et $\Im$ signifient parties réelles et imaginaires, respectivement.

1.2 Continuité

Définition 5. *La fonction complexe $f(z)$ est continue en z_0 si*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \tag{1.3}$$

Pour assurer la continuité de f en z_0, il faut et il suffit que $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ soient continues en z_0. De plus, une fonction est continue dans un domaine si elle est continue en tout point de ce domaine.

1.3 Dériveabilité

Comme pour les fonctions réelles, la dérivée $f'(z)$ d'une fonction complexe se définit par la limite de son taux d'accroissement

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{1.4}$$

à condition que cette limite existe. Si tel est le cas, la fonction est differentiable en z_0. Comme énoncé précédemment, la valeur de ce taux d'accroissement peut dépendre du chemin suivi lors de l'accroissement.

Une fonction holomorphe est une fonction complexe qui admet en tout point de son domaine de définition une dérivée complexe. Pour être dériveable en un point, le taux d'accroissement d'une fonction complexe doit avoir une limite indépendante du chemin utilisé pour le calculer. Pour être holomorphe, une fonction complexe doit vérifier les conditions de Cauchy-Riemann.

1.4 Condition de cauchy-Riemann

La dérivée d'une fonction complexe est donnée par l'eq. (1.4). Si l'on note $h = s + \imath v$ l'accroissement, peut se calculer le long de s, soit

$$f'(z) = \lim_{s \to 0} \frac{f(z+s) - f(z)}{s} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \imath \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{1.5}$$

Mais cet accroissement peut aussi se calculer le long de $\imath v$, soit

$$f'(z) = \lim_{v \to 0} \frac{f(z+\imath v) - f(z)}{\imath v} = -\imath \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - \imath \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{1.6}$$

L'unicité de cette dérivée implique l'égalité

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\imath \frac{\partial f}{\partial y} \tag{1.7}$$

qui peut encore s'écrire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{1.8}$$

Théorème 1. *(Conditions de Cauchy-Riemann) Pour qu'une fonction complexe f soit holomorphe i.e. dériveable en un point, il faut qu'elle soit dériveable au sens réel en ce point, et qu'elle vérifie de plus les conditions (1.7) ou (1.8).*

En effet, on peut localement approcher tout chemin élementaire dans le plan complexe par un segment, *i.e.* une combinaison linéaire d'un chemin parallèle à l'axe réel et d'un chemin parallèle à l'axe imaginaire.

Les conditions de Cauchy-Riemann sont nécessaires ; sont-elles suffisantes ?
Si les fonctions $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ sont differentiables,

$$\lim_{(s,t) \to (0,0)} \varphi(x+s, y+v) - \varphi(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} s + \frac{\partial \varphi}{\partial y} v \tag{1.9}$$

On peut écrire la même équation pour $\psi(x, y)$. Alors,

$$\lim_{h \to 0} f(z+h) - f(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} s + \frac{\partial \varphi}{\partial y} v + \imath \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} s + \frac{\partial \psi}{\partial y} v \right) \tag{1.10}$$

En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann, on obtient

$$\lim_{h \to 0} f(z+h) - f(z) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \imath \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) (s + \imath v) \tag{1.11}$$

On obtient donc l'eq. (1.5), mais en suivant la même démarche, on aurait obtenu l'eq. (1.6). La limite du taux d'accroissement existe donc et est indépendante de h. En conséquence, la dérivée de la fonction existe et est unique. Les conditions de Cauchy-Riemann sont donc des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit holomorphe.

D'un point de vue pratique, la dérivée d'une fonction holomorphe se calcule en utilisant les eq. (1.5) ou (1.6), ou tout autre chemin dans $\mathbb{C}$ qui simplifie son calcul.

1.5 Fonctions Holomorphes

Une fonction est holomorphe si elle est dériveable. Pour cela, il faut et il suffit qu'elle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann (1.7 ou 1.8). Une fonction est holomorphe dans un domaine si elle est dériveble en chaque point de ce domaine. On parle aussi de fonction analytique ; une fonction analytique est une fonction développable en série entière. Ces deux termes ne sont donc pas synonymes, mais nous verrons par la suite que toute fonction holomorphe est analytique et vice-versa.

Définition 6. *Une fonction entière est une fonction holomorphe sur tout le plan complexe.*

La somme et le produit de deux fonctions holomorphes sur un domaine est holomorphe sur ce domaine. Le quotient de deux fonctions holomorphes sur un domaine l'est aussi, pourvu que le dénominateur ne s'annule en aucun point du domaine.

Définition 7. *On appelle fonction méromorphe une fonction complexe qui est holomorphe dans tout le plan complexe, sauf en un nombre fini de points isolés.*

Définition 8. *On appelle disque ouvert D de centre z_0 et de rayon r l'ensemble $\{z \mid |z - z_0| < r\}$. On appelle disque pointé $\dot{D}$ l'ensemble $\{z \mid 0 < |z - z_0| < r\}$. On a donc $\dot{D} = D \backslash \{z_0\}$.*

Définition 9. *Si une fonction est holomorphe sur $\dot{D}$ mais pas sur D, alors z_0 est appelé point singulier ou singularité de f.*

1.6 Prolongement analytique

Soit la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \tag{1.12}$$

définie pour $z \neq 1$. Cette fonction, dériveable au voisinage de tout point $z \neq 1$, est holomorphe dans $\mathbb{C} \backslash \{1\}$. Soit

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{1.13}$$

qui définit une fonction holomorphe dans le disque D de centre 0 et de rayon 1. Pour $|z| < 1$, $g(z) = f(z)$. On dit alors que $f(z)$ est le prolongement analytique dans $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ de la fonction $g(z)$.

Plus généralement, si $f(z)$ est une fonction holomorphe dans un ouvert U du plan complexe et $g(z)$ est une fonction holomorphe dans un ouvert V du plan complexe, telles que l'intersection de U et de V ne soit pas vide, et que

$$f(z) = g(z) \text{ , pour tout } z \in U \cap V \tag{1.14}$$

alors, $g(z)$ est le prolongement analytique de $f(z)$ dans $V - (U \cap V)$. De même, $f(z)$ est le prolongement analytique de $g(z)$ dans $U - (U \cap V)$.

1.7 Fonctions élémentaires

Les fonctions élementaires complexes sont un prolongement de celles que l'on connait en analyse réelle. Elles héritent néanmoins de propriétés particulières. Ainsi, la fonction exponentielle devient périodique, les fonctions sinusoidales cessent d'être bornées, le logarithme est multiforme et est défini pour un argument négatif... Nous allons lister les principales de ces fonctions et des propriétés associées.

Fonction exponentielle. Elle est définie par

$$\exp(z) = e^x(\cos y + \imath \sin y) \tag{1.15}$$

Pour $z \in \mathbb{R}$, cette définition coïncide avec la fonction réelle. C'est une fonction entière car les fonctions réelles exponentielles, sinus et cosinus sont de classe C^1, i.e. continues à dérivée continue. De plus, cette fonction n'admet aucun zero dans le plan complexe. Enfin, elle est périodique de période $2\imath\pi$.

Fonctions sinus et cosinus. Elles sont définies par

$$\sin z = \frac{e^{\imath z} - e^{-\imath z}}{2\imath} \quad \text{et} \quad \cos z = \frac{e^{\imath z} + e^{-\imath z}}{2} \tag{1.16}$$

Ces fonctions sont entières. Comme en réel, $(\sin z)' = \cos z$ et $(\cos z)' = -\sin z$. De plus, les zeros des fonctions sinus et cosinus sont les mêmes que ceux des fonctions sinus et cosinus réelles.

La fonction logarithme (et ses branches). En utilisant la notation complexe $z = re^{\imath\theta}$, le log de z est alors défini par

$$\log z = \log r + \imath\theta = \log|z| + \imath \arg z \tag{1.17}$$

Or l'argument d'un nombre complexe étant défini à 2π près, cette définition est non-unique. Sans précautions particulières, on obtiendrait donc une fonction multiforme. On appelle "branches" chacune de ces fonctions définies sur un intervalle complexe de longueur 2π. On appelle aussi "coupures" les frontières entre chacune de ces branches. Le choix de cette coupure est libre, mais un choix qui semble assez naturel, et que l'on adopte, est de choisir comme coupure la partie négative du demi-axe réel. Alors, $z = 0$ est un point de branchement (d'ordre infini) puisque l'ensemble des coupures s'y croisent.

On définit la détermination principale de log comme celle pour laquelle $-\pi < \arg z \leq +\pi$ et se note Log. Elle est donc univaluée. La fonction Log est analytique dans tout le plan complexe, sauf en $z = 0$ ainsi que sur le demi-axe réel négatif. Là où elle est holomorphe, on a $(\text{Log } z)' = z^{-1}$. On appelle Log la branche principale de la fonction log. Le demi-axe réel négatif est une coupure en ce sens où à son passage, on accède aux autres branches de la fonction multiforme log.

La fonction puissance. La fonction puissance est de la forme $f(z) = z^{\alpha+\imath\beta}$. Comme en analyse réelle, elle peut aussi se noter $f(z) = \exp[(\alpha + \imath\beta) \log z]$, soit

$$f(z) = \exp[(\alpha. \log r - \beta.\theta)] \exp \imath[\alpha.\theta + \beta. \log r] \tag{1.18}$$

C'est donc aussi une fonction multiforme.

1.8 Exercices

Exercice 1. *Soit les fonctions complexes $f(z) = \cos z$ et $g(z) = |z|^2$. Calculez leur accroissement en $z = 0$ le long de l'axe réel puis le long de l'axe complexe. Ces fonctions sont-elles differentiables ?*

Exercice 2. *Mettre sous la forme $\varphi(x, y) + \imath\psi(x, y)$ et sous la forme $\chi(z, z^\star)$ les fonctions*

$$f = \frac{xy^2}{x - \imath y} \ , \quad g = \frac{x + \imath y}{x + 1 + \imath y} \tag{1.19}$$

Dans chaque cas, trouvez s'il existe un ouvert du plan complexe où la fonction est holomorphe (i.e. satisfaisant les conditions de Cauchy-Riemann). Si oui, calculez la dérivée dans cet ouvert.

Exercice 3. *Montrez que les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent, en coordonnées sphériques, sous la forme*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \ , \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \tag{1.20}$$

Exercice 4. *Calculez toutes les valeurs de $\imath^\imath$ ainsi que la valeur de la détermination principale.*

Exercice 5. *Soit la détermination principale de* $\log z$ *définie par la coupure le long de la demi-droite* $\alpha = \pi/4$ *et la valeur* $\log \imath = 5\imath\pi/2$. *Calculez pour cette détermination la valeur de* $\log 2$.

— 2 —

Intégration complexe

Le point absolument central de cette partie va être de montrer l'équivalence entre la nature holomorphe d'une fonction (*i.e.* sa dériveabilité dans un domaine du plan complexe) et le fait que son intégrale sur ce domaine soit indépendante du chemin d'intégration.

Définition 10. *Soit $f(x) = \varphi(x) + \imath\psi(x)$ une fonction complexe de la variable réelle x. Son intégrale se défini simplement comme*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \imath \int_a^b \psi(x)\,dx \tag{2.1}$$

Comme pour les fonctions réelles, on peut montrer que

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\;dx \tag{2.2}$$

2.1 Contours d'intégration

On appelle arc $\mathcal{C}$ dans le plan complexe l'ensemble des points $z = x + \imath y$ paramétrés par $x = x(t)$ et $y = y(t)$ pour $a \leq t \leq b$, où $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions continues de la variable réelle t.

Définition 11. *Un arc est simple s'il ne se recoupe pas lui-même. Un arc est fermé s'il existe un couple $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z(c) = z(d)$.*

Exemple 1. *Le cercle de centre z_0 et de rayon R défini comme $z = z_0 + Re^{\imath\Theta}$ est un arc simple fermé orienté dans le sens anti-horaire.*

Définition 12. *La dérivée de la fonction z est $z'(t) = x'(t) + \imath y'(t)$. Si $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions $C^1_{[a,b]}$, l'arc $\mathcal{C}$ est différentiable.*

Définition 13. *La longueur L d'un arc $\mathcal{C}$ associé à un chemin $t \in [a, b]$ est donnée par*

$$L = \int_a^b |z'(t)|\,dt \tag{2.3}$$

Définition 14. *Un contour est un assemblage d'arcs differentiables joints bout à bout.*

2.2 Intégrale curviligne

L'intégrale d'une fonction complexe de la variable complexe z nécessite de définir un contour $\mathcal{C}$ le long duquel on calcule cette integrale. Cette notion n'existe pas pour les integrales des fonctions réelles, car le domaine d'intégration étant tout ou partie de l'axe réel, le chemin suivi est de fait un segment dont les extrêmités sont les bornes du domaine d'intégration. Une intégrale curviligne dépend donc du contour d'intégration $\mathcal{C}$ et se note

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz \tag{2.4}$$

Définition 15. *Si l'on note $z(t)$ la définition paramétrique du contour $\mathcal{C}$, pour $a \leq t \leq b$, alors,*

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)\, dt \tag{2.5}$$

En utilisant les notations des définitions 10 et 12,

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = \int_a^b (\varphi x' - \psi y')\, dt + \imath \int_a^b (\psi x' + \varphi y')\, dt \tag{2.6}$$

$$= \int_{\mathcal{C}} \varphi\, dx - \psi\, dy + \imath \int_{\mathcal{C}} \psi\, dx + \varphi\, dy \tag{2.7}$$

On peut majorer le module de cette intégrale, ce qui sera utile par la suite. Si l'on note M un majorant de la fonction $f(z)$ sur un domaine contenant l'arc $\mathcal{C}$, alors les définitions 13 et 15 permettent d'écrire

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz \right| \leq \int_a^b |f[z(t)]z'(t)|\, dt \tag{2.8}$$

$$\leq M \int_a^b |z'(t)|\, dt \tag{2.9}$$

$$\leq ML \tag{2.10}$$

On en déduit le Lemme de Jordan

Lemme 1. *(Lemme de Jordan) Soit un arc de cercle $\mathcal{C}$ de centre z_0, de rayon R et d'angle au centre Ω. La longueur de l'arc est alors $L = \Omega R$ et l'on a*

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz \right| \leq M\Omega R \tag{2.11}$$

— *Si* $\lim_{R \to 0} [R \max_{z \in \mathcal{C}} |f(z)|] = 0$, *alors* $\lim_{R \to 0} \int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = 0$

— *Si* $\lim_{R \to \infty} [R \max_{z \in \mathcal{C}} |f(z)|] = 0$, *alors* $\lim_{R \to \infty} \int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = 0$

Le lemme de Jordan est une condition suffisante pour que des intégrales du type $\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz$ soient nulles. Cette condition n'est pas toujours nécessaire. Son interêt va devenir clair à la section suivante, avec le théorème de Cauchy.

2.3 Théorème de Cauchy

L'intégrale $\int_\mathcal{C} f(z)dz$ dépend *a priori* de la fonction f à intégrer, mais aussi du contour d'intégration $\mathcal{C}$. Néanmoins, pour une fonction holomorphe, le théorème de Cauchy énonce un résultat fondamental :

Théorème 2. *(Théorème de Cauchy) Si une fonction $f(z)$ est holomorphe dans un domaine simplement connexe, alors pour tous les contours $\mathcal{C}$ appartenant à ce domaine et ayant des extrêmités communes, l'intégrale $\int_\mathcal{C} f(z)\,dz$ a une valeur unique.*

La démonstration de ce théorème permet de le comprendre ; avec la relation (2.7), l'indépendance de l'intégrale de $\int_\mathcal{C} f(z)\,dz$ par rapport au chemin se ramène à la même question pour les deux intégrales curvilignes

$$\int_\mathcal{C} \varphi\,dx - \psi\,dy\ , \quad \int_\mathcal{C} \psi\,dx + \varphi\,dy \tag{2.12}$$

Dans un domaine simplement connexe, l'intégrale curviligne $\int_\mathcal{C} P\ dx + Q\ dy$, où P et Q sont des fonction réelles de classe C^1, est indépendante du chemin d'intégration si et seulement si l'intégrant est une differentielle totale, i.e. $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. Pour notre fonction holomorphe, cette condition s'écrie

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}\ , \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{2.13}$$

ce que sont exactement les conditions de Cauchy-Riemann (eq. 1.7 ou 1.8). Ainsi, pour une fonction holomorphe, le théorème est vérifié.

Pour une fonction holomorphe, si α et β sont les extrêmités d'un arc $\mathcal{C}$, on peut alors écrire

$$\int_\mathcal{C} f(z)\,dz \ = \ \int_\alpha^\beta f(z)\,dz \tag{2.14}$$

La forme certainement la plus importante pour les physiciens du théorème de Cauchy est celle qui concerne les intégrales sur un contour fermé. Elles se notent toujours en indiquant le nom de l'arc considéré, mais on y ajoute un petit rond sur le signe intégrale pour signifier que le contour est fermé. On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 1. *(Deuxième forme du théorème de Cauchy) Soit f une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe. Alors, pour tout contour fermé $\mathcal{C}$, on a*

$$\oint_\mathcal{C} f(z)\,dz \ = \ 0 \tag{2.15}$$

2.4 Indépendance par rapport au chemin d'intégration

Pour une fonction holomorphe $f(z)$ sur un domaine simplement connexe D, on peut définir l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta \equiv F(z) \tag{2.16}$$

$F(z)$ est aussi une fonction holomorphe sur le domaine D. Elle admet donc une dérivée que l'on peut calculer :

$$\begin{aligned}
F'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} && (2.17)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_{z_0}^{z+h} f(z)\, dz - \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz\right] && (2.18)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_{z}^{z+h} f(z)\, dz\right] && (2.19)
\end{aligned}$$

Or $f(z)$ est continue en z puisqu'elle est analytique. Cette dernière limite vaut donc $f(z)$ et l'on a démontré que $F'(z) = f(z)$.

$F(z)$ est donc une primitive de $f(z)$, toutes les autres ne diffèrent de celle-ci que par addition d'une constante, comme en analyse réelle (à la nuance que la constante peut être complexe). Ainsi, $\int_a^b f(z)\, dz = F(b) - F(a)$, *i.e.* cette valeur ne dépend que des bornes, et donc pas du chemin suivi.

2.5 Formule intégrale de Cauchy

Fort du théorème de Cauchy, une fonction holomorphe $f(z)$ peut s'écrire comme une intégrale de contour où z intervient comme un paramètre.

Théorème 3. *(Formule intégrale de Cauchy) Soit f une fonction holomorphe sur un disque fermé de centre z_0 et de rayon R. Alors, pour tout $|z - z_0| < R$, on a*

$$f(z) = \frac{1}{2\imath\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \tag{2.20}$$

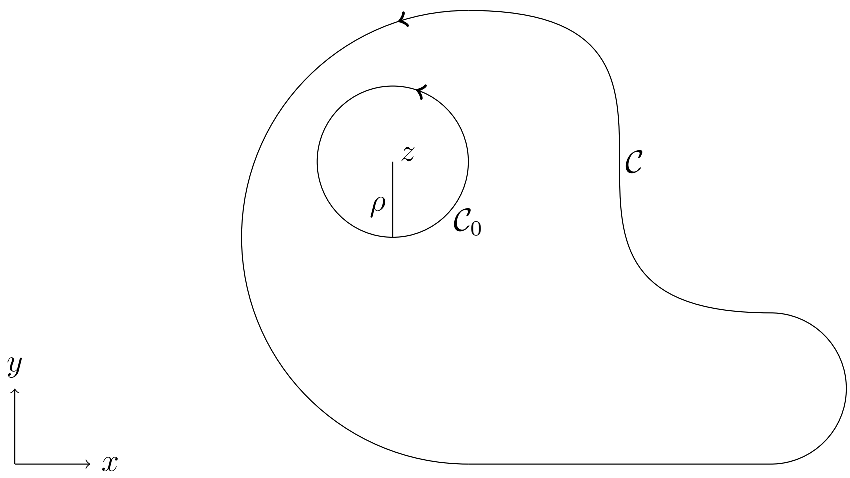
où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre z_0 et de rayon R.

Cette équation signifie donc que pour une fonction holomorphe à l'intérieur et sur la frontière d'un contour fermé simple $\mathcal{C}$, la valeur de la fonction f dans le domaine est complètement déterminée par la valeur de f sur la frontière $\mathcal{C}$. En réécrivant cette équation sous la forme

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\imath\pi f(z) \tag{2.21}$$

elle peut être utilisée pour calculer certaines intégrales le long de contours fermés simples. Nous en ferons usage notamment pour le calcul de transformées de Laplace.

Pour démontrer la formule intégrale de Cauchy, on considère le contour fermé $\mathcal{C}$ ainsi que le contour $\mathcal{C}_0$ centré en z et de rayon ρ.



$\mathcal{C}_0$ est donc le cercle $|\zeta - z| = \rho$ orienté dans le sens direct et intérieur à $\mathcal{C}$. C'est donc aussi la frontière du disque D de centre z et de rayon ρ. $f(z)$ étant continue en z, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^\star$, il existe $\delta \in \mathbb{R}$ tel que si $|\zeta - z| < \delta$, alors $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. Ainsi, pour $\rho < \delta$, on a $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ sur le cercle $\mathcal{C}_0$.

La fonction

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \tag{2.22}$$

étant holomorphe sur $\dot{D}$, on peut appliquer le théorème de Cauchy sur le domaine doublement connexe. L'intégrale le long de la frontière orientée de la région comprise entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_0$ est donc nulle.

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0 \tag{2.23}$$

On en déduit donc

$$\oint_{\mathcal{C}_0} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta \tag{2.24}$$

Par ailleurs, la primitive de la fonction inverse étant une des branches de la fonction log (n'importe laquelle, définie à $2\imath\pi$ près), on a

$$\oint_{\mathcal{C}_0} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\imath\pi \tag{2.25}$$

et l'on peut donc réécrire

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\imath\pi f(z) = \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \tag{2.26}$$

La longueur de l'arc $\mathcal{C}_0$ est $2\pi\rho$. Ayant précédemment majoré la difference $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$, on en déduit l'inégalité

$$\left| \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| < \frac{\varepsilon}{\rho} 2\pi\rho \tag{2.27}$$

ε étant aussi petit que l'on veut, on peut faire tendre le membre de droite de l'eq. (2.26) vers zero, ce qui clôt la démonstration de la formule intégrale de Cauchy, eq. (2.20) ou (2.21).

2.6 Dérivée de fonctions holomorphes

La formule intégrale de Cauchy peut se généraliser aux fonctions dérivées d'une fonction holomorphe. En effet, si $f(z)$ est une fonction holomorphe sur un domaine, toutes ses dérivées existent et sont elles aussi holomorphes sur ce domaine. On peut alors montrer (ce que nous ne ferons pas) une extension de la formule intégrale de Cauchy.

Corollaire 2. *(Corollaire de la formule intégrale de Cauchy) Soit f une fonction holomorphe sur un contour fermé simple $\mathcal{C}$ orienté positivement, ainsi que sur ce contour. Soit z un point de $\dot{D}$. Alors,*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\imath\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \tag{2.28}$$

Pour $n = 0$, on retouve ainsi la formuile intégrale de Cauchy de l'eq. (2.20). Ce corollaire se démontre par récurrence.

2.7 Exercices

Exercice 6. *On définit les 3 points par leurs affixes $A(0,1)$, $B(2,0)$ et $C(2,1)$. Soit la fonction*

$$f(x,y) = x^2 + y + \imath(y^2 + 2x) \tag{2.29}$$

Calculez les intégrales de f sur OAC, OBC, OC et sur le cercle unité. La fonction f est-elle holomorphe dans un ouvert contenant ces trajets.

Exercice 7. *Soit le fonction* $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2\imath xy$. *Calculez l'intégrale de* f

- *sur la ligne brisée* $z_1(1+\imath)$, $z_2(2+\imath)$, $z_3(2+4\imath)$.
- *sur l'arc de parabole* $y = x^2$ *joignant* z_1 *à* z_3.

Retrouvez ce résultat en utilisant la méthode de la primitive.

Exercice 8. *Calculez*

$$\chi(\mathcal{C}) = \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z-2}\, dz \tag{2.30}$$

- *sur le cercle* $\mathcal{C}_1 = \{z \mid |z| < 1\}$
- *sur le cercle* $\mathcal{C}_2 = \{z \mid |z| < 3\}$

Exercice 9. *Calculez*

$$\chi(\mathcal{C}) = \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{\alpha z}}{1+z^2}\, dz \tag{2.31}$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$ *sur le cercle* $\mathcal{C} = \{z \mid |z| < 3\}$

— 3 —

Pôles & résidus

Dans ce chapitre, nous allons aborder la manière d'approcher, au sens des limites, une fonction complexe par une série de puissance (ou série entière). Nous discuterons les conditions nécessaires, pour qu'une telle série existe, et soulignerons dans certains cas qu'aux termes de puissances positives peuvent s'ajouter des termes de puissances négatives. Nous verrons ensuite l'intérêt pratique de définir ces séries, pour le calcul d'intégrales ou la résolution d'équations différentielles.

3.1 Série de Taylor

Les séries de Taylor définies en analyse réelle peuvent être étendues aux fonctions d'une variable complexe. On peut ainsi énoncer un théorème de Taylor généralisé.

Théorème 4. *(Développement en série de Taylor généralisé aux fonctions complexes) Si $f(z)$ est une fonction holomorphe sur le disque ouvert D de centre z_0, de rayon R et de frontière $\mathcal{C}$, on a pour tous points z intérieur à $\mathcal{C}$*

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots \tag{3.1}$$

Cette série de puissance converge[1] *vers $f(z)$ pour $|z - z_0| < R$.*

De l'eq. (3.1), il apparaît clairement que pour qu'une fonction soit développable en série entière[2], il faut et il suffit qu'elle soit dériveable. Pour une fonction complexe, il lui faut donc être holomorphe. Lorsqu'une fonction complexe admet un développement en série entière, on dit qu'elle est analytique. Nonobstant l'équivalence de ces termes, l'usage de l'un ou de l'autre permet surtout de souligner la propriété qui nous interesse. Ainsi, les physiciens utilisent le plus souvent le terme de fonction analytique.

Théorème 5. *Toute fonction holomorphe dans le disque ouvert D de centre z_0 et de rayon R peut être développée en série entière dans ce disque,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{3.2}$$

1. Nous reviendrons ultérieurement sur la notion de convergence. Mais la bonne nouvelle est que sur tout compact inclu dans son domaine de convergence, cette convergence est normale.

2. On nomme ces séries entières car les puissances qui y interviennent le sont. Néanmoins, on réserve plutôt cette terminologie aux séries de puissances positives.

En utilisant l'eq. (2.20), les coefficients c_n sont donnés par la formule

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\imath\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \tag{3.3}$$

où $\mathcal{C}$ est un contour fermé simple entourant le point z_0, intérieur au cercle $|z - z_0| < R$ et orienté positivement.

Les eq. (2.28) et (3.1) permettent de définir l'expression des coefficients de la série de Taylor pour tout $n \in \mathbb{N}$.

A valeur d'entraînement, vous pouvez calculer la série de Taylor de nombreuses fonctions usuelles, plus ou moins simples. Elles sont par ailleurs tabulées et facilement accessibles. Ainsi, autour de $z = 0$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty \tag{3.4}$$

ou encore

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1 \tag{3.5}$$

Comme pour les fonctions réelles, il faut toujours préciser l'affixe z du point a voisinage duquel la série est définie.

3.2 Série de Laurent

Le théorème de Taylor ne s'applique qu'aux fonctions analytiques. Lorsqu'elles ne le sont pas, c'est souvent parcequ'elles divergent en un ou plusieurs points. Il est donc légitime d'essayer d'approcher notre fonction par une série incluant des puissances négatives de $z - z_0$ (qui elles aussi divergent en z_0). Un tel développement est appelé développement en série de Laurent. On énonce ainsi le théorème de Laurent,

Théorème 6. *(Développement en série de Laurent) Soit f une fonction holomorphe dans le disque pointé $\dot{D} = \{z \mid 0 < |z - z_0| < R\}$. Alors, pour tout $z \in \dot{D}$,*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{3.6}$$

la série convergeant uniformément dans toute couronne $\{z \mid \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\}$ avec $0 < \rho_1 < \rho_2 < R$. Plus précisement, la série entière $\sum_0^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ a un rayon de convergence $\geq R$ (ce qui donne un sens à la somme des termes d'indice positif), tandis *que la série $\sum_{-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n$ a un rayon de convergence infini (ce qui donne un sens à la somme des termes d'indice négatif). Les coefficients c_n sont donnés par*

$$c_n = \frac{1}{2\imath\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3.7}$$

où $\mathcal{C}$ est un contour fermé entourant z_0, de rayon $< R$ et orienté positivement.

L'eq. (3.6) permet de définir la série de Laurent de $f(z)$. Il faut apprécier la nuance avec les séries de Taylor :

— La série de Taylor est définie sur le disque ouvert $|z-z_0| < R$ à l'intérieur duquel la fonction à développer est analytique.

— La série de Laurent est définie sur le disque pointé $0 < |z-z_0| < R$ à l'intérieur de laquelle la fonction à développer est analytique.

Ainsi, s'il existe une ou plusieurs singularités d'une fonction complexe, alors il "suffit" de définir un contour $\mathcal{C}_0$ tel que ces singularités soient toutes dans son intérieur. La série de Laurent d'une fonction ne permet donc pas d'approcher une fonction en ses points singuliers, mais en leurs voisinages.

Les quotients rationnels peuvent s'écrire par décomposition en série de Laurent. Les quotients faisant intervenir aux numérateurs des fonctions développables en série de Taylor et au dénominateur des fonctions polynomiales sont aussi développables en série de Laurent facilement. Ainsi, en $z = 0$

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \dots, \quad 0 < |z| < \infty \tag{3.8}$$

3.3 Partie principale d'une fonction

Définition 16. *On appelle partie principale de f en z_0 la partie de la série de Laurent qui contient les puissances strictement négatives de $z - z_0$. On appelle partie régulière de f en z_0 la partie qui contient les puissances positives ou nulles.*

Si f est holomorphe sur $\dot{D}$, on dit aussi que f a une singularité en z_0, ou que z_0 est un point singulier de f. On note c_n les coefficients de la série de Laurent associée : $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$. Trois cas :

— Tous les c_n sont nuls pour $n \leq -1$. f se prolonge alors en une fonction $\sum_0^\infty c_n(z-z_0)^n$ holomorphe sur tout le disque. On dit que z_0 est une singularité apparente. On prolonge alors f avec $f(z_0) = f_0$, supprimant ainsi la singularité.

— Il n'existe qu'un nombre fini (non nul) d'entiers $n < 0$ tel que $c_n \neq 0$. En notant $-p$ le plus petit, on peut écrire

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^p} \tag{3.9}$$

h étant holomorphe dans D et ne s'annulant pas en z_0. On dit que z_0 est un pole d'ordre p de f en z_0.

— Il existe une infinité d'entiers négatifs tels que $c_n \neq 0$. Alors, z_0 est un point singulier essentiel de f.

Le premier cas de figure peut ne pas sembler évident. A titre d'illustration, la fonction $f(z) = z^{-1} \sin z$ n'est pas analytique en $z = 0$, mais tend vers 0. Elle peut donc être "prolongée" par cette valeur en $z = 0$, et ainsi devenir analytique, y compris en 0. $z = 0$ est une singularité éliminable.

3.4 Théorème des résidus

Définition 17. *On appelle résidu de la fonction complexe $f(z)$ au point $z = z_0$, noté $\mathrm{Res}\{f; z_0\}$, le nombre complexe égal au coefficient d'ordre -1 du développement en série de Laurent de la fonction $f(z)$ dans un disque pointé de centre $z = z_0$.*

Le théorème de Cauchy permet de dire que l'intégrale sur un contour $\mathcal{C}$ d'une fonction, holomorphe sur et à l'intérieur de $\mathcal{C}$, est nulle. Si par contre une fonction $f(z)$ n'est pas holomorphe en un point z_0, mais l'est dans son voisinage, on dit que le point z_0 est un point singulier. Ce point est alors dit isolé (et nous ne traiterons que ce cas).

Si une fonction admet un nombre fini de points singuliers, le théorème de Cauchy ne s'applique plus. La valeur de l'intégrale sur un contour $\mathcal{C}$ de la fonction $f(z)$ dépend alors des "résidus" de la fonction, qui se calculent en chaque point singulier.

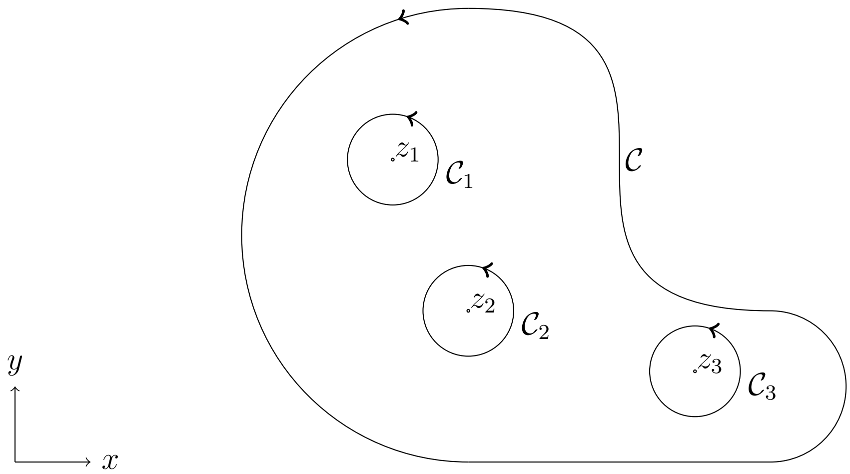
Théorème 7. *(Théorème des résidus) Soit $\mathcal{C}$ le contour orienté positivement d'un domaine ouvert simplement connexe et $\{z_i; i \in [1, n]\}$ les affixes des points singuliers (n'appartenant pas à $\mathcal{C}$) d'une fonction complexe f. Alors,*

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = 2\imath\pi \sum \mathrm{Res}\{f; z_i \mid i \in [1, n]\} \tag{3.10}$$

On entrevoit ici la puissance de ce résultat ; le calcul de la série de Laurent d'une fonction permet aussi le calcul de l'intégrale de cette fonction sur un contour fermé.

Le theorème des résidus se démontre en entourant chaque singularité z_i par un cercle $\mathcal{C}_i$ orienté positivement, intérieur à $\mathcal{C}$, et de rayons suffisamment petits pour n'avoir aucun point en commun. Les cercles $\mathcal{C}_i$ ainsi que le contour $\mathcal{C}$ forment la frontière d'une région fermée dans laquelle f est analytique[3].

3. cette région est de fait multiplement connexe



D'après le théorème de Cauchy [4],

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\, dz - \oint_{\mathcal{C}_1} f(z)\, dz - \oint_{\mathcal{C}_2} f(z)\, dz - \cdots - \oint_{\mathcal{C}_n} f(z)\, dz = 0 \tag{3.11}$$

or pour tous les cercles $\mathcal{C}_i$, d'après la formule intégrale de Cauchy donnée par l'eq. (2.20) on a

$$\oint_{\mathcal{C}_i} f(z)\, dz = 2\imath\pi \text{Res}\{f; z_i\} \tag{3.12}$$

ce qui démontre le théorème des résidus.

Pour déterminer le résidu d'une fonction f en un point singulier z_i, la première méthode à essayer est d'écrire la série de Laurent pour en déterminer le coefficient d'ordre -1.

Pôle simple. Soit une fonction de la forme

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z - z_0} \tag{3.13}$$

où $\phi(z)$ est analytique en z_0 et non nulle. La fonction ϕ admet alors une série de Taylor

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \tag{3.14}$$

définie sur le disque ouvert $|z - z_0| < R$. On en déduit la série de Laurent de la fonction f

$$f(z) = \frac{\phi(z_0)}{z - z_0} + \frac{\phi'(z_0)}{1!} + \frac{\phi''(z_0)}{2!}(z - z_0) + \ldots, \quad 0 < |z - z_0| < R \tag{3.15}$$

4. Dans le théorème de Cauchy, la fonction que l'on considère doit être analytique dans un ouvert simplement connexe. Mais le circuit le long duquel l'intégrale fermée est nulle peut donner lieu à des trous.

Ce développement en série de Laurent étant unique dans le domaine $0 < |z - z_0| < R$, et $\phi(z_0) \neq 0$, f admet un pôle simple en z_0 dont le résidu est $\phi(z_0)$.

Pôle d'odre m. Soit une fonction de la forme

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}, \quad m \geq 2 \tag{3.16}$$

où $\phi(z)$ est analytique en z_0 et non nulle. La fonction ϕ admettant la même série de Taylor que précédemment, on en déduit le développement en série de Laurent de f

$$f(z) = \frac{\phi(z_0)}{(z - z_0)^m} + \frac{\phi'(z_0)}{1!} \frac{1}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \frac{1}{z - z_0} + \ldots, \quad 0 < |z - z_0| < R \tag{3.17}$$

Ce développement en série de Laurent est lui aussi unique dans le disque pointé $\dot{D} = \{0 < |z - z_0| < R\}$. Le résidu du pôle d'ordre m en z_0 est donc

$$\frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \tag{3.18}$$

En pratique, on calcul les coefficients du développement en série de Laurent d'une fonction ayant un pôle d'ordre m différement. Soit la fonction $h(z) = (z - z_0)^m f(z)$. On a la série de Laurent $f(z) = \sum_{-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ avec $c_{-m} \neq 0$. Alors, on a la série de Taylor

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-m} (z - z_0)^n \tag{3.19}$$

En utilisant la définition de la série de Taylor, on identifie

$$c_{n-m} = \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} \tag{3.20}$$

d'ou, en posant $\mu = n - m$,

$$c_\mu = \frac{1}{(\mu + m)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{(\mu+m)}}{dz^{\mu+m}} \{(z - z_0)^m f(z)\} \tag{3.21}$$

Pour le calcul de résidus, on peut regarder le cas particulier $\mu = -1$, soit

$$c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} \{(z - z_0)^m f(z)\} \tag{3.22}$$

Il n'y a pas de méthode générale pour le calcul du résidu d'une fonction ayant un point singulier essentiel. On pourra néanmoins essayer d'en écrire la série de Laurent avec des lois de composition.

3.5 Calcul d'intégrales réelles impropres

Bien que l'on ne discute que le cas des intégrales, il faut préciser les conditions sous lesquelles une fonction holomorphe possède une primitive.

Théorème 8. *Si f est holomorphe dans un disque, elle y possède une primitive. Si f est holomorphe dans un disque pointé de centre z_0, elle y possède une primitive si et seulement si* $\mathrm{Res}\{f; z_0\} = 0$.

Ainsi, une fonction log dans le plan complexe devrait avoir une dérivée égale à $1/z$. Or $1/z$ est holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C}\backslash 0$, et possède un pôle simple non-nul à l'origine. Il résulte du théorème 8 que $1/z$ ne possède pas de primitive dans cet ouvert. En fait, pour pouvoir définir une telle primitive, il faut faire une coupure dans le plan complexe comme vu au début de ce cours.

Définition 18. *On appelle intégrale impropre de f sur $[a; b[$ la limite*

$$\lim_{y \to b^-} \int_a^y f(x)\, dx \tag{3.23}$$

Dans cette définition, la limite pourrait aussi concerner la limite inférieure ou les deux en même temps. Lorsque le support de l'intégrale est infini, ou semi-infini, on peut généraliser cette notion en introduisant la *valeur principale de Cauchy.*

Définition 19. *L'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$ admet pour valeur principale de Cauchy (notée vp) la limite*

$$vp \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx \tag{3.24}$$

Dans cette section, on va montrer en utilisant un exemple que la valeur principale de Cauchy d'une fonction qui s'écrit comme quotient de 2 polynômes réels (et dont le dénominateur n'admet pas de zéros réels) peut se calculer à l'aide du théorème des résidus. On prend pour exemple

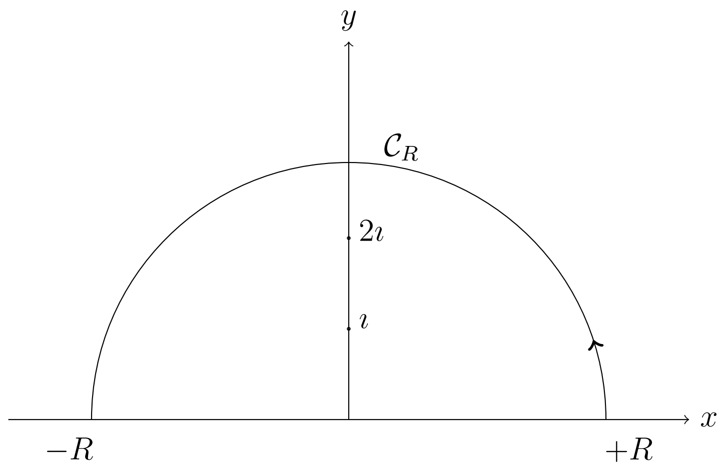
$$\int_0^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx \tag{3.25}$$

On définit alors la fonction complexe

$$f(z) = \frac{2z^2 - 1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} \tag{3.26}$$

dont l'intégrale le long de l'axe réel est égale à celle de l'eq. (3.25). Cette factorisation permet de faire sortir les singularités isolées en $z = \pm\imath$ et en $z = \pm 2\imath$. Ailleurs, $f(z)$ est analytique, donc développable en série de Laurent.

On définit le contour formé par le segment $z = x$ avec $-R \leq x \leq R$ et le demi cercle supérieur $\mathcal{C}_R$ donné par $|z| = R$. Pour $R > 2$, les deux singularités $z = \imath$ et $z = 2\imath$ sont à l'intérieur du contour.



En intégrant le long de ce contour dans le sens direct, le théorème des résidus permet d'écrire

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\mathcal{C}_R} f(z)\,dz = 2\imath\pi \mathrm{Res}\{f; \imath, 2\imath\} \tag{3.27}$$

Pour expliciter le coefficient d'ordre -1 de la série de Laurent, on décompose $f(z) = \phi_1(z)/(z-\imath) = \phi_2(z)/(z-2\imath)$, avec

$$\phi_1(z) = \frac{2z^2-1}{(z+\imath)(z^2+4)}\ , \quad \phi_2(z) = \frac{2z^2-1}{(z^2+1)(z+2\imath)} \tag{3.28}$$

On calcule donc simplement $\phi_1(\imath) = \imath/2$ et $\phi_2(2\imath) = -3\imath/4$. En conséquence, $2\imath\pi\mathrm{Res}\{f; \imath, 2\imath\} = \pi/2$ et l'on peut réécrire l'eq. (3.27) comme

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2} - \int_{\mathcal{C}_R} f(z)\,dz \tag{3.29}$$

On peut se douter que l'intégrale le long du demi-cercle va tendre vers 0 pour $R \to \infty$: le numérateur est dominé par le terme en R^2, le dénominateur en R^4, et le contour en R. Ainsi, l'intégrale sera en $1/R$ et tendra donc vers 0. Plus précisement,

$$|2z^2 - 1| \leq 2R^2 + 1 \text{ sur } \mathcal{C}_R\ , \text{ et } \quad |z^4 + 5z^2 + 4| \geq (R^2-1)(R^2-4) \text{ sur } \mathcal{C}_R \tag{3.30}$$

dont on déduit la majoration

$$\left|\int_{\mathcal{C}_R} \frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+1} dz\right| \leq \frac{2R^2+1}{(R^2-1)(R^2-4)}\pi R \tag{3.31}$$

on a donc

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathcal{C}_R} f(z)\, dz = 0 \tag{3.32}$$

Cette limite, comme souvent sur ce type de contour, peut s'établir plus formellement avec le lemme de Jordan. L'eq. (3.32) permet d'écrire

$$vp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}\, dx = \frac{\pi}{2} \tag{3.33}$$

3.6 Intégrales impropres faisant intervenir sin & cos

Le problème semble plus hardu avec une intégrale de la forme [5]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos x\, dx \tag{3.34}$$

car dans le plan complexe, $\cos z$ est dominé par le terme en e^y qui diverge pour $R \to \infty$. L'idée est donc de remplacer le terme en cos dans l'eq. (3.34) par le terme $e^{\imath x}$; il lui est égal le long de l'axe réel, et il est borné (car en e^{-y}) sur le demi-cercle supérieur $\mathcal{C}_R$. A titre d'illustration, calculons

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\, dx \tag{3.35}$$

et introduisons pour cela la fonction

$$f(z) = \frac{e^{\imath z}}{(z^2+1)^2} \tag{3.36}$$

Dans le demi-plan complexe supérieur, cette fonction est analytique sauf en $z = \imath$ où elle admet une singularité isolée. Notez que ce pôle est d'ordre 2. En choisissant le même contour d'intégration que précédemment, on a

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{\imath x}}{(x^2+1)^2}\, dx = 2\imath\pi \mathrm{Res}\{f;\imath\} - \int_{\mathcal{C}_R} \frac{e^{\imath z}}{(z^2+1)^2}\, dz \tag{3.37}$$

On écrit

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-\imath)^2} \text{ , avec } \quad \phi(z) = \frac{e^{\imath z}}{(z+\imath)^2} \tag{3.38}$$

5. la méthode est la même avec la fonction sin

Le pôle étant d'ordre 2, le résidu de f est donné par la dérivée de ϕ, soit

$$\phi'(\imath) = -\frac{\imath}{2e} \tag{3.39}$$

On peut donc réécrire la partie réelle de l'eq. (3.37)

$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{\pi}{e} - \Re \int_{\mathcal{C}_R} \frac{e^{\imath z}}{(z^2+1)^2}\, dz \tag{3.40}$$

Désormais, $e^{\imath z} = e^{-y} \leq 1$ dans le demi-plan complexe supérieur. En majorant $(z^2+1)^2 \leq (R^2-1)^2$, la longueur de l'arc $\mathcal{C}_R$ étant toujours πR, l'intégrale sur le demi-cercle complexe $\mathcal{C}_R$ tend vers 0 pour $R \to \infty$. Ainsi,

$$vp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{\pi}{e} \tag{3.41}$$

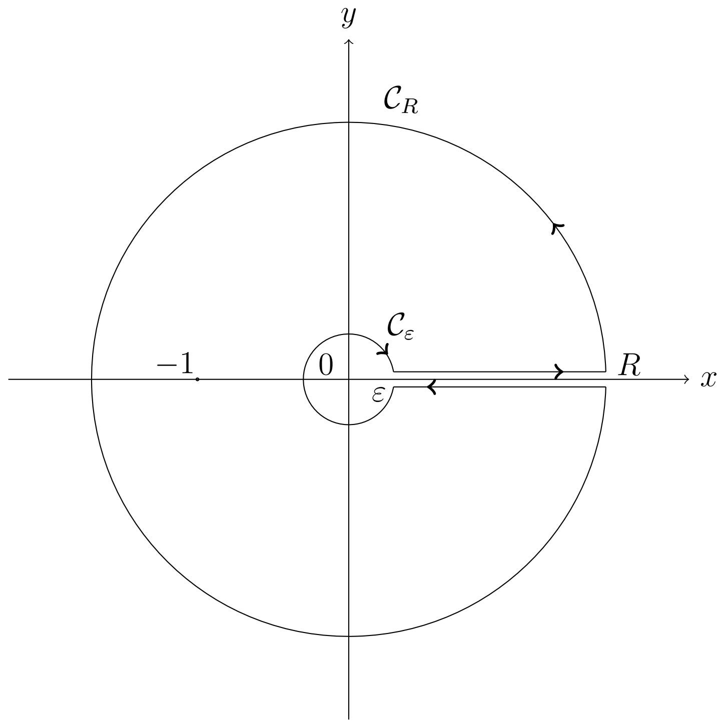
3.7 Intégration le long d'une coupure

Les coupures apparaissent naturellement pour les fonctions complexes multiformes. Le cas le plus courant est sûrement la fonction log. Mais comme on l'a vu, le log apparaît aussi naturellement dans l'expression d'une fonction puissance. Lorsque l'on intègre dans le plan complexe, il faut donc considérer l'existence de coupure, et la placer correctement pour pouvoir en déduire la valeur de certaines intégrales. On choisit comme exemple [6]

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-\alpha}}{x+1}\, dx \ , \quad 0 < \alpha < 1 \tag{3.42}$$

α étant un nombre non-entier, il ne semble pas évident d'écrire le développement en $x = 0$ de cette fonction en série de Laurent. Il va donc être compliqué d'utiliser le théorème des résidus en ce point. Par-contre, pas de problème pour l'utiliser en $z = -1$. Pour prendre en compte ce contexte, on choisit un contour d'intégration basé sur les 2 cercles $\mathcal{C}_\varepsilon$ et $\mathcal{C}_R$ et l'"aller-retour" le long du demi-axe réel positif, comme illustré sur la Figure.

6. cette intégrale est-elle impropre ? Si oui, pourquoi ?



La fonction

$$f(z) = \frac{z^{-\alpha}}{z+1} \tag{3.43}$$

étant multi-valuée, on choisit la branche définie pour $|z| > 0$, $0 < \arg z < 2\pi$. Ce choix est naturel car la coupure $\arg z = 0$ est située entre les 2 chemins joignant ε à R. Cette coupure étant hors du contour d'intégration, $f(z)$ est donc analytique dans le contour, sauf en $z = -1$ où elle admet un résidu. On note donc $f(z) = \phi(z)/(z+1)$ avec $\phi(z) = z^{-\alpha}$. Alors, $\phi(z) = e^{-\alpha \log z}$ en se rappelant que $\log z = \log r + \imath\Theta$. Ainsi, sur le chemin “supérieur” entre ε et R, on a $\log z = \log x$, alors que sur le chemin “inférieur”, on a $\log z = \log x + 2\imath\pi$. En $z = -1$, le résidu est $\phi(-1) = e^{-\imath\alpha\pi}$. Le théorème des résidus nous permet donc d'écrire

$$\int_\varepsilon^R \frac{x^{-\alpha}}{x+1}\, dx + \int_{\mathcal{C}_R} f(z)\, dz + \int_R^\varepsilon \frac{x^{-\alpha} e^{-2\imath\alpha\pi}}{x+1}\, dx - \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} f(z)\, dz = 2\imath\pi e^{-\imath\alpha\pi} \tag{3.44}$$

soit

$$\int_{\mathcal{C}_R} f(z)\, dz + \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} f(z)\, dz = 2\imath\pi e^{-\imath\alpha\pi} + (e^{-2\imath\alpha\pi} - 1) \int_\varepsilon^R \frac{x^{-\alpha}}{x+1}\, dx \tag{3.45}$$

On peut majorer l'intégrale sur $\mathcal{C}_\varepsilon$

$$\left| \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} f(z)\, dz \right| \leq \frac{\varepsilon^{-\alpha}}{1-\varepsilon} 2\pi\varepsilon = \frac{2\pi}{1-\varepsilon} \varepsilon^{1-\alpha} \tag{3.46}$$

qui tend vers 0 pour ε tendant vers 0 (car $0 < \alpha < 1$). Il en est de même pour l'intégrale sur $\mathcal{C}_R$

$$\left| \int_{\mathcal{C}_R} f(z)\, dz \right| \leq \frac{R^{-\alpha}}{R-1} 2\pi R = \frac{2\pi R}{R-1} \frac{1}{R^\alpha} \tag{3.47}$$

qui tend aussi vers 0 pour R tendant vers l'infini. En réarrangeant les termes de l'eq. (3.45), on obtient alors

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{x+1}\, dx = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \ , \quad 0 < \alpha < 1 \tag{3.48}$$

3.8 Intégrales définies faisant intervenir sin & cos

Il existe des intégrales définies de la forme

$$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta \tag{3.49}$$

qui peuvent aussi se calculer à l'aide du théorème des résidus si l'on suppose que θ est l'argument de l'affixe d'un point z sur un cercle centré en 0. Si son rayon est unité, alors $z = e^{\imath\theta}$ avec $0 \leq \theta < 2\pi$. L'intégrale de l'eq. (3.49) peut alors se réécrire

$$\oint_C f\left(\frac{z - z^{-1}}{2\imath}, \frac{z + z^{-1}}{2} \right) \frac{dz}{\imath z} \tag{3.50}$$

où $\mathcal{C}$ est le cercle unité parcouru dans le sens direct. Alors, si l'intégrand est une fraction rationnelle de z, et qu'aucun des zéros du dénominateur ne sont sur $\mathcal{C}$, leur identification permet le calcul des résidus associés, et donc de l'intégrale donnée par l'eq. (3.49). A titre d'illustration, on considère l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \alpha \sin\theta} d\theta \tag{3.51}$$

pour $-1 < \alpha < 1$, et $\alpha \neq 0$ (le calcul de l'intégrale est alors trivial). En introduisant $z = e^{\imath\theta}$, cette intégrale se réécrie

$$\frac{2}{\alpha} \oint_C \frac{1}{z^2 + 2\imath z \alpha^{-1} - 1}\, dz \tag{3.52}$$

Les deux pôles (donnés par les zéros du dénominateur) sont

$$z_1 = \imath \left(-\frac{1}{\alpha} + \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{|\alpha|} \right) \ , \quad z_2 = \imath \left(-\frac{1}{\alpha} - \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{|\alpha|} \right) \tag{3.53}$$

Lorsque $\alpha > 0$, $|z_2| > 1$. Or $|z_1 z_2| = 1$, ce qui implique $|z_1| < 1$. Alors, ni z_1 ni z_2 ne sont sur le contour $\mathcal{C}$. Le seul pôle intérieur à $\mathcal{C}$ est alors

$$z_1 = \imath \left(\frac{-1 + \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \right) \tag{3.54}$$

De manière symétrique, lorsque $\alpha < 0$, $|z_2| < 1$ et $|z_1| > 1$. Là encore, ni z_1 ni z_2 ne sont sur le contour $\mathcal{C}$ et le seul pôle intérieur à $\mathcal{C}$ est

$$z_2 = \imath \left(\frac{-1 + \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \right) \tag{3.55}$$

Donc quelque soit $-1 < \alpha < 1$, il n'y a jamais de pôles sur le contour $\mathcal{C}$ et l'on note z_0 le seul pôle intérieur donné par l'eq. (3.54) où (3.55). L'intégrand dans l'eq. (3.52) peut alors s'écrire

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z - z_0} \ , \quad \phi(z) = \left[z - \imath \left(\frac{-1 - \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \right) \right]^{-1} \tag{3.56}$$

Le résidu est alors

$$\phi(z_0) = \frac{\alpha}{2\imath\sqrt{1-\alpha^2}} \tag{3.57}$$

On en déduit alors la valeur de l'intégrale définie

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \alpha \sin\theta} \, d\theta = \frac{2}{\alpha} 2\imath\pi\phi(z_0) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \tag{3.58}$$

3.9 Exercices

Exercice 10. *La fonction z^{-1} est-elle développable en série de Taylor ? si oui, sur quel domaine ?*

Exercice 11. *Trouvez les singularités de la fonction*

$$f(z) = \frac{1}{(1 + z^{-1}) \sin z} \tag{3.59}$$

S'agit-il de singularités isolées ? De quel type sont-elles ?

Exercice 12. *Développez en séries de Taylor des fonctions*

$$f(z) = \frac{z}{z+2} \ , \quad g(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z} \right) \ , \quad h(z) = \sin z \tag{3.60}$$

autour de $z_0 = 1$ pour f, $z_0 = 0$ pour g et $z_0 = \pi/4$ pour h (quelques premiers termes).

Exercice 13. *Développez*

$$f(z) = \frac{3(z-1)}{(2z-1)(z-2)} \tag{3.61}$$

en série de Laurent dans le disque pointé de centre 2 et de rayon R. Quel est le rayon de convergence R de la série obtenue ? Quelle est la nature du point singulier $z = 2$? Quelle est la valeur du résidu de f en ce point ?

Exercice 14. *Développez*

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} \tag{3.62}$$

en série de Laurent autour de $z = 1$. Quel est le domaine de convergence de la série obtenue ? Quelle est la nature du point singulier $z = 1$ ainsi que la valeur du résidu de f en ce point ?

Exercice 15. *Calculez les résidus de*

$$f(z) = \frac{z(z-2)}{(z+1)^2(z^2-4)} \tag{3.63}$$

en chacun de ses points singuliers.

Exercice 16. *Décomposez en élements simples les fonctions*

$$f(z) = \frac{z^2+4z+3}{(z+\imath)(z+1)^4}\ , \quad g(z) = \frac{(z+1)^4}{1+z^2} \tag{3.64}$$

Bibliographie

[1] Benoist-Gueutal P, M. Courbage, Mathématiques pour la physique, Tome 1, *Editions Eyrolles*, 1992

[2] Bony J-M., Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, *Editions de l'école polytechnique*, 1999

[3] Krivine H., Exercices de mathématiques pour la physique, *Editions Cassini*, 2003

[4] Pinkus A., Zafrany S., Fourier series and integral transforms, *Cambridge University Press*, 1997

[5] Schwartz L., Méthodes mathématiques pour la physiques, *Hermann, Editeurs des sciences et des arts*, 1998

[6] Spiegel M-R., Variables complexes, *Mac Graw-Hill*, 1973

[7] Vogel P., Fonctions analytiques 3^{e} année, *Dunod*, 2006