Physique des Plasmas & de la Fusion

Rappels sur les Transformées Intégrales

roch smets — 2015

Table des matières

— 1 —

Séries de Fourier

1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle

Définition 1. *On appelle E, l'espace vectoriel des fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continues par morceaux (i.e. ayant un nombre fini de points de discontinuité, et dont les limites gauches et droites aux points de discontinuité existent et sont finies). Les points pour lesquels ces limites ne sont pas les mêmes sont appelés "points de saut".*

On notera $T = b - a$ la longueur de l'intervalle de définition des fonctions de E.

On montre facilement que E est un espace vectoriel (sur le corps des réels ou des complexes). Notamment, toute combinaison linéaire de vecteurs de E est dans E. La loi de composition (à gauche) externe est le produit par un scalaire (réel ou complexe).

Définition 2. *Deux fonctions de E sont égales presque partout*[1] *(on notera pp) si elles sont égales partout, sauf en un nombre fini de points.*

Lorsque l'on a construit un espace vectoriel, on se préoccupe souvent de lui associer un produit intérieur, *i.e.* la manière de définir le produit de deux vecteurs de cet espace. Ainsi, la notion de norme n'est plus très loin...

Définition 3. *Pour tout couple de fonctions $f, g \in E$, on définit leur produit scalaire par*

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{T} \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt \tag{1.1}$$

Le deuxième membre de l'intégrale est le complexe conjugué de la fonction $g(t)$. Il est donc égal à $g(t)$ pour les fonctions réelles.

Propriété 1. *Ce produit scalaire est une forme hermitienne :*

$$\begin{aligned}
\langle f_1 + f_2, g \rangle &= \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle && (1.2)\\
\langle f, g_1 + g_2 \rangle &= \langle f, g_1 \rangle + \langle f, g_2 \rangle && (1.3)\\
\langle \lambda f, \mu g \rangle &= \lambda \mu^\star \langle f, g \rangle && (1.4)
\end{aligned}$$

et vérifie la condition d'hermiticité $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$. Ainsi muni d'un produit scalaire, E définit un espace pré-Hilbertien.

1. On dit aussi parfois que les fonctions sont identiques

Pour faire de E un espace de Hilbert, il faut montrer que c'est un espace complet. Or la convergence des suites de Cauchy est un point essentiel dans ce cours. Il sera traité un peu plus loin. De la définition du produit scalaire, on déduit que la forme bilinéaire est définie positive.

1.2 Définition

On note $\omega = 2\pi/T$. Souvent, t est un temps et ω une pulsation, ce qui permet de rendre sans dimension leur produit (ce que doit être l'argument d'une fonction sinusoidale). On utilisera aussi souvent en physique les couples x, k (espace-nombre d'onde).

Théorème 1. *La séquence de fonction*

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\omega t, \cos\omega t, \sin 2\omega t, \cos 2\omega t, \sin 3\omega t, \ldots\} \tag{1.5}$$

définit un système orthonormal infini de l'espace E.

La preuve de ce théorème est laissée au lecteur (comme beaucoup d'autres le seront). Il suffit de vérifier que ces vecteurs sont tous orthogonaux 2 à 2 et normés pour le produit scalaire.

En se rappelant qu'une base est une famille de vecteurs libre et génératrice, pour montrer que la famille orthonormale du théorème 1 est une base de E, il faut montrer que cette famille est totale, *i.e.* que le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans E. Cela se démontre avec l'identité de Parseval généralisée (que nous verrons plus tard) mais nous ne le ferons pas. Ainsi, cet espace vectoriel normé est complet (ou espace de Banach), i.e. que toute suite de Cauchy dans E a une limite dans E.

Muni d'une base sur E, on peut décomposer toute fonction $f \in E$ comme une combinaison linéaire infinie de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n \rangle \; e_n \tag{1.6}$$

où les e_n constituent les vecteurs de la base du théorème 1.

Les produits $\langle f, e_n \rangle$ où les e_n sont donnés par le théorème 1 se calculent sans problèmes. On obtient alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n \rangle \; e_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t] \tag{1.7}$$

avec les définitions

$$a_n = \frac{1}{T} \int_a^b f(t) \cos n\omega t \; dt \;, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.8}$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_a^b f(t) \sin n\omega t \; dt \;, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.9}$$

Définition 4. *Pour toute fonction $f \in E$, la série (1.7), où les a_n et b_n sont définis par les eq. (1.8) et (1.9) est la série de Fourier de f, et est notée*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t] \;\; pp \tag{1.10}$$

Il faudra préciser les conditions de convergence (et le type de convergence) d'une série de Fourier. Il faut prendre des précautions, même pour des fonctions C_T^0. La série de Fourier peut converger vers une fonction autre que $f(t)$.

De plus, les coefficients a_n et b_n sont définis par une intégrale. Modifiant la valeur de f sur un nombre fini de points, les valeurs de a_n et b_n seront inchangées. Ainsi, 2 fonctions qui ne diffèrent qu'en un nombre fini de points auront la même série de Fourier.

Enfin, tout les vecteurs e_n de la base de E sont des fonctions T-périodiques. On peut généraliser E aux fonctions T-périodiques sur tout $\mathbb{R}$.

Définition 5. *A partir du produit scalaire, on peut définir une norme (dont on munit au passage l'espace E)*

$$\|f\|_2 = \left(\frac{2}{T} \int_a^b |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} \tag{1.11}$$

(vous reconnaissez la norme L_T^2au terme de normalisation près).

Bien que ce soit la norme que nous utiliserons le plus, on indique en indice la nature de cette norme. On pourrait aussi utiliser la norme proche de L_T^1 définie par

$$\|f\|_1 = \frac{2}{T} \int_a^b |f(t)| \, dt \tag{1.12}$$

Les définitions de ces normes [2] sont importantes car elles conditionnent le type de convergence pour les séries de fonctions : en moyenne pour la norme L^1, en moyenne quadratique pour la norme L^2

Ainsi, lorsque l'on dit que toute suite de Cauchy converge dans E, c'est au sens de L^2. Comme le fait de changer la valeur d'une fonction en un nombre fini de points ne change pas son intégrale, la convergence au sens de L^2 est moins forte que la convergence simple (ou ponctuelle). Vous comprenez d'ailleurs que l'on ne peut pas avoir convergence ponctuelle dans le cas général. Comme les fonctions de E peuvent admettre un nombre fini de discontinuités, la complétude de E n'est malheureusement pas suffisante pour pouvoir travailler sur la série de Fourier d'une fonction comme sur la fonction génératrice.

2. Vous pourrez vérifier les propriétés d'homogénéité, sous-linéarité et séparation qui en font bien des normes.

Soit $f(t) = t$ sur $[-\pi, +\pi]$. Sa série de Fourier est

$$t \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin n\omega t \tag{1.13}$$

Pour laquelle on trouve naturellement le terme constant a_0 nul, ainsi que tous les termes pairs en $\cos n\omega t$.

Théorème 2. *Soit $f \in E$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, le minimum de l'expression*

$$\frac{2}{T} \int_a^b \left| f(t) - \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) \right] \right|^2 dt \tag{1.14}$$

en balayant tout les A_n et B_n sur $\mathbb{C}$ est uniquement atteint pour $A_n = a_n$ et $B_n = b_n$, $n \leq m$, où les a_n et b_n sont les coefficients de la série de Fourier de f.

Dit autrement, cela signifie que les coefficients de la série de Fourier sont ceux pour lesquels la combinaison linéaire des vecteurs de base de E sont les plus proches de la fonction initiale, au sens de la norme L^2_T.

1.3 Parité

On se rappelle des propriétés suivantes :

- Le produit de deux fonctions paires est pair
- Le produit de deux fonctions impaires est pair
- Le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est impair
- Si f est une fonction impaire, $\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 0\ ,\quad a > 0$
- Si f est une fonction paire, $\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 2 \int_0^a f(t)\, dt\ ,\quad a > 0$

Proposition 1. *Soit $f \in E$. Si f est paire, sa série de Fourier est de la forme*

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t\ ,\quad a_n = \frac{2}{T} \int_a^b f(t) \cos n\omega t\, dt\ ,\quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.15}$$

Si f est impaire, sa série de Fourier est de la forme

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t\ ,\quad b_n = \frac{2}{T} \int_a^b f(t) \sin n\omega t\, dt\ ,\quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.16}$$

Par construction, il n'y a pas de composantes continues pour les fonctions impaires.
A titre d'exemple, soit $f(t) = t^2$ sur $[-\pi, \pi]$. Alors

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos n\omega t \;\; pp \tag{1.17}$$

1.4 Séries complexes

On peut aussi définir les séries complexes. On introduit pour cela la nouvelle base des e_n

$$\{e^{\imath n\omega t}, n = 0, 1, 2, \ldots\} \tag{1.18}$$

où $e^{\imath t} = \cos t + \imath \sin t$. Cet ensemble constitue bien une base des fonctions $f \in E$ (désormais à valeur dans $\mathbb{C}$) à condition de modifier le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt \tag{1.19}$$

Le développement en série de Fourier s'écrit alors

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\imath n\omega t}\ ,\ \ c_n = \frac{1}{T}\int_a^b f(t)e^{-\imath n\omega t}\, dt\ ,\ \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.20}$$

1.5 Convergences des séries de Fourier

Il reste à démontrer que la série de Fourier de toute fonction $f \in E$ converge vers f. Cela est intimement lié au fait que la base orthonormée que nous avons définie (réelle ou complexe, elles sont équivalentes) est complète. Il existe un théorème qui énonce qu'un espace vectoriel normé de dimension finie est toujours complet. Mais ce n'est pas notre cas. On peut néanmoins montrer que les vecteurs e_n , qu'ils soient définis par la famille (1.5) ou par la famille (1.18), forment une base hilbertienne de L^2_T. On peut montrer que la famille des e_n est totale car $\mathrm{Vect}(e_n)$ est dense dans L^2_T, d'ou le théorème,

Théorème 3. *Les fonctions e_n forment une base hilbertienne de L^2_T.*

On en déduit le théorème,

Théorème 4. *Pour toute fonction $f \in L^2_T$ dont on définit les coefficients a_n par la relations (1.8) et b_n par la relations (1.9), on a*

$$\lim_{n\to\infty}\left\| f(t) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]\right)\right\|_2 = 0 \tag{1.21}$$

i.e.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left| f(t) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]\right)\right|^2 dt = 0 \tag{1.22}$$

Un équivalent de ce théorème peut s'énoncer

Théorème 5. *Toute fonction $f \in L^2_T$ peut se décomposer de façon unique sous la forme*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\imath n\omega t} \;\; pp \tag{1.23}$$

la série convergeant en moyenne quadratique sur T. Les composantes c_n sont données par

$$c_n = \frac{1}{T}\int_a^b f(t)e^{-\imath n\omega t}\, dt\ , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.24}$$

Il est important de se rappeler qu'une fonction de E est bornée sur un intervalle borné ; elle est donc dans L^2.

Définition 6. *On définit l'espace E' comme celui des fonctions dans E dont la dérivée première est aussi dans E.*

E' est donc l'espace des fonctions ayant une valeur finie des dérivées gauches et droites en chacun des points de l'intervalle T.

Théorème 6. *(Théorème de Dirichlet) Soit $f \in E'$. Alors, $\forall t \in]a, b[$, la série de Fourier converge ponctuellement vers*

$$\frac{f(t^-) + f(t^+)}{2} \tag{1.25}$$

Ainsi, là où la fonction est continue, sa série de Fourier converge ponctuellement vers f. Aux points de discontinuité, sa série de Fourier converge vers la demi-somme de ses limites gauche et droite.

Le théorème de Bessel-Parseval (que nous verrons plus tard) permet de caractériser complètement les fonctions L^2_T par leur série de Fourier. Il ne fournit toutefois que la convergence en moyenne quadratique, et ne dit rien sur la convergence ponctuelle [3].

En général, lorsque l'on s'intéresse à des fonctions qui peuvent être discontinues, il est intéressant de ne pas s'intéresser qu'à la condition de convergence en moyenne, mais aussi à la convergence uniforme. On rappelle pour cela leurs définitions respectives.

Définition 7. *Soit $\{f_n\}, n \in \mathbb{N}$ une séquence de fonctions définies sur un intervalle $[a, b]$ et soit f une fonction définie sur $[a, b]$. On dit que f_n converge en moyenne vers f sur $[a, b]$ si $\forall t \in [a, b]$ et $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel $N(t, \varepsilon)$ tel que*

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \tag{1.26}$$

$\forall n \geq N(t, \varepsilon)$.

3. Le théorème de Carlson assure que la somme partielle symétrique $\sum_{-N}^{N} c_n e^{\imath n\omega t}$ de la série de Fourier d'une fonction $f \in L^2_T$ converge presque partout vers f.

Définition 8. *Soit* $\{f_n\}, n \in \mathbb{N}$ *une séquence de fonctions définies sur un intervalle* $[a, b]$ *et soit* f *une fonction définie sur* $[a, b]$*. On dit que* f_n *converge uniformément vers* f *sur* $[a, b]$ *si* $\forall \varepsilon > 0$*, il existe un entier naturel* $N(\varepsilon)$ *tel que*

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \tag{1.27}$$

$\forall n \geq N(\varepsilon)$ *et* $\forall t \in [a, b]$.

Ces deux définitions semblent très similaires, mais la convergence uniforme est plus forte que la convergence en moyenne. Le problème est le suivant : si une série de fonctions est continue, dérivable ou intégrable, qu'en est-il de sa limite. Considérez par exemple $f_n(t) = n^{-1/2} \sin nt$. Sa limite est $f(t) = 0$, et donc $f_n'(t)$ ne converge pas vers f'. Il faut donc plus que la convergence en moyenne si l'on veut conserver les propriétés de continuité, dérivabilité ou intégrabilité entre une fonction et sa série de Fourier.

Théorème 7. *Si* $f \in C_T^0$*,* $f(a) = f(b)$ *(où l'on se rappelle que* a *et* b *sont les bornes inf et sup de l'intervalle* T*) et* $f' \in E$*, alors, la série de Fourier de* f *converge uniformément vers* f *sur* T*.*

On aura donc convergence uniforme pour les fonctions continues dont la dérivée est aussi continue, sauf en un nombre fini de points.

Ainsi, une fonction $f \in E$ est développable en série de Fourier. Si $f \in C^0$ et $f' \in E$, sa série de Fourier converge uniformément vers f. La convergence uniforme est nécessaire pour travailler sur les dérivées et les primitives. En l'occurence, la question est "la dérivée—primitive de la série de Fourier converge-t-elle vers la dérivée—primitive de la fonction". Attention de ne pas confondre primitive et intégrale : la convergence au sens L_T^2 de la série de fourier vers la fonction génératrice implique l'égalité des intégrales. Mais il n'en est pas forcement de même pour une primitive définie par $F(t) = \int_a^b f(\tau)\, d\tau$. Cette question sera traitée à la fin de ce chapitre.

1.6 Identité de Parseval

Propriété 2. *(Identité de Parseval)* $\forall f \in E \cap L_T^2$ *on a l'égalité*

$$\frac{2}{T} \int_a^b |f(t)|^2 \, dt = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \tag{1.28}$$

Cette identité découle directement de la propriété de fermeture de E : la base orthonormale de l'espace de Fourier (qu'elle soit définie dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$) est complète (ce que nous n'avons pas démontré). On en déduit la proposition suivante.

Proposition 2. *$\forall f \in C_T^0$ telle que $f' \in E$ et $f(a) = f(b)$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = 0 \tag{1.29}$$

Proposition 3. *Soit $f \in E$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction $g \in C_T^0$ telle que $g(a) = g(b)$, $g' \in E$ et $\|f - g\|_2 < \varepsilon$.*

Cette proposition permet d'approcher toute fonction de E (donc éventuellement discontinue en un nombre fini de points) par une fonction continue, dont la dérivée est continue par morceau. Une telle fonction étant développable en série de Fourier, cela permet de calculer la série de Fourier de f. Les fonctions f et g sont alors égales presque partout.

Lemme 1. *(Lemme de Riemann-Lebesgue) Soit $f \in E$ et a_n et b_n les coefficients de la série de Fourier réelle de f. Alors, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.*

Ce résultat peut se démontrer sans trop de problèmes. Il signifie simplement que la contribution des vecteurs de base est d'autant plus faible que ces vecteurs sont d'ordre élevé. On comprend que ce soit une condition nécessaire pour que la série de Fourier soit de Cauchy.

Propriété 3. *(Identité de Parseval généralisée) $\forall f \in E$ et $\forall g \in E$*

$$\frac{2}{T}\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt = \frac{a_0 c_0^\star}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n^\star + b_n d_n^\star) \tag{1.30}$$

avec

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nt + b_n \sin nt] \;\; pp \tag{1.31}$$

et

$$g(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \cos nt + d_n \sin nt] \;\; pp \tag{1.32}$$

Proposition 4. *Pour $f \in E$ et $g \in E$, si les séries de Fourier de f et g égales presque partout, alors, $f = g$ presque partout.*

La meilleure des situations est celle pour laquelle la série de Fourier converge uniformément vers la fonction. Mais comme on l'a vu, cela nécessite que la fonction soit de classe C^0.

1.7 Le phénomène de Gibbs

Lorsque la fonction à étudier admet au moins une discontinuité, on observe alors le "phénomène de Gibbs". Reprenons comme exemple $f(t) = t$ pour $-\pi < t < \pi$, et $f(-\pi) = f(\pi) = 0$. Supposons que f est 2π périodique et définie sur tout $\mathbb{R}$. Sa série de Fourier est

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nt \tag{1.33}$$

Hors des points π modulo 2π, la série de Fourier converge uniformément vers f. On définit la suite de fonction

$$f_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nt \tag{1.34}$$

En définissant le point $x_m = \pi - \dfrac{\pi}{m}$ et en réarrangeant les termes

$$f_m(x_m) = 2 \sum_{n=1}^{m} \frac{\sin \dfrac{n\pi}{m}}{\dfrac{n\pi}{m}} \frac{\pi}{m} \tag{1.35}$$

i.e. la somme de Riemann de l'intégrale

$$2 \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt \tag{1.36}$$

On a donc $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x_m) = 2 \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt \sim 1.18\pi$ dont on déduit la limite

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f_m(x_m) - f(x_m)}{f(\pi^-) - f(\pi^+)} \sim \frac{1.18\pi - \pi}{2\pi} = 0.09\pi \tag{1.37}$$

On en conclut (même s'il ne s'agit que d'un exemple) que pour des fonctions présentant une discontinuité, il n'est pas possible d'approximer une fonction par sa série de Fourier, cela indépendamment du nombre de termes que l'on prend dans le développement.

Ce résultat n'est pas incohérent avec le fait que pour une fonction E, la série de Fourier converge en moyenne quadratique vers la fonction qui lui est associée. On n'a pas convergence ponctuelle aux points de discontinuité, mais sur un ensemble de mesure nulle. Cela n'a donc pas de conséquence sur l'intégrale..

1.8 Dérivée et primitive des séries de Fourier

Théorème 8. *Soit f une fonction C^0_T telle que $f(a) = f(b)$ et $f' \in E$. Si*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nt + b_n \sin nt] \;\; pp \tag{1.38}$$

est la série de Fourier de f, alors la série de Fourier de f' est

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-na_n \sin nt + nb_n \cos nt] \;\; pp \tag{1.39}$$

La dérivée de la série de Fourier tend vers la dérivée de la fonction pour toute fonction continue admettant une valeur finie de ses dérivées gauche et droite en tout point. Cela découle de ce que pour les fonctions continues, leur série de Fourier converge uniformément vers la fonction.

Théorème 9. *Soit $f \in E$ dont la série de Fourier est*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nt + b_n \sin nt] \;\; pp \tag{1.40}$$

Alors, pour tout $t \in [a, b]$,

$$\int_a^t f(\tau) d\tau = \frac{a_0(t-a)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n} \sin nt - \frac{b_n}{n} (\cos nt - \cos n\pi) \right] \tag{1.41}$$

et la série dans le membre de droite converge uniformément vers la fonction du membre de gauche.

La primitive de la série de Fourier converge uniformément vers la primitive de la fonction (qui par construction ne peut pas être discontinue).

1.9 Exercices

Exercice 1. *Peut-on calculer la série de Fourier de $f(t) = |t|$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$? si oui, donner l'expression de ses termes a_n et b_n.*

Exercice 2. *Peut-on calculer la série de Fourier de $f(t) = t^2$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$? si oui, donner l'expression de ses termes a_n et b_n.*

Exercice 3. *Calculer l'expression des termes de la série de Fourier complexe de $f(t) = t$. Vous pourrez pour cela utiliser une intégration par partie.*

Exercice 4. *Calculer l'expression des termes de la série de Fourier complexe de $f(t) = e^t$.*

Exercice 5. *Calculer les dérivées et les primitives de $f(t) = t$, $g(t) = t^2$ et $h(t) = e^t$. Quelles sont leurs séries de Fourier.*

— 2 —

Transformées de Fourier

2.1 Définition

Définition 9. *Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Alors, on définit formellement la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par*

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\imath\omega t}\, dt \tag{2.1}$$

Cette définition est formelle dans le sens où l'intégrale du membre de droite n'existe pas forcément. Si elle existe, alors la fonction F (ou $\mathcal{F}[f]$) est appelée transformée de Fourier de f. Vous noterez les ressemblances entre transformée de Fourier et série de Fourier, à une nuance (de taille) : les séries de Fourier sont définies pour des fonctions à support borné, ou périodique sur tout $\mathbb{R}$, alors que la transformée de Fourier est définie pour toute fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Définition 10. *On appelle G l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{C}$, qui sont dans E (continues par morceaux) et de classe $L^1_{\mathbb{R}}$ (absolument intégrale i.e. qui converge en moyenne) ce qui se traduit par*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty \tag{2.2}$$

Une fonction est continue par morceau sur $\mathbb{R}$ si elle est continue par morceau sur tout sous-intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. f peut alors avoir un nombre infini de discontinuités sur $\mathbb{R}$ en ayant un nombre fini de discontinuités sur tout sous-intervalle (ce qui n'est pas une contradiction).

Théorème 10. $\forall f \in G$

— *$F(\omega)$ est définie $\forall\omega \in \mathbb{R}$*
— *$F \in C^0_{\mathbb{R}}$, i.e. est continue sur $\mathbb{R}$*
— $\lim\limits_{\omega\to\pm\infty} F(\omega) = 0$

Le premier point du théorème 10 est trivial et découle directement de ce que f est de classe $L^1_{\mathbb{R}}$. Les deux autres points sont un peu plus longs à prouver.

Une remarque importante s'impose ; la transformée de Fourier est définie pour $\omega \in \mathbb{R}$. En fait, rien n'empêche de généraliser cette définition au plan complexe. Il faut alors prolonger analytiquement $f(t)$ sur tout $\mathbb{C}$ par une fonction $f(z)$ égale à $f(t)$ sur l'axe réel. Ce prolongement est unique. Il implique alors d'intégrer dans le plan complexe.

En physique des plasmas, c'est assez souvent utilisé. Lorsque l'on s'interesse à un mode propre, on cherche souvent à caractériser sa relation de dispersion $\omega(k)$. Si le mode est instable ou amorti, alors, dans sa forme en $e^{\imath\omega t - kr}$ il faut ω ou k complexe. On choisit bien souvent d'écrire $\omega = \omega_r + \imath\gamma$, ce qui implique une définition complexe de la transformée de Fourier.

2.2 Exemples

La transformée de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$ est

$$F(\omega) = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} \tag{2.3}$$

La transformée de Fourier de $f(t) = \begin{cases} 1 & -b \leq t \leq b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ est

$$F(\omega) = \frac{b}{\pi}\mathrm{sinc}(b\omega) \tag{2.4}$$

La transformée de Fourier de $f(t) = e^{-t^2}$ est

$$F(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\omega^2/4} \tag{2.5}$$

Le résultat donné ici vous fournit la solution de ces calculs proposés dans la section Exercice.

2.3 Propriétés

Ce qui suit a la forme d'un catalogue de propriétés. Elles se démontrent assez facilement pour la plupart.

Propriété 4. *(linéarité)* $\forall (f,g) \in G^2$, *et* $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$

$$\mathcal{F}[af + bg](\omega) = a\mathcal{F}[f](\omega) + b\mathcal{F}[g](\omega) \tag{2.6}$$

Cette propriété se démontre facilement, et découle de la définition linéaire de la transformée de Fourier.

Propriété 5. *(Parité) Soit* $f \in G$ *et* $f(t) \in \mathbb{R}\ \forall t \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$\mathcal{F}[f](-\omega) = \overline{\mathcal{F}[f](\omega)} \tag{2.7}$$

Cette propriété implique que pour une fonction réelle, la partie réelle de sa transformée de Fourier est paire et la partie imaginaire est impaire. On utilise très souvent la transformée de Fourier pour des fonctions réelles, mais il faut bien se rappeler qu'elle peut aussi l'être pour des fonctions à valeur dans $\mathbb{C}$.

Propriété 6. *(Homotétie) Soit $g(t) = f(at)$ avec $a \neq 0$. Alors*

$$\mathcal{F}[g](\omega) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{2.8}$$

Cette propriété implique qu'une contraction dans l'espace des t implique une dilatation dans l'espace des ω.

Propriété 7. *(Translation) Soit $g(t) = f(t+b)$ avec $b \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\mathcal{F}[g](\omega) = e^{\imath\omega b}\mathcal{F}[f](\omega) \tag{2.9}$$

Cette propriété implique qu'une translation dans l'espace des t implique une rotation dans l'espace des ω.

Propriété 8. *(Translation, la réciproque) Soit $f \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\mathcal{F}[e^{\imath ct}f](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega - c) \tag{2.10}$$

Propriété 9. *(Modulation) Soit $f \in G$ et $c \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t)\cos ct](\omega) &= \frac{\mathcal{F}[f](\omega-c) + \mathcal{F}[f](\omega+c)}{2} \\ \mathcal{F}[f(t)\sin ct](\omega) &= \frac{\mathcal{F}[f](\omega-c) - \mathcal{F}[f](\omega+c)}{2\imath}\end{aligned}$$

Propriété 10. *(Dérivation) Soit $f \in C^0_{\mathbb{R}}$, $f, f' \in G$. Alors*

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = \imath\omega\mathcal{F}[f](\omega) \tag{2.11}$$

Cette propriété signifie qu'une dérivation dans l'espace des t implique un produit dans l'espace des ω. C'est une propriété essentielle, car elle permet de transformer une équation différentielle en une équation algébrique, ces dernières étant bien souvent plus simples à résoudre que les premières.

Propriété 11. *(Dérivation, généralisation) Soit $f, f', \ldots, f^{(n-1)} \in C^0_{\mathbb{R}}$, $f, f', \ldots f^{(n)} \in G$. Alors*

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\omega) = (\imath\omega)^{(n)}\mathcal{F}[f](\omega) \tag{2.12}$$

Propriété 12. *(Dérivation, la réciproque) Soit $f \in G$ telle que $\int_{-\infty}^{\infty} |t^n f(t)|\, dt$ converge. Alors*

$$\mathcal{F}[t^n f(t)](\omega) = \imath^n \frac{d^n}{d\omega^n}\mathcal{F}[f](\omega) \tag{2.13}$$

2.4 Transformée de Fourier inverse

Nous avons vu sous quelles conditions la transformée de Fourier d'une fonction existe et comment la calculer. Il est légitime de se demander s'il est possible de remonter à une fonction connaissant sa transformée de Fourier, ce qui implique de se demander si celle-ci existe et si elle est unique. Cette opération s'appelle la transformée de Fourier inverse et est définie par l'opération

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega)e^{\imath\omega t}d\omega \tag{2.14}$$

La définition d'une transformée de Fourier et de sa transformée inverse n'est pas universelle. Le facteur de normalisation peut différer selon les convention. Il faut simplement s'assurer que le produit de ces facteurs pour les transformées directes et inverses soit égal à $1/2\pi$.

De même, Nous pouvons choisir le signe que l'on veut dans l'exponentielle de la transformée directe, pourvu que l'on prenne le signe opposé pour la transformée inverse.

Théorème 11. *si $f \in G$ alors, en tout point $t \in \mathbb{R}$ où les dérivées gauches et droites de f existent*

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \mathcal{F}[f](\omega)e^{\imath\omega t}\, dt = \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2} \tag{2.15}$$

Nous reconnaissons dans le théorème 11 la définition de la valeur principale. Ainsi, si $f \in G$, $f \in C^0_{\mathbb{R}}$ et f' est continue par morceaux, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\imath\omega t}\, dt \\ f(t) &= vp \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega)e^{\imath\omega t}\, d\omega \end{aligned}$$

Si $F(\omega)$ existe, ce n'est pas forcément un fonction sommable (même si elle est bornée, son support est infini). Il n'est donc pas évident que la transformée de Fourier inverse de la transformée de Fourier d'une fonction de classe $L^1_{\mathbb{R}}$ continue par morceaux soit définie.

Il faut en fait que la fonction f soit de classe $L^2_{\mathbb{R}}$ pour que la formule de transformée de Fourier inverse ait un sens. Nous en déduisons l'identité de Plancherel, ainsi que sa forme généralisée.

Propriété 13. *(Identité de Plancherel) Soit $f \in G$ et $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt < \infty$. Alors*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f](\omega)|^2 d\omega < \infty \tag{2.16}$$

et de plus,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f](\omega)|^2 d\omega \tag{2.17}$$

Appliquée au traitement du signal, cette formule ressemble à une formule de conservation de l'énergie : une des intégrales représente l'énergie dans l'espace du temps et l'autre dans l'espace des fréquences.

Propriété 14. *(Identité de Plancherel généralisée) Soit $f, g \in G \cap L^2_{\mathbb{R}}$. Alors*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega)\overline{\mathcal{F}[g](\omega)} d\omega \tag{2.18}$$

En physique des plasmas, beaucoup des transformées de Fourier et intégrales associées que l'on a à calculer font intervenir la fonction de distribution du plasma. Ces fonctions sont mathématiquement très agréables, dans la mesure où elles sont tempérées, i.e. tout moment associé existe :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{\alpha} f(t)\, dt < \infty \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N} \tag{2.19}$$

On appelle souvent cet espace vectoriel $S_{\mathbb{R}}$. Il faut néanmoins noter qu'il n'est pas inclu dans $L^2_{\mathbb{R}}$, cette condition restant donc à vérifier.

2.5 Produit de convolution

Le produit de convolution est une fonctionnelle agissant sur deux fonctions. Ce produit est important en traitement du signal et plus généralement lorsque l'on utilise les transformées de Fouriers.

Définition 11. *Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. $\forall t \in \mathbb{R}$, on définit le produit de convolution de f et g noté $(f \star g)(t)$*

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau \tag{2.20}$$

Propriété 15. *Le produit de convolution est commutatif : $f \star g = g \star f$*

Proposition 5. *Soit $f, g \in G$. Alors le produit de convolution $f \star g$ existe et est absolument intégrable.*

La preuve de cette proposition est simple. Le produit $f \star g$ étant alors intégrable, on peut en calculer la transformée de Fourier. Nous en déduisons le théorème suivant.

Théorème 12. *(Théorème de convolution) $\forall f, g \in G$, on a*

$$\mathcal{F}[f \star g](\omega) = 2\pi \mathcal{F}[f](\omega).\mathcal{F}[g](\omega) \tag{2.21}$$

En d'autres termes, la transformée de Fourier (ainsi que la transformée inverse) transforme le produit de convolution en un produit simple (au terme de normalisation près).

2.6 Exercices

Exercice 6. *Soit $f(t) = e^{-|t|}$. Montrer que cette fonction est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. Calculer alors sa transformée de Fourier.*

Exercice 7. *Soit $f(t) = e^{-t^2}$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que cette fonction est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. Calculer alors sa transformée de Fourier.*

Exercice 8. *En utilisant la transformée de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$, montrer que*

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+\omega^2)^2} d\omega = \frac{\pi}{4} \tag{2.22}$$

Exercice 9. *Calculer la transformée de Fourier de*

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases} \tag{2.23}$$

— 3 —

Transformées de Laplace

3.1 Définition et exemples

Définition 12. *Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ continue par morceaux. Alors, $\forall s \in \mathbb{R}$*

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{3.1}$$

Si cette intégrale existe (converge), alors $\mathcal{L}[f](s)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$.

Il est à noter (et nous le détaillerons) que $\mathcal{L}[f](s)$ peut exister pour certaines valeurs de s et pas d'autres. De plus, la transformée de Laplace est définie pour le moment pour $s \in \mathbb{R}$. On voit bien souvent une définition de la transformée de Laplace sur le plan complexe. Il s'agit d'une restriction à l'axe réel qui permet de simplifier l'étude, et nous la généraliserons dans la partie sur la transformée de Laplace inverse à tout le plan complexe.

Il peut être commode de prolonger f sur tout $\mathbb{R}$ par la fonction $f(t) = 0$ pour $t < 0$. On a alors la relation entre transformée de Fourier et transformée de Laplace

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\imath(-\imath s)t} f(t)dt = 2\pi\mathcal{F}[f](-\imath s) \tag{3.2}$$

qui nécessite alors de généraliser ω à tout le plan complexe. On montre facilement que la transformée de Laplace de $f(t) = 1$ pour $t \geq 0$ est

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s}, \quad s > 0 \tag{3.3}$$

Mais pour $s \leq 0$, l'intégrale ne converge pas. Il est donc important de spécifier le domaine de définition de $\mathcal{L}[f]$.

De même, la transformée de Laplace de $f(t) = e^{at}$ pour $t \geq 0$ est

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \frac{1}{s-a}, \quad s > a \tag{3.4}$$

et la transformée de Laplace de $f(t) = \sin(at)$ ($a \in \mathbb{R}$) est

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty \sin(at)e^{-st}dt = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0 \tag{3.5}$$

Proposition 6. *Soit f une fonction continue par morceaux à valeur complexe définie sur $\mathbb{R}^+$. S'il existe 2 constantes réelles a et K telles que*

$$|f(t)| \leq K e^{at}, \quad t \geq 0 \tag{3.6}$$

alors, $\mathcal{L}[f](s)$ est définie pour tout $s > a$.

Cette proposition, importante, permet de trouver facilement un critère qui permet de préciser les valeurs de s pour lesquelles la transformée de Laplace est définie. Si la transformée de Laplace est définie pour $\sigma = s + \imath v$, *i.e.* sur tout le plan complexe, cette condition n'est contraignante que pour s, la partie réelle de σ.

3.2 Propriétés

Propriété 16. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ dont la dérivée f' est aussi continue par morceaux. S'il existe a et K tels que $|f(t)| \leq K e^{at}, \;\; t \geq 0$, alors la transformée de Laplace de f' est définie pour tout $s > a$ et*

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0) \tag{3.7}$$

Cela en fait ainsi une méthode adaptée à la résolution des problèmes différentiels aux conditions initiales. Par ailleurs, de par la définition d'une transformée de Laplace, le point $t = 0$ (et donc $f(0)$) est important. Ce terme va jouer un rôle notamment dans les problèmes physiques pour lesquels on souhaite considérer la causalité.

Propriété 17. *Soit $f, f', f'' \ldots$ les fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ et $f^{(n)}$ continue par morceaux. S'il existe a et K tels que $|f^{(j)}(t)| \leq K e^{at}, \;\; t \geq 0, \;\; j = 0, 1, \ldots n-1$, alors la transformée de Laplace de $f^{(n)}$ est définie pour tout $s > a$ et*

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \tag{3.8}$$

Il est clair que par transformée de Laplace, toutes les conditions portant sur f et ses dérivées successives, doivent être données à $t = 0$. Cela fait de la transformée de Laplace un outil priviligié pour l'étude des problèmes aux conditions initiales (et non aux limites).

Propriété 18. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$. S'il existe a et K tels que $|f(t)| \leq K e^{at}, \;\; t \geq 0$, alors pour tout $s > a$*

$$\mathcal{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}[f](s) \tag{3.9}$$

Propriété 19. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$. S'il existe a et K tels que $|f(t)| \leq Ke^{at}$, $t \geq 0$, alors pour tout $s > a$*

$$\mathcal{L}[e^{bt}f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s-b), \quad b \in \mathbb{R} \tag{3.10}$$

Propriété 20. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$. S'il existe a et K tels que $|f(t)| \leq Ke^{at}$, $t \geq 0$, alors pour tout $s > a$*

$$\mathcal{L}[f(bt)](s) = \frac{1}{b}\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{b}\right), \quad b > 0 \tag{3.11}$$

3.3 Application aux équations différentielles ordinaires

Les transformées de Laplace permettent de résoudre de manière générale les équations différentielles homogènes linéaires à coefficients constants. Pour illustrer cette méthode, on considère l'exemple

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 0, \quad t > 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \end{cases} \tag{3.12}$$

En calculant la transformée de Laplace de la première équation, on obtient

$$0 = \mathcal{L}[0] = \mathcal{L}[y'' - y' - 6y] \tag{3.13}$$

Par linéarité de la transformée de Laplace,

$$\mathcal{L}[y'' - y' - 6y] = \mathcal{L}[y''] - \mathcal{L}[y'] - 6\mathcal{L}[y] \tag{3.14}$$

Or $\mathcal{L}[y'] = s\mathcal{L}[y] - y(0)$ et $\mathcal{L}[y''] = s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0)$. Alors

$$(s^2 - s - 6)\mathcal{L}[y] - s + 2 = 0 \tag{3.15}$$

dont on déduit

$$\mathcal{L}[y] = \frac{s-2}{(s-3)(s+2)} \tag{3.16}$$

soit

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{1/5}{s-3} + \frac{4/5}{s+2} \tag{3.17}$$

A l'aide des propriétés précédentes [1], on identifie

$$y(t) = \frac{1}{5}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t} \tag{3.18}$$

1. On introduira plus tard la transformée de Laplace inverse qui nécessite le calcul d'une intégrale dans le plan complexe

On peut multiplier les exemples de cette méthode. Mais elle présente des restrictions comme le fait que toutes les conditions sur les valeurs de la fonction ou de ses dérivées successives ne peuvent être qu'en $t = 0$.

De plus, comme pour la transformée de Fourier, la transformée de Laplace ne peut être utilisée que pour des équations differentielles ordinaires (ou équations aux dérivées partielles) linéaires. En l'occurence, dans les équations plasmas fluides, ce n'est pas le cas, avec un terme en $\mathbf{V}.\boldsymbol{\nabla}\mathbf{V}$. Mais on peut par exemple s'en servir avec des méthodes du type pseudo-spectrale.

3.4 "Fonctions" de Heaviside et de Dirac

Le mot "fonction" est entre guillemets car il est impropre en mathématiques, mais souvent utilisé. De manière rigoureuse, ces êtres mathématiques sont souvent introduits avec les distributions et prennent tout leur sens avec l'utilisation d'un produit de convolution, ou plus généralement avec une transformée intégrale comme celles de Fourier ou de Laplace.

Fonction Heaviside. Pour $c \in \mathbb{R}$, on définit

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < c, \\ 1, & c \leq t. \end{cases} \tag{3.19}$$

$u_c(t)$ est la fonction Heaviside. Sa transformée de Laplace se calcule facilement

$$\mathcal{L}[u_c](s) = \int_0^\infty e^{-st} u_c(t) dt = \int_c^\infty e^{-st} dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_c^\infty = \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0 \tag{3.20}$$

Sans préciser la valeur de c, "la" fonction de Heaviside est celle pour laquelle $c = 0$. La fonction de Heaviside est importante car elle intervient dans un théorème qui permet de trouver la solution d'équations aux dérivées ordinaires admettant des discontinuités.

Théorème 13. *Soit f une fonction dont la transformée de Laplace $\mathcal{L}[f](s)$ existe pour $s > a$. Soit $c > 0$. Alors,*

$$\mathcal{L}[u_c(t) f(t-c)](s) = e^{-cs} \mathcal{L}[f](s) \tag{3.21}$$

Pour illustrer ce théorème, on peut calculer la transformée de Laplace de

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2, \\ t^2, & 2 \leq t. \end{cases} \tag{3.22}$$

Alors,

$$\mathcal{L}[g](s) = \int_2^\infty e^{-st} t^2 dt \tag{3.23}$$

On peut calculer cette intégrale avec 2 intégrations par partie. On peut aussi utiliser le théorème 13. Il faut alors identifier une fonction f telle que

$$g(t) = u_2(t)f(t-2) \tag{3.24}$$

soit, pour $t \geq 2$,

$$t^2 = g(t) = f(t-2) \tag{3.25}$$

i.e. $f(t) = (t+2)^2$. Le théorème 13 permet ainsi d'écrire

$$\mathcal{L}[g](s) = \mathcal{L}[u_2(t)f(t-2)](s) = e^{-2s}\mathcal{L}[f](s) = e^{-2s}\mathcal{L}[t^2+4t+4] = e^{-2s}\left[\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}+\frac{4}{s}\right] \tag{3.26}$$

pour $s > 0$. Il est clair que l'intérêt de ce théorème tient au fait qu'il existe pour la fonction g une discontinuité en $t = 2$. Il sera aussi très utile pour les équations aux dérivées ordinaires inhomogènes dont le membre de droite présente une (ou plusieurs) discontinuité(s). Cette méthode ne permet néanmoins pas de traiter toutes les discontinuités.

Fonction de Dirac. On l'appelle aussi "impulsion". Pour $c \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $\delta_c(t)$ par

$$\int_I f(t)\delta_c(t)\,dt = f(c) \tag{3.27}$$

pour toute fonction continue dans le voisinage de c et sur tout intervalle I contenant un voisinage de c. On vérifie facilement que

$$\int_{-\infty}^{t} \delta_c(s)\,ds = \left\{\begin{array}{ll} 0, & t < c, \\ 1, & t > c, \end{array}\right\} = u_c(t) \tag{3.28}$$

ce qui peut se réécrire de manière un peu brutale comme : $u_c'(t) = \delta_c(t)$. La transformée de Laplace se déduit alors simplement

$$\mathcal{L}[\delta_c](s) = \int_0^\infty e^{-st}\delta_c(t)dt = e^{-cs} \tag{3.29}$$

Il est alors compliqué de définir la transformée de Laplace de δ_0.

3.5 Produit de convolution

Nous avons vu pour la transformée de Fourier la propriété

$$\mathcal{F}[f \star g](\omega) = 2\pi\mathcal{F}[f](\omega).\mathcal{F}[g](\omega) \tag{3.30}$$

Mais le définition du produit de convolution étant

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \tag{3.31}$$

il nous faut prolonger les fonctions f et g sur tout $\mathbb{R}$ pour trouver une propriété équivalente pour la transformée de Laplace. En posant simplement $f(t) = g(t) = 0$ pour $t < 0$, alors

$$(f \star g)(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \displaystyle\int_0^\infty f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau, & t \geq 0 \end{cases} \tag{3.32}$$

dont on déduit

$$(f \star g)(t) = \int_0^\infty f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau, \;\; t \geq 0 \tag{3.33}$$

Théorème 14. *S'il existe des constantes a, K_1 et K_2 telles que $|f(t)| \leq K_1 e^{at}$ et $|g(t)| \leq K_2 e^{at}$ pour $t \geq 0$, on a alors la majoration*

$$|(f \star g)(t)| \leq K_1 K_2 t e^{at}, \;\; t \geq 0 \tag{3.34}$$

Cette condition étant vérifiée,

$$\mathcal{L}[f \star g](s) = \mathcal{L}[f](s).\mathcal{L}[g](s)\ , \;\; s > a \tag{3.35}$$

Un corollaire aussi évident qu'utile est la réciproque :

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)](t) = (f \star g)(t) \tag{3.36}$$

qui permet de calculer une fonction à partir de sa transformée de Laplace.

3.6 Transformée de Laplace inverse

Pour définir formellement la transformée de Laplace inverse de $\mathcal{L}[f](s)$, il faut d'abord prolonger cette fonction pour obtenir $\mathcal{L}[f](\sigma)$ définie pour $\sigma \in \mathbb{C}$. Ce point a été évoqué précédemment. On peut définir la transformée de Laplace dans tout le plan complexe, les conditions d'existence de celle-ci n'etant pas modifiées puisqu'elles ne portent que sur la partie réelle de s. On pose $\sigma = s + \imath v$ pour $(s, v) \in \mathbb{R}^2$. Si f est une fonction complexe continue par morceaux sur $[0, \infty[$, alors on définit

$$F(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t) dt \tag{3.37}$$

pour les σ pour lesquels l'intégrale converge. Si $\sigma = s$, $F(\sigma) = \mathcal{L}[f](s)$.

Théorème 15. *Si $e^{-at}f(t)$ est continue par morceaux et absolument intégrable, sur $[0, \infty[$, alors $F(\sigma)$ est analytique sur le demi-plan complexe $\Re(\sigma) > a$.*

A titre d'exemple, si $f(t) = 1$, alors $\mathcal{L}[f](s) = 1/s$ pour $s > a$. Pour la définition complexe de la transformée de Laplace, $F(\sigma) = 1/\sigma$ pour tout $\sigma \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(\sigma) > 0$.

Théorème 16. *(Transformée de Laplace inverse) Soit $f(t)$ une fonction continue telle que $e^{-at}f(t)$ soit absolument intégrable sur $[0,\infty[$ et dont les dérivées gauches et droites existent en tous points t. Si l'on définit*

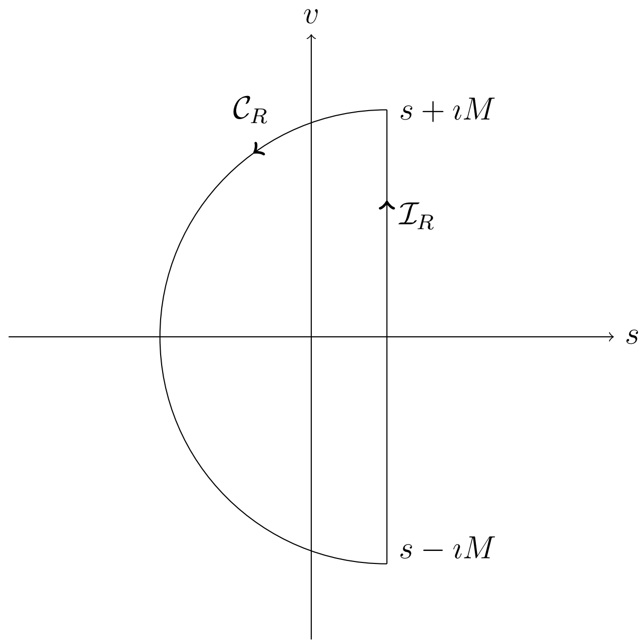
$$F(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t)dt, \quad \sigma \in \mathbb{C}, \quad \Re(\sigma) > a \tag{3.38}$$

alors

$$f(t) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2\imath\pi} \int_{s-\imath M}^{s+\imath M} e^{\sigma t} F(\sigma) d\sigma, \quad t > 0 \tag{3.39}$$

$\forall s = \Re(\sigma) > a.$

On comprend donc que pour obtenir f à partir de $\mathcal{L}[f]$, il faut d'abord étendre $\mathcal{L}[f](s)$ à $F(\sigma)$ i.e. prolonger analytiquement $F(s)$ par $F(\sigma)$, puis ensuite calculer l'intégrale de $e^{\sigma t}F(\sigma)/2\imath\pi$ le long d'un chemin approprié (pour que l'intégrale converge). Ce chemin est indiqué sur la Figure suivante.



On note γ_R le contour fermé formé par la reunion de $\mathcal{C}_R$ (le demi-cercle de centre s et de rayon M) et de $\mathcal{I}_R$ (la droite qui passe par $(s, 0)$ et parallèle à l'axe imaginaire). Compte-tenu de la fonction à intégrer ainsi que du contour d'intégration dans le plan complexe, une méthode privilégiée pour le calcul de cette intégrale est celle faisant intervenir le calcul des résidus. Pour cela, supposons que $F(\sigma)$ soit une fonction analytique dans tout le plan complexe, sauf en un nombre fini de points $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ tel que

$$\Re(\sigma_i) < a, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.40}$$

Soit $s > a$ et $R > 0$ des réels suffisamment grands pour que le contour γ_R contienne tous les points $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ (parmi les 2 demi-cercles possibles, c'est celui pour lequel $\Re(\sigma) \leq s$). Alors, à l'aide du théorème des résidus

$$\frac{1}{2\imath\pi} \oint_{\gamma_R} e^{\sigma t} F(\sigma) d\sigma = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}\{e^{\sigma t} F(\sigma); \sigma_j\} \tag{3.41}$$

Théorème 17. *Soit F une fonction analytique dans le plan complexe, sauf en un nombre fini de points. Soit $\mathcal{C}_R = \{\sigma \in \mathbb{C} \mid \ |\sigma - s| = R, \ \ \Re(\sigma) \leq s\}$. Si*

$$\lim_{R\to\infty} \max_{\sigma \in \mathcal{C}_R} |F(\sigma)| = 0 \tag{3.42}$$

alors

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\imath\pi} \int_{\mathcal{C}_R} e^{\sigma t} F(\sigma) d\sigma = 0 \tag{3.43}$$

pour tout $t > 0$.

Ainsi, si F est analytique sur $\mathbb{C}$ sauf en un nombre fini de points $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ tels que $\Re(\sigma_j) < s$ et si

$$\lim_{R\to\infty} \max_{\sigma \in \mathcal{C}_R} |F(\sigma)| = 0 \tag{3.44}$$

alors, la transformée de Laplace inverse de $F(s)$ est

$$f(t) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2\imath\pi} \int_{s-\imath M}^{s+\imath M} e^{\sigma t} F(\sigma) d\sigma = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}\{e^{\sigma t} F(\sigma); \sigma_j\} \tag{3.45}$$

3.7 Exercices

Exercice 10. *Quelle est la forme analytique de la fonction escalier en fonction de $u_c(t)$. Calculez sa transformée de Laplace.*

Exercice 11. *En utilisant le théorème 13, résoudre l'équation aux dérivées ordinaires*

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) = h(t), \quad t > 0 \\ y(0) = 0, \ \ y'(0) = 0, \end{cases} \tag{3.46}$$

où $h(t)$ est définie par

$$h(t) = \begin{cases} 1, \quad \pi \leq t < 2\pi \\ 0, \quad t \notin [\pi, 2\pi) \end{cases} \tag{3.47}$$

Exercice 12. *Déterminer la solution de l'équation aux dérivées ordinaires*

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = \delta_\pi(t), \quad t > 0 \\ y(0) = 0, \ \ y'(0) = 0, \end{cases} \tag{3.48}$$

Exercice 13. *Soit*

$$F(s) = \frac{a}{s^2(s^2 + a^2)} \tag{3.49}$$

pour $a > 0$*. Calculer* $\mathcal{L}^{-1}[f](t)$*.*

Bibliographie

[1] Benoist-Gueutal P, M. Courbage, Mathématiques pour la physique, Tome 2, *Editions Eyrolles*, 1992

[2] Bony J-M., Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, *Editions de l'école polytechnique*, 1999

[3] Krivine H., Exercices de mathématiques pour la physique, *Editions Cassini*, 2003

[4] Schwartz L., Méthodes mathématiques pour la physiques, *Hermann, Editeurs des sciences et des arts*, 1998

[5] Max J., Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques, *Masson*, 1981

[6] Pinkus A., Zafrany S., Fourier series and integral transforms, *Cambridge University Press*, 1997