

Etude de la physique des plasmas via la simulation numérique : une introduction

Philippe Savoini

I. La simulation numérique : un pont entre théorie et expérience	1
II. La simulation numérique : généralités	2
II.1 Différents types de simulations	2
II.2 Limitations intrinsèques de l'expérience numérique.....	3
III. La simulation numérique : utilisation d'un code particulière	4
III.1 Notion de macro-particule : aspect théorique	5
III.2 Notion de macro-particule : aspect numérique.....	6
IV. La simulation numérique : nature discrète des ordinateurs	7
IV.1 Discrétion spatiale : interpolation.....	8
IV.1.1 Pondération d'ordre ZERO: NGP.....	8
IV.1.2 Pondération d'ordre UN: PIC ou CIC.....	9
IV.1.4 Existence d'une grille spatiale discrète.....	10
IV.2 Discrétion temporelle : intégration.....	11
IV.2.1 Méthode d'Euler : la méthode la plus simple.....	11
IV.2.2 Méthode "saute-mouton": la méthode la plus répandue.....	11
IV.2.3 Effets dus à la discrétisation : résultats généraux	13
V Organisation générale : exemple d'un code électrostatique - ES1 -	14
V.1 Schéma de résolution de l'algorithme	14
V.2 Critères numériques généraux	15
V.2.1 Critères spatiaux	15
V.2.2 Critères temporels	16
V.3 Conditions aux limites	16
VI. Introduction des effets thermiques : problème d'initialisation	16
VI.1 Exemple d'une distribution uniforme : tirage aléatoire	17
VI.2 Exemple d'une distribution "Maxwellienne" : tirage uniforme.....	18
VI.3 Exemple d'une distribution "Maxwellienne" : le départ calme.....	20
VI.3.1 Répartition spatiale uniforme	20
VI.3.2 Répartition en vitesses uniformes	21
VII. Importance du numérique sur les phénomènes physiques	22
VII.1 Effet de la taille finie sur les équations physiques	22
VII.2 Effet de la grille discrète sur les équations physiques.....	24
VIII. Conclusion	25
Références :	26
Ouvrages de référence:	26
Publications spécialisées :.....	26
Projet n°1 : Domaines de validité d'une simulation particulière	27
I. Compréhension des résultats numériques.....	27
II. Effets de discrétisation temporelle.....	28
III. Effets de discrétisation spatiale	28
III.1 Effet d'aliasing	28
III.2 Effet de déferlement	28
Projet n° 2 : Etude d'un cas physique : l'interaction double faisceaux	28
I. Approche théorique	28
II. Approche numérique.....	30
II.1 Cas $K \leq \sqrt{2}$	30

II.2 Cas $K \geq \sqrt{2}$	30
II.3 Description physique	30
Projet n° 3 : Etude d'un cas physique : amortissement Landau	30
I. Aspect théorique	31
II. Aspect numérique	31
III. Equations de dispersion : avec et sans approximation.....	32
Projet n° 4 : Etude d'un cas physique : interaction faisceau-plasma	33
Annexe n°1 : Paramètres d'entrée du programme ES1	34
I. Paramètres globaux à la simulation.....	34
II. Paramètres liés à chaque espèce	34

I. La simulation numérique : un pont entre théorie et expérience

Un plasma est un système mécanique de particules en interaction. L'agent de ces interactions est l'ensemble des forces électromagnétiques. Un tel système dont le comportement est souvent non-linéaire reste très difficile à appréhender.

Traditionnellement, l'étude des phénomènes physiques complexes repose sur deux approches complémentaires: (i) l'approche théorique et (ii) l'approche expérimentale. Deux techniques très puissantes mais qui possèdent des limitations intrinsèques importantes.

(i) *L'approche expérimentale* consiste généralement à observer le comportement du milieu physique que l'on veut étudier après l'avoir perturbé de manière contrôlée. Une telle méthode nécessite *a-priori* certaines hypothèses telles que :

- les phénomènes complexes peuvent être décomposés en processus élémentaires
- l'observation d'un nombre limité (fini) de paramètres permet d'appréhender dans sa totalité un processus naturel
- l'existence d'une physique de la mesure décrivant le comportement de l'appareillage expérimental (sondes, satellites ...) en présence du phénomène à étudier.

Cette méthode s'avère difficile dans le cas de phénomènes physiques à très grande échelle (par exemples les plasmas spatiaux: vent solaire, ionosphère, magnétosphère ...) où les observations se contentent de mesurer la réponse du milieu à des perturbations non contrôlées et le plus souvent inconnues. De plus, les points de mesure obtenus sont ponctuels et ne permettent pas une représentation précise de l'ensemble de certains phénomènes (section efficace de mesure d'un satellite $\sim 10 \text{ m}^2$ à comparer à la surface de la magnétosphère $\sim 10^6 \text{ km}^2$)

(ii) *L'approche théorique* quant à elle repose généralement sur l'utilisation de techniques analytiques pour déterminer le comportement d'un système et ce, de manière cohérente avec les lois physiques établies. Cette approche fait appel à des hypothèses simplificatrices :

- nombre limité de paramètres (ou degrés de libertés)
- recherche de symétrie
- utilisation d'une théorie "simple" sous forme de développements linéaires et/ou de développements en série

De grandes avancées en physique sont venues de la combinaison de ces deux approches. Néanmoins, le succès de ces approches doit être tempéré du fait de l'existence de systèmes pour lesquels l'expérimentation est difficile, voire impossible, et qui sont constitués d'un très grand nombre de degrés de liberté dont le traitement analytique est impraticable. La plupart des phénomènes physiques naturels intéressants correspondent à cette catégorie.

Depuis quelques dizaines d'années, la simulation numérique apparaît comme une voie prometteuse d'étude des phénomènes physiques. Elle permet la reproduction des phénomènes observés, à partir de modèles théoriques ainsi que la préparation d'expériences. Cette méthode

repose sur le postulat que *les lois physiques utilisées décrivent la réalité et sont de plus formulables mathématiquement*. Ces caractéristiques peuvent être résumées en 5 points :

- modélisation du milieu ou de la théorie à valider
- utilisation de principes de base (équation de Maxwell, relation de la dynamique)
- contrôle absolu des paramètres du système
- prise en compte de tous les phénomènes, linéaires et non-linéaires
- infinité de diagnostics non perturbatifs, limités par l'imagination du simulateur et la

puissance de calcul de l'ordinateur

La simulation numérique est donc un outil d'analyse très puissant mais ne se justifie que comme un pont jeté entre la théorie et l'observation expérimentale.

II. La simulation numérique : généralités

L'outil numérique bien que très général sera présenté dans l'optique de l'étude des plasmas. Le champ d'action principal de la simulation des plasmas, l'échelle microscopique, est la génération et l'analyse des phénomènes non-linéaires : couplage d'onde, déferlements, ondes de choc, formation de solitons, mécanismes d'accélération de particules vers les très hautes énergies, etc ...

II.1 Différents types de simulations

Deux descriptions permettent essentiellement de décrire le comportement des plasmas :

Dans la *description fluide*, on s'intéresse à l'évolution de volumes de plasma, petit devant la taille du système mais contenant un nombre très élevé de particules. Les observables sont des grandeurs mécaniques et électrodynamiques macroscopiques (moyennées sur les petits volumes, densité, densité de charge, vitesse d'ensemble, pression, température, densité d'énergie cinétique, courant etc...) dont on suit l'évolution. Ce type de simulation permet de reproduire des phénomènes de grandes échelles. Cette approche possède des limitations intrinsèques telles que :

- (i) l'introduction de coefficients de transport (viscosité, résistivité, ...)
- (ii) l'obligation de suivre des fonctions Maxwelliennes à l'équilibre (aucune anisotropie spatiale et inhomogénéité ne peut être simulée)

Dans une *description cinétique*, on prend en compte directement les forces fondamentales agissant sur chaque particule (gravitation, force de Lorentz, etc ...). Cela est réalisé, soit en résolvant numériquement les équations de Vlasov ou de Fokker-Planck, soit par des simulations particulières qui calculent le mouvement d'un grand nombre de particules interagissant entre elles et avec les champs électromagnétiques. Cette description est utilisée notamment lors de l'étude des phénomènes produits lorsque la fonction de distribution s'écarte de la distribution Maxwellienne (interaction onde-particule, onde de choc, etc..)

L'utilisation de principes de base permet d'étudier tous les aspects (linéaires et non-linéaires) d'un problème en ayant aucune restriction quant aux phénomènes de faibles amplitudes. Cette

approche peut donc sembler la plus simple et la plus complète mais nous allons voir qu'elle se heurte elle-aussi à des problèmes de mise en oeuvre qui limitent son domaine de validité.

Il existe également des simulations dites "hybrides" qui prennent en compte les avantages des deux descriptions, fluides (phénomènes à grande échelle) et cinétiques (phénomènes microscopiques), en traitant comme un fluide certaines composantes du plasma alors que d'autres sont traitées de façon cinétique. Une telle approche nécessite toutefois l'introduction de paramètres phénoménologiques pouvant introduire des distorsions dans les résultats physiques obtenus.

II.2 Limitations intrinsèques de l'expérience numérique

La simulation n'a pu connaître un fort développement qu'en parallèle avec le développement des ordinateurs et des supercalculateurs. De telles machines possèdent une caractéristique essentielle pour comprendre les problèmes soulevés par l'outil numérique, ils sont en effet intrinsèquement de *nature discrète et finie* alors que la nature, du moins aux échelles classiques, est continue et infinie. Il est donc essentiel de formuler les équations physiques sous une forme discrète.

Les équations physiques sont dans leur forme générale des équations décrivant une évolution temporelle et spatiale d'un phénomène, elles s'expriment sous la forme d'équations différentielles du 1^{er} ou du 2^{ème} ordre dont la résolution nécessite l'utilisation d'algorithmes particuliers. Il existe deux grandes familles d'équations communes en physique :

(i) les équations hyperboliques de la forme $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$ avec $F = F(u)$

(ii) et les équations paraboliques $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$ (équation de diffusion)

Chaque famille nécessitera l'utilisation d'algorithmes de résolution différents qui devront tous vérifier les propriétés décrites ci-dessous.

Dans les cas physiques qui nous intéressent, les algorithmes reposent sur *l'idée de prédiction*. Ils ne peuvent être résolus qu'en liaison avec la connaissance de conditions initiales dont nous verrons l'importance dans les chapitres suivants dans le cas particulier des simulations particulières.

Les propriétés de ces algorithmes peuvent être résumées en 4 points :

- consistence du schéma numérique : dans la limite des petits pas de temps Δt et des petits intervalles spatiaux Δx , le système d'équations aux différences finies doit devenir identique au système différentiel qui en découle.

- précision du schéma numérique : cette précision est essentiellement limitée par deux facteurs

(i) les erreurs de troncature dues à l'approximation d'une équation différentielle par une équation aux différences finies (de telles erreurs dépendent des intervalles Δt et Δx)

(ii) les erreurs d'arrondi dues à la représentation des chiffres dans la mémoire de l'ordinateur et à leur manipulation.

- stabilité du schéma numérique : une méthode peut être considérée comme stable si les petites erreurs induites à chaque étape produisent une erreur cumulative plus petite.

Soit ε^n l'erreur cumulative produite à l'étape n , on a $\varepsilon^{n+1} = g\varepsilon^n$ où g est le facteur d'amplification, l'algorithme est stable si $|g| \leq 1$. D'une façon générale, les conditions de stabilité ne sont pas indépendantes de la physique du phénomène étudié.

- efficacité du schéma numérique : elle se définit comme le total des opérations arithmétiques, logiques, de mémorisation faites par le processeur principale par unité de temps Δt ; plus le nombre de ces opérations est faible plus l'algorithme est dit efficace. Un compromis doit toujours être fait entre la précision et l'efficacité d'un algorithme.

III. La simulation numérique : utilisation d'un code particulière

Parmi les modèles numériques décrits précédemment, le plus simple du point de vue conceptuel reste le **code particulière**. Dans ce type de modèle, on fait correspondre à chaque particule physique du plasma une particule simulée dans la mémoire de l'ordinateur et on calcule toutes les forces d'interaction agissant sur chaque particule.

Bien que cette méthode puisse sembler simple et facile, elle s'avère dans la pratique d'un emploi complexe du fait des limitations des ressources de calcul qui requièrent l'utilisation de techniques numériques sophistiquées. En effet, ce type de simulation retient le maximum d'information contenue dans le système et conduit à un nombre très important d'opérations : si N_p est le nombre de particules, le système contient $N_p(N_p-1)/2$ paires de particules. Pour chaque paire, il faut calculer le vecteur position relative, l'élever à la bonne puissance, calculer la force agissant sur chaque particule, faire avancer ces particules, remettre à jour les vitesses et les positions. Ceci représente une vingtaine d'opérations par paire sans compter les opérations d'adressage mémoire et de gestion des entrées-sorties. Au total, pour chaque incrément de temps, $\sim 10N_p^2$ opérations sont demandées à l'ordinateur. Les super-calculateurs les plus sophistiqués ne peuvent suivre, à l'heure actuelle, que quelque millions de particules sur des échelles de temps appréciable. Bien qu'important, un tel chiffre reste très loin des caractéristiques des milieux naturels : cela doit être comparé aux quantités rencontrées dans les plasmas spatiaux et de laboratoire. Typiquement, on trouve :

- (i) plasmas de laboratoire $\rightarrow \sim 10^{12} \text{ cm}^{-3}$
- (ii) plasmas spatiaux $\rightarrow \sim 10^{18} \text{ km}^{-3}$

On est naturellement conduit à simplifier quelque peu le modèle de simulation. La théorie des plasmas fournit une voie de recherche pour cette simplification. Physiquement, les électrons et les ions sont traités dans la plupart des cas comme des particules ponctuelles. Certaines interactions entre ces particules se développent sur de courtes distances dans de petits intervalles de temps, produisant des effets à courtes longueurs d'onde et hautes fréquences (comportement binaire : *collisions*); le détail de telles interactions sont dans de nombreux cas de faible importance en physique des plasmas. Les effets les plus importants sont les interactions à long rayon d'action, ou **effets collectifs** qui se produisent sur des échelles de temps et d'espace bien plus importantes. En particulier, les effets collectifs ne prennent en compte que l'interaction d'un nombre très élevé de particules entre elles et non les interactions entre un petit nombre de particules.

Cette constatation suggère l'introduction d'un procédé afin de réduire le nombre de particules simulées en négligeant les forces à court rayon d'action pour ne tenir compte que

des forces d'interaction mettant en jeu un nombre très grand de particules. De tels procédés ont été validés à la fois d'un point de vue théorique et d'un point de vue numérique en introduisant le concept de **particule finie** ou **macro-particule**.

III.1 Notion de macro-particule : aspect théorique

La mécanique statistique permet de décrire un système en termes de fonction de distributions. Ce système se simplifie lorsque les particules ne sont pas corrélées, c'est-à-dire lorsque la probabilité de trouver une particule i dans un élément de volume $d^3r_i d^3v_i$ de l'espace des phases autour de la position r_i, v_i , est indépendante de celle de trouver la particule j dans un élément de volume $d^3r_j d^3v_j$ autour de la position r_j, v_j . On se trouve alors devant un plasma non collisionnel, état de la matière la plus répandue dans l'univers.

Dans l'approximation des plasmas non-collisionnels, la vitesse et la position de chaque particule chargée suit une loi de distribution de la forme $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ qui satisfait à l'équation cinétique de Vlasov:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{r}} + \frac{q[\langle \vec{E} \rangle + \vec{v} \times \frac{\langle \vec{B} \rangle}{c}]}{m} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (1)$$

où $\langle E \rangle$ et $\langle B \rangle$, formellement champs extérieurs, résultent de moyennes sur f_s et sont obtenus à l'aide des équations de Maxwell avec les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sum_s q_s \int f_s d^3v \\ \vec{J} = \sum_s q_s \int \vec{v} f_s d^3v \end{array} \right.$$

L'équation (1) se résout en se donnant une distribution initiale $f_s(r, v, t=0)$ et en recherchant le long de quelles lignes f_s conserve sa valeur au cours du temps. Il est alors possible de reconstituer $f_s(r, v, t \neq 0)$ en chaque point de l'espace, à chaque instant. Les diverses grandeurs mécaniques, thermodynamiques et électrodynamiques sont obtenues ensuite à l'aide des moments de f_s . Dans le cas d'un espace à une dimension, l'équation (1) s'écrit :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + v \frac{\partial f_s}{\partial x} + \frac{F}{m_s} \frac{\partial f_s}{\partial v} = 0 \quad (2)$$

où F est la force appliquée aux particules due aux champs collectifs. On a d'autre part, $df_s=0$, ce qui conduit à la relation :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial f_s}{\partial x} + \frac{dv}{dt} \frac{\partial f_s}{\partial v} = 0 \quad (3)$$

En rapprochant (2) et (3), on obtient le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m_s} \end{array} \right.$$

Un tel système est identique au système d'équation décrivant le mouvement de particules individuelles dans le champ collectif associé à la force F . Cette similitude d'équations ne recouvre pas une identité physique : dans la description statistique conduisant à l'équation de Vlasov, l'identité d'une particule est perdue. Ce modèle représente donc le mouvement de

particules, contenues dans un petit volume de l'espace des phases, caractérisé par une valeur de la fonction de distribution des vitesses. Nous parlerons alors de **macro-particules**¹. Chacune d'entre elles représente un nombre élevé de particules ponctuelles et permet de satisfaire à la contrainte $N_D \gg 1$ avec un coût raisonnable en terme de temps de calcul.

III.2 Notion de macro-particule : aspect numérique

L'utilisation de macro-particules de tailles finies, non ponctuelles entraîne quatre conséquences directes importantes :

(i) le nombre de macro-particules est très inférieurs au nombre réaliste de particule par sphère de Debye.

(ii) chaque macro-particule représentant un nombre i considérable de particules ponctuelles de masse m_s et de charge q_s est donc très massive $M = \sum_1^i m_s^i$ et très chargée

$$Q = \sum_1^i q_s^i.$$

(iii) la répartition de charge se faisant sur une région finie de l'espace, les variations de densité sur des régions plus petites que la largeur de la particule ne sont pas résolue.

(iv) de telles particules en se rencontrant créent des forces de courtes longueurs d'onde (collisions numériques) très importantes.

Afin de minimiser ces collisions artificielles (bruit numérique), les macro-particules sont considérées comme des nuages immatériels qui peuvent s'interpénétrer librement et dont la forme, appelée **facteur de forme** $S(\vec{r})$, peut être choisie de manière arbitraire. Cette dernière conséquence est très importante car elle modifie les équations physiques régissant le système, tout en préservant les phénomènes à grande échelle qui intéressent la physique des plasmas non collisionnels.

Comme illustration, prenons la force électrostatique s'exerçant entre deux particules ponctuelles de même charge. Les deux particules passant près l'une de l'autre vont ressentir une variation rapide et très forte de cette force en liaison avec le profil hachuré de la figure 1. C'est l'impulsion (variation de vitesse rapide) associée à cette force que l'on interprète comme une collision.

¹ Attention, il est important de remarquer que ce modèle n'est pas équivalent au modèle fluide utilisé en hydrodynamique.

(i) aspect fluide -> concept de la cellule : représente la moyenne des particules à l'intérieur d'une cellule, celles-ci pouvant être plus ou moins nombreuses au cours du temps.

(ii) aspect particulaire -> concept de la macro-particule : représente toujours les mêmes particules et l'on suit leur évolution avec le temps (on suppose que les particules dans l'état a évoluent toutes vers l'état b au cours du temps, **théorème de Liouville**)

Une image simple peut être utilisée pour illustrer une telle différence. Considerons une goutte de lait tombant dans une tasse de café comme une *macro-particule de lait*. Au fur et à mesure que le café est remué dans la tasse, cette goutte de lait se déforme en un filament qui finit par se disperser totalement dans le café et par perdre alors son identité propre. Néanmoins, elle peut toujours être décrite par l'évolution de l'élément de volume de l'espace des phases choisi à l'instant initial. A l'inverse, la description fluide prend en compte un élément de volume fixe dans la tasse qui garde toujours son identité alors que les particules de lait le constituant changent continuellement, entrant et sortant sans cesse de ce volume.

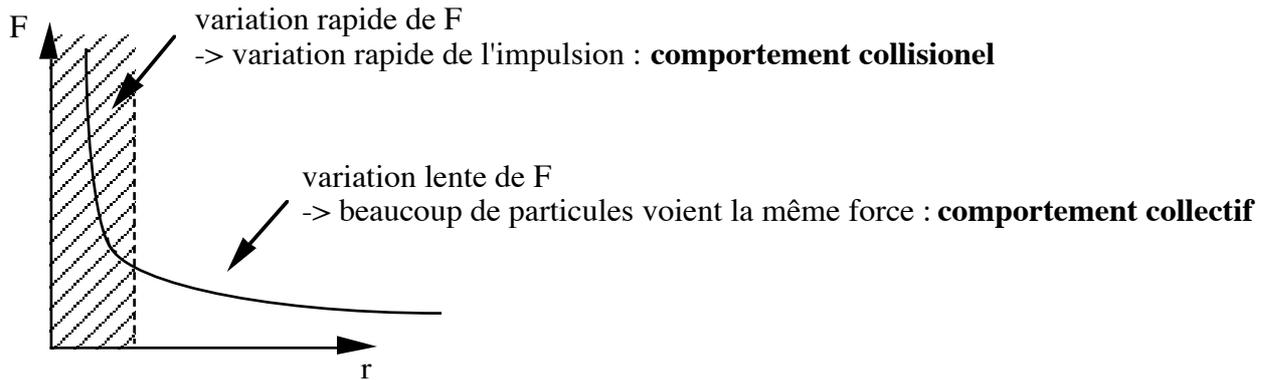


Figure 1 : Force de coulomb vue par une particule interagissant avec une autre particule de même charge

D'autre part, la partie non hachurée donne l'évolution lente de la force F avec r , cela veut dire que beaucoup de particules voient une force approximativement de même module et interagissent simultanément. Cette partie décrit les effets collectifs du plasma, effets que l'on désire étudier et conserver dans le cadre du plasma non collisionnel.

L'introduction de particules de taille finie pouvant s'interpénétrer librement produit les résultats de la figure 2. Ceci est valable pour le cas de particules dont le facteur de forme $S(x)$ possède une densité de charge uniforme. $S(x)$ est représenté par un rectangle dans un espace à une dimension, un disque en 2-D et une sphère en 3-D de rayon R . Cette figure montre simultanément le potentiel et la force subis par une particule test à l'intérieur et à l'extérieur du nuage $S(r)$ comparé à ce que l'on obtiendrait pour une particule ponctuelle ($R = 0$).

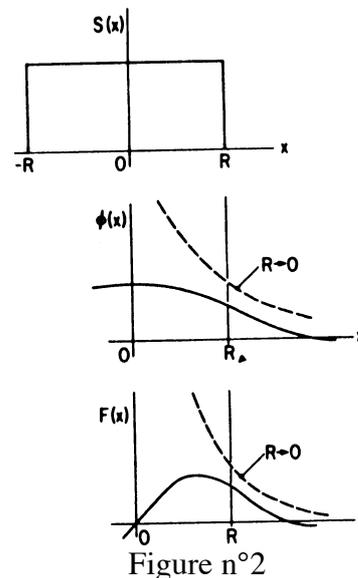


Figure n°2

Un effet d'écrantage peut être observé du fait de l'existence des particules environnantes. Quand les particules sont loins les unes des autres, on obtient un profil coulombien; mais lorsqu'elles commencent à s'interpénétrer, celui-ci diminue pour s'annuler lorsqu'elles se chevauchent parfaitement, aucune singularité n'est observée. L'existence de particules de taille finie implique que leur charge est répartie sur une région finie de l'espace. On peut donc diviser l'espace en cellules dont la taille est celle des particules, pour calculer la densité de charge et de courant localement. L'existence de ces cellules autorise une discrétisation du calcul des différentes quantités nécessaire au calcul des forces s'appliquant sur les particules et, ce faisant, fait apparaître une autre caractéristique importante de la simulation numérique, la nature intrinsèquement discrète des ordinateurs.

IV. La simulation numérique : nature discrète des ordinateurs

En effet, la représentation en mémoire des nombres décrivant le plasma (position, vitesses des particules, valeurs des champs électromagnétiques) se fait sous forme de vecteurs A_i ou de matrices du type $B_{i,j}$, où i, j sont des entiers. De la même façon, la résolution des équations différentielles donnant l'évolution temporel d'un système se fait de manière discontinue, par saut Δ_t . Cette limitation que l'on retrouve quelque soit le type de simulation, va induire d'importantes différences dans la résolution des équations physiques et dans l'évolution des systèmes physiques complexes. Afin de simplifier la présentations de ces différences, nous allons séparer les effets dus à la discrétisation spatiale des effets dus à la discrétisation temporelle.

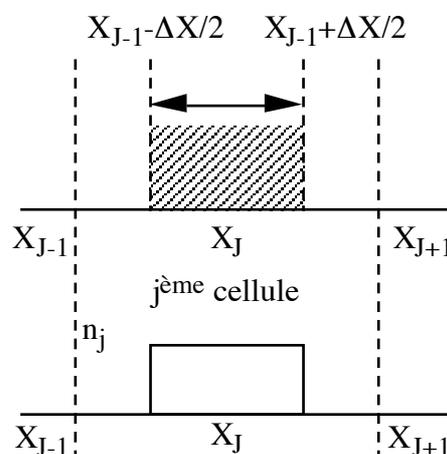
IV.1 Discrétion spatiale : interpolation

Le maître mot concernant la discrétisation spatiale est le mot **interpolation**. Ce terme traduit le choix que l'on doit faire pour connecter les particules aux points grilles représentant l'espace, et ce, afin de calculer les champs, donc les forces associées. De la même façon, il faudra utiliser une loi d'attribution pour appliquer la force résultante sur les particules. Ces lois sont en fait totalement arbitraires et dépendent du choix du numéricien. Toutefois, afin de minimiser les interactions *auto-induites* (action de la particule sur elle-même), il est judicieux d'utiliser la même règle d'interpolation **force \leftrightarrow particule**.

Ces méthodes d'interpolation peuvent être plus ou moins complexes suivant la sensibilité du problème aux fluctuations numériques. Dans la pratique, de nombreux problèmes peuvent se contenter d'interpolation d'ordre peu élevé, l'utilisation d'ordre supérieur introduisant un surcoût en terme de temps de calcul souvent rédhibitoire.

IV.1.1 Pondération d'ordre ZERO: NGP

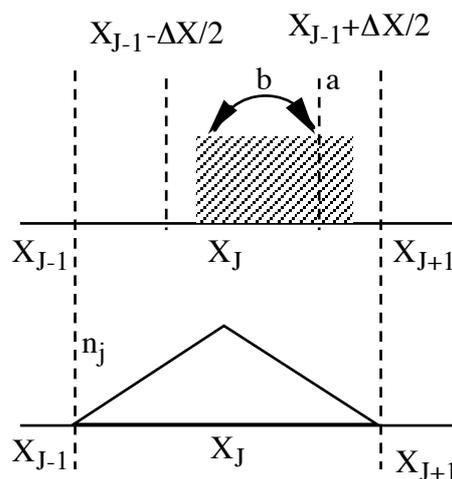
L'interpolation la plus simple est la pondération d'ordre ZERO ou NGP (**N**earest **G**rid **P**oint). Toute particule présente dans l'intervalle $X_j \pm \Delta x / 2$ (zone hachurée du schéma ci-dessous) est assignée au point X_j pour obtenir la densité $n(X_j)$.



Une telle règle d'assignation permet d'obtenir le profil de densité d'une particule se propageant dans l'intervalle $X_j \pm \Delta x / 2$. Cette densité est interprétée comme étant la forme effective de la particule. Un tel profil met en évidence les variations brutales de la densité lorsque la particule arrive ou quitte la zone hachurée; variations qui sont sources de fluctuations numériques importantes. Afin de les minimiser, une interpolation d'ordre supérieur est usuellement utilisée.

IV.1.2 Pondération d'ordre UN: PIC ou CIC

Cette interpolation linéaire permet d'obtenir un niveau de bruit numérique inférieur à la méthode NGP. Cette méthode, appelée PIC (**Particle in Cell**) ou CIC (**Cloud in Cell**), a le mérite de concilier de faibles fluctuations numériques avec un temps de calcul d'interpolation raisonnable. Soit une particule de largeur Δx centré en x_i . La pondération assigne une partie du nuage (quantité a) au point X_{j+1} et une partie (quantité b) en X_j avec pour résultat le profil de densité représenté ci-dessous.



Cette forme d'interpolation introduit donc une particule "triangulaire" dont le déplacement n'engendre aucun saut important de la densité de charge et qui se caractérise par une taille double de celle de la méthode NGP ($2 \Delta x$).

L'utilisation de telles interpolations va introduire des différences notables dans l'écriture des équations régissant le plasma du fait que la charge et la densité sont distribuées sur une zone de taille finie. Par exemple, on a pour la densité de charge les relations :

- pour une particule ponctuelle $\rightarrow q \delta(x'-x)$ (δ : distribution de Dirac)
- pour une particule de taille finie $\rightarrow q S(x'-x)$

où $S(x)$ symbolise la forme de la particule (ce paramètre est appelé *facteur de forme*). La charge totale alors est égale à $q \int S(x'-x) dx'$.

IV.1.4 Existence d'une grille spatiale discrète

Le caractère discret de la grille spatiale dans laquelle se déplacent les particules de taille finie introduit un problème supplémentaire illustré dans l'espace de Fourier. La transformée de Fourier (**FFT** : Fast Fourier Transform) est en effet discrète, on a ainsi pour la densité de charge :

$$\rho(k) = \Delta x \sum_{j=0}^{NG-1} \rho_j e^{-ikX_j} \quad \text{avec} \quad X_j = j\Delta x$$

et

$$\begin{cases} \rho_j \equiv \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} \rho(k) e^{ikX_j} \frac{dk}{2\pi} & (\text{système infini, 1}^{\text{ère}} \text{ zone de Brillouin}) \\ \rho_j = \frac{1}{L} \sum_{n=-NG/2}^{NG/2-1} \rho(k) e^{ikX_j} & (\text{système fini, espace discret}) \end{cases}$$

avec $L=NG \Delta x$ taille de la boîte de simulation et $k = \left(\frac{2\pi n}{L} \right)$.

Le pas de grille étant égal à Δx , la transformée de Fourier des quantités discrétisées (projetées sur la grille spatiale) est périodique, de période $k_g = 2\pi/\Delta x$. On a donc par définition, l'égalité

$$\rho(k) = \rho(k_p) \quad \text{avec} \quad k_p = k - k_g \quad \text{où } p \in]-\infty, +\infty[$$

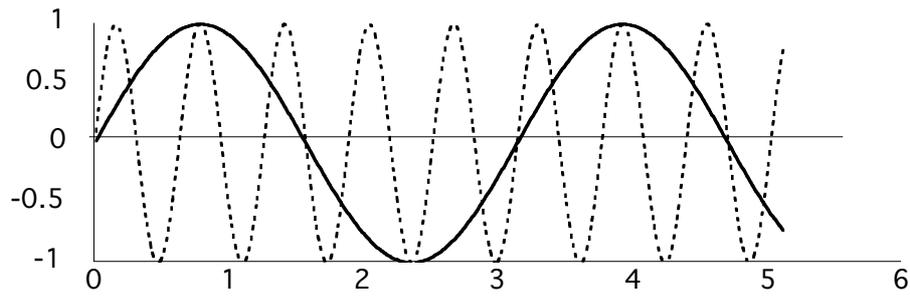
Pour une densité de charge sur la grille X_j , ρ_j , on définit la densité de charge associée aux particules de taille finie $\rho_c \equiv qn_c(x) \equiv \int S(x - x') n(x') dx'$. On a alors

$$\rho_j \equiv \rho_c(X_j) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \rho_c(k) e^{ikX_j} \frac{dk}{2\pi} = \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} \left[\sum_{p=-\infty}^{\infty} \rho_c(k_p) \right] e^{ikX_j} \frac{dk}{2\pi}$$

où l'on passe de l'intégration sur tous les k à l'intégration sur une période (1^{ère} zone de Brillouin) et la sommation sur tous les harmoniques de ρ_c . On reconnaît le terme entre crochet

[] comme $\rho(k) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \rho_c(k_p)$. Ce terme illustre le couplage des différents "aliases" sur les

points grilles. Cette somme infinie résulte du fait que l'on prend une information définie sur un continuum pour la projeter sur une grille discrète. Ceci pose problème puisque les différentes aliases sont définies à la même localisation comme illustrée par la figure ci-dessous. En d'autre termes, une onde sinusoïdale (trait plein) perturbant un système physique se traduit vis-à-vis de la grille spatiale par l'existence d'une infinité d'ondes virtuelles (traits pointillés pour l'une d'entre elles) auxquelles le plasma va réagir. Ces ondes n'ont pas d'existence réelle mais vont néanmoins entraîner une réponse non physique du plasma pouvant perturber les processus étudiés.



IV.2 Discrétion temporelle : intégration

Les algorithmes décrivant l'évolution temporelle des systèmes physiques reposent sur l'idée de prédiction. Ils utilisent donc tous un développement de Taylor afin de prédire la valeur suivante des quantités physiques. La précision de ces algorithmes sera donc directement proportionnel au nombre de termes que l'on retiendra dans cette série. Généralement, on ne retient que un ou deux termes pour des raisons de temps de calcul.

IV.2.1 Méthode d'Euler : la méthode la plus simple

On se contente d'utiliser le premier terme du développement de Taylor. L'évolution de la quantité u^n (où n représente le $n^{\text{ième}}$ pas de temps Δt) s'écrit alors :

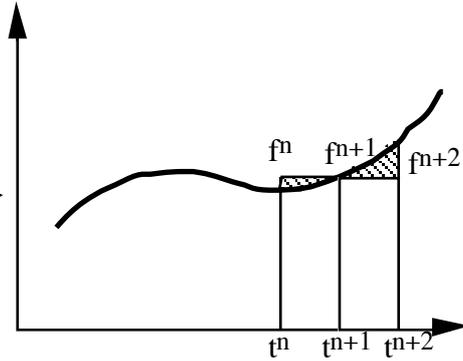
$$u^{n+1} = u^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u,t) dt \implies$$

L'estimation de la fonction f^{n+1} a pour erreur la zone hachurée ci-dessus. On peut remarquer que cette estimation est assez mauvaise dans le cas d'une évolution rapide des quantités physiques. Cette méthode bien qu'étant la plus simple et la plus rapide à mettre en oeuvre n'est donc peu utilisée. On est amenée à utiliser les termes suivants de la série de Taylor.

IV.2.2 Méthode "saute-mouton" : la méthode la plus répandue

Un bon compromis entre la précision de l'algorithme et le temps de calcul consiste à se limiter au deuxième terme du développement de Taylor. L'évolution de la quantité u^n s'écrit alors

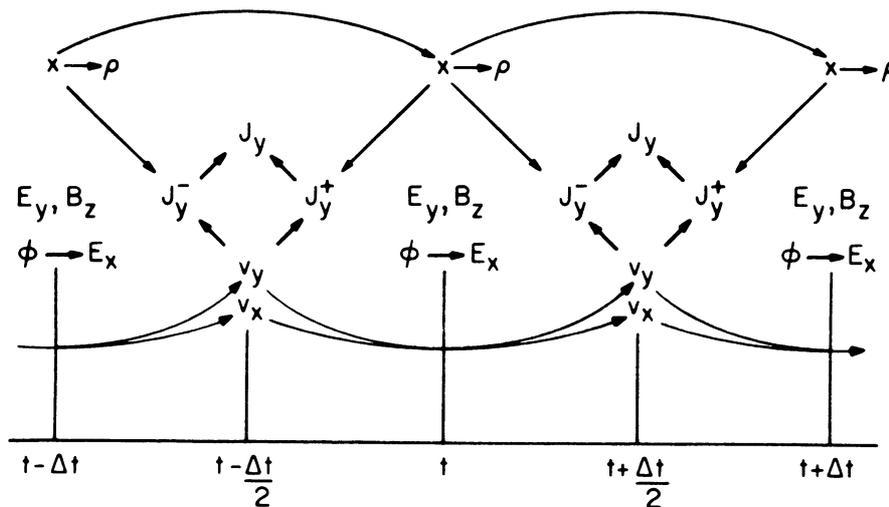
$$\begin{cases} \text{au temps } n+1 & u^{n+1} = u^n - 2\Delta t f(u^n, t^n) \\ \text{au temps } n+2 & u^{n+2} = u^n - 2\Delta t f(u^{n+1}, t^{n+1}) \end{cases} \implies$$



L'estimation de la fonction f^{n+2} a pour erreur la zone hachurée ci-dessus. On peut remarquer que cette estimation est meilleure que dans le cas précédent puisque l'erreur faite dans la détermination de f^{n+1} contrebalance pour une part l'erreur effectuée sur f^{n+2} . Cette méthode, à l'inverse de la précédente, nécessite de connaître comme conditions initiales deux valeurs, u^0 et u^1 (u^1 pouvant être déterminée par la méthode d'Euler à partir de u^0). La résolution d'un tel algorithme peut se faire de manière *implicite* ou *explicite*. Nous ne nous intéresserons qu'à l'aspect explicite de cet algorithme qui est celui utilisé dans le code **ES1**, méthode la plus intuitive puisqu'elle permet de calculer la valeur u^{n+2} à partir de la donnée des valeurs u^n et u^{n+1} . Concernant les équation de la dynamique, on résoud donc le système suivant :

$$\begin{cases} m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \\ \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v} \end{cases} \implies \begin{cases} m \frac{\vec{v}^{n+1} - \vec{v}^n}{\Delta t} = \vec{F}^{n+\frac{1}{2}} \\ \frac{\vec{x}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{x}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \vec{v}^n \end{cases}$$

où la résolution des équations différentielles du 1^{er} ordre se fait à l'aide des différences finies. Un tel schéma d'intégration se caractérise par le fait que les forces F sont calculées aux même temps que les positions x . Une telle méthode est dite "centrée" car les vitesses et les positions étant des variables indépendantes dans l'espace des phases, elles sont calculées à des temps différents. Graphiquement, cette méthode peut être représentée comme ci-dessus :



Un tel algorithme de prédiction introduit des différences significatives dans la résolution des équations physiques décrivant le plasma.

IV.2.3 Effets dus à la discrétisation : résultats généraux

Les effets dus à la discrétisation temporelle sont très généraux et peuvent être illustrés simplement par l'image mécanique d'un *plasma froid* que l'on perturbe : l'oscillateur harmonique. Soit l'équation différentielle du 2^{ème} ordre

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0$$

Les dérivées temporelles sont calculées comme des différences finies et on obtient alors l'équation:

$$\frac{v_{t+\frac{\Delta t}{2}} - v_{t-\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta t} = \frac{x_{t+\Delta t} - 2x_t + x_{t-\Delta t}}{(\Delta t)^2} = -\omega_o^2 x_t$$

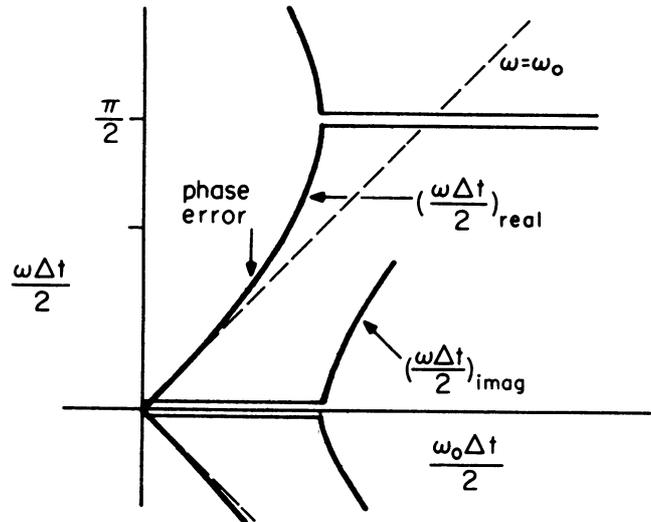
Lorsqu'on introduit une perturbation de la forme $x_t = Ke^{-i\omega t}$, il vient la relation

$$e^{-i\omega\Delta t} - 2 + e^{+i\omega\Delta t} = -\omega_o^2 \Delta t^2$$

qui peut se réécrire sous la forme d'une équation de dispersion

$$\sin^2 \frac{\omega\Delta t}{2} = \frac{\omega_o^2 \Delta t^2}{4} \quad ==> \quad \left| \sin \frac{\omega\Delta t}{2} \right| = \frac{\omega_o \Delta t}{2}$$

où ω est la fréquence d'oscillation. Théoriquement, la solution physique attendue est $\omega = \omega_o$. En fait, la pulsation de l'oscillation observée par le simulateur est donnée par la relation ci-dessus, elle dépend de la valeur de Δt comme l'indique la figure suivante.



Pour $\frac{\omega_o \Delta t}{2} > 1$, l'examen de la figure montre que les solutions sont complexes avec un taux de croissance (amortissement, amplification) entraînant une instabilité numérique. A l'inverse pour $\frac{\omega_o \Delta t}{2} < 1$, des solutions réelles existent toujours, mais plus ce rapport augmente, plus l'on s'éloigne de la valeur exacte ω_o (ces résultats sont légèrement modifiés dans le cas d'un plasma thermique). L'erreur commise par la discrétisation du temps peut s'estimer en développant le membre de droite de l'équation de dispersion; on trouve alors :

$$\frac{\omega\Delta t}{2} \approx \frac{\omega_o \Delta t}{2} \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{\omega_o \Delta t}{2} \right)^2 + \dots \right]$$

On voit donc apparaître un terme d'erreur sur la phase $\delta(\Delta\phi)$ qui après N pas de temps Δt sera égal à :

$$\delta(\Delta\phi) = N\omega_o\Delta t \frac{1}{6} \left(\frac{\omega_o\Delta t}{2} \right)^2 = \frac{1}{24} N(\omega_o\Delta t)^3.$$

Une telle relation est assez contraignante lorsque l'on desire suivre un système sur des périodes de temps importantes. Par exemple, en choisissant un pas de temps tel que $\omega_o\Delta t = 0.2$, l'erreur de phase après $N = 5000$ Δt est égale à $\delta(\Delta\phi) = 1,66 \text{ rad} \approx \pi/2$, erreur inacceptable pour une simulation réaliste.

Nous allons voir au paragraphe suivant que quelques relations peuvent être répertoriées afin de déterminer approximativement le domaine de validation d'une simulation, tout l'art du numéricien consistant à se tenir au plus proche des contraintes numériques et physiques liées au système simulé.

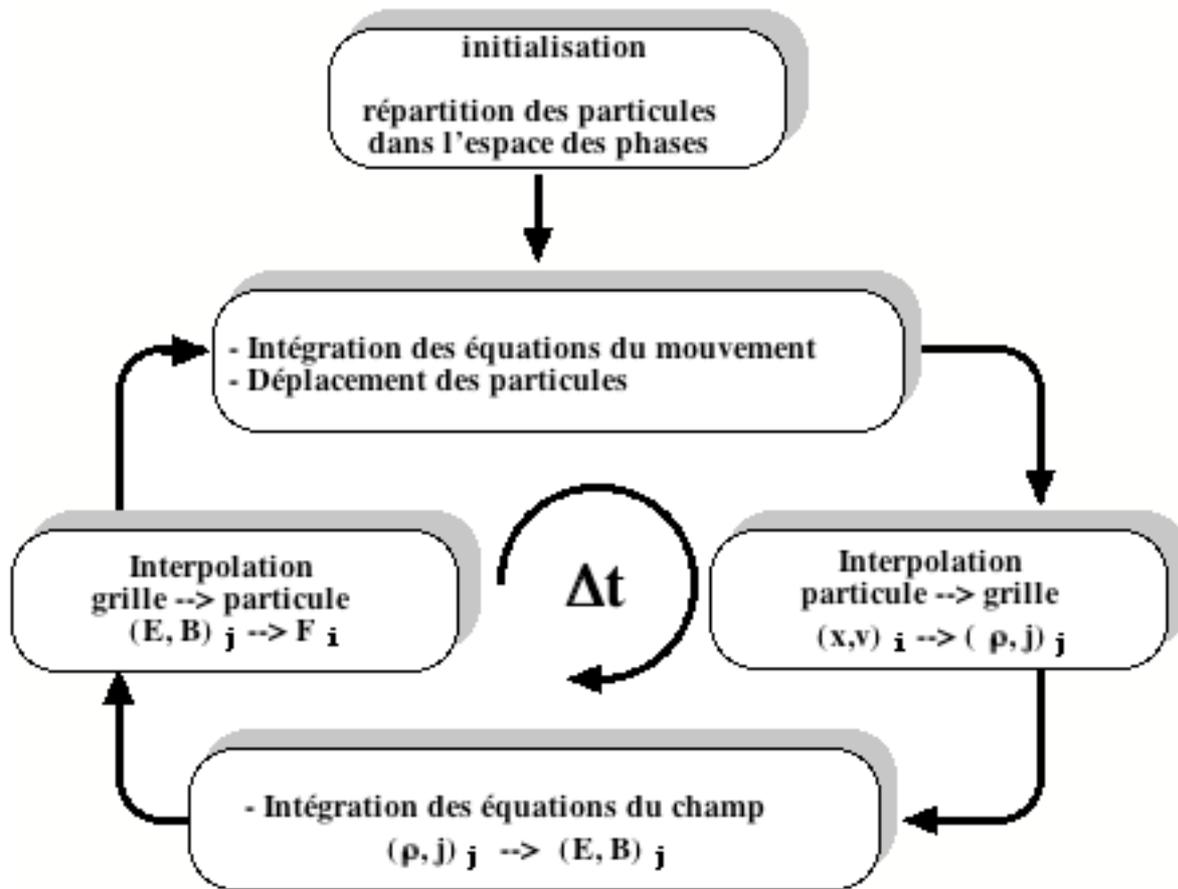
V Organisation générale : exemple d'un code électrostatique - ES1 -

Afin d'illustrer les faiblesses et les points forts de la simulation, un code électrostatique ES1 est utilisé. Ce code a été développé par A. B. Langdon à Berkeley en 1972. Bien que ce code ait été développé dans un premier temps à des fins pédagogiques, son utilité a été non négligeable pour résoudre des problèmes physiques de base. Une génération entière de numériciens des plasmas s'est formée sur ce code dont la richesse permet d'étudier de nombreux problèmes à la fois physique et numérique.

V.1 Schéma de résolution de l'algorithme

Ce code électrostatique repose sur les idées et concepts développés dans les paragraphes précédents et permettra d'illustrer en détail certaines parties du cours de simulation numérique. Le schéma de résolution de l'algorithme peut être résumé en 4 étapes principales présentées ci-dessous.

Il est à noter que l'étape d'initialisation est une étape très importante car c'est elle qui permet de contrôler les paramètres plasmas et numériques introduits dans la simulation. Durant cette phase de définition, il faudra d'autre part toujours garder à l'esprit les limitations intrinsèques de la simulation et les critères nécessaires à son succès. Cette phase est d'autant plus importante que pour les simulations "lourdes", chaque erreur se compte en dizaines d'heures de supercalculateur.



V.2 Critères numériques généraux

Ces critères prennent en compte toute la théorie décrite précédemment et traduisent les limitations intrinsèques ainsi que la sensibilité du code numérique aux conditions initiales.

V.2.1 Critères spatiaux

Toute simulation réaliste doit vérifiée principalement :

1. le plasma est supposé non-collisionnel : $\frac{v}{\omega_{pe}} \approx \frac{1}{N_D} \ln N_D \ll 1 \implies N_D \gg 1$

dans la pratique, il suffira de vérifier que $N_D \geq 10$.

2. De la même façon, il faut que le nombre N_p de particules par point grille soit le plus grand possible afin de limiter le bruit numérique.

3. le milieu est toujours beaucoup plus grand que la plus petite longueur caractéristique : $L \gg \lambda_D$ (où L : longueur de la boîte de simulation)

4. la boîte de simulation définit une fenêtre d'observation du plasma avec un échantillonnage discret de Δx . Ceci a pour conséquence que l'on ne peut observer qu'un spectre d'onde limité dans le plasma. Il faudra faire attention que les ondes que l'on désire observer ont des longueurs d'onde λ_o comprises dans les limites :

$$\begin{cases} k_{\min} = \frac{2\pi}{L} \\ k_{\max} = \frac{2\pi}{\Delta x} \end{cases}$$

5. Expérimentalement, on trouve que pour éviter des phénomènes d'alias trop importants, on doit vérifier la relation : $\Delta x \ll 2\pi\lambda_D$.

V.2.2 Critères temporels

De la même façon, les schémas d'intégration utilisés pour résoudre l'évolution temporel du plasma introduisent des erreurs qui doivent être absolument évitées. Celles-ci sont principalement au nombre de deux :

1. L'algorithme "saute-mouton" décrit précédemment impose d'avoir l'inégalité :
pour un plasma froid : $\omega_p \Delta t < 2$
pour un plasma chaud : $\omega_p \Delta t < 1.62$

2. L'utilisation des algorithmes d'intégration peut conduire à des phénomènes stroboscopiques. Les ondes haute fréquence (vitesse de phase élevée) peuvent être échantillonnées sur des intervalles Δt peu différents de la période d'oscillation et être vues alors comme des ondes basse fréquence (faible vitesse de phase). Un critère pour éviter un tel problème consiste à choisir un intervalle de temps d'intégration petit devant la période minimum d'oscillation possible du système, c'est-à-dire $\omega_p \Delta t \leq 1$. Cela nécessite d'avoir une idée cohérente des ondes potentiellement présentes dans la simulation.

Dans la pratique, puisqu'on ne veut pas une erreur de phase trop importante au cours de la simulation, il est nécessaire de prendre $\omega_p \Delta t \ll 1$, généralement on prend pour valeur $\omega_p \Delta t = 0.2$.

V.3 Conditions aux limites

Le choix des conditions aux limites dépend du type de problème à traiter. On simule un milieu infini, du point de vue des ondes, en introduisant des murs absorbants. Les ondes s'échappant de la région de simulation proprement dite pénètrent dans une zone tampon où elles sont absorbées.

Dans ce cours, nous utiliserons des *conditions aux limites périodiques*. Avec une telle hypothèse, toute particule qui s'échappe à une extrémité de la boîte de simulation est réinjectée de l'autre côté avec la même vitesse. Ce type de conditions aux limites maintient le nombre de particules et n'introduit aucune perte de quantité de mouvement ni d'énergie (par rayonnement, par exemple). Ce faisant, ce type de conditions est très bien adaptée à l'étude de problèmes physiques du type interaction faisceau-plasma.

VI. Introduction des effets thermiques : problème d'initialisation

Pour simuler l'évolution d'un plasma chaud, avant l'introduction de toute perturbation, il est nécessaire de répartir les particules dans l'espace des phases. L'initialisation requiert de connaître la distribution $f_s(x, v, t = 0)$ pour chaque espèce s d'électrons ou d'ions. Il n'existe

aucune manière simple de parvenir à ce résultat. On doit introduire pour chaque macro-particule les informations concernant sa position x (information sur la densité du plasma) et sur sa vitesse (information sur la distribution du plasma).

Dans le cas d'un plasma froid, ceci ne pose pas de problème puisqu'il suffit de répartir uniformément les particules le long de l'axe des x (cas mono-dimensionnel) avec $v_{th} = 0$. Pour créer un faisceau, une vitesse de dérive supplémentaire v_0 est alors donnée à l'ensemble de la population.

Pour un plasma chaud, on doit trouver une manière de définir correctement $f_s(x, v, t = 0)$ pour la grille spatiale toute entière et/ou chaque point grille. Cela requiert beaucoup plus de particules car chaque intervalle Δx de la grille se doit de vérifier les critères:

(i) avoir un nombre suffisant de particules $N_D \gg 1$

(ii) posséder une distribution de particules la plus proche possible d'une distribution maxwelienne.

Historiquement, différentes méthodes ont été utilisées pour initialiser un plasma thermique, méthodes qui ont l'avantage d'illustrer la difficulté de mise en oeuvre de telles simulations.

VI.1 Exemple d'une distribution uniforme : tirage aléatoire

On cherche, à priori, à distribuer les particules d'une manière aléatoire avec une certaine loi de probabilité de trouver une particule dans un petit volume $\delta x \delta v$ de l'espace des phases (dans le cas d'une simulation à une dimension).

Supposons que l'on tire au hasard (pseudo-hasard des générateurs de nombres aléatoires des ordinateurs) des nombres afin de constituer la distribution aléatoire voulue (en l'occurrence une gaussienne). Soit $P(y)$ cette distribution, on suppose que le générateur de nombres aléatoires donne des nombres compris entre 0 et 1 et ce, de manière uniforme. Soit y ce nombre, tel que la densité de probabilité soit égale à 1, c'est-à-dire $P(y)=1$. Cela revient à supposer que la probabilité de trouver un chiffre autour de la valeur y dans l'intervalle dy est

$$dP = P(y)dy = dy \quad \text{avec } y \in [0,1]$$

A ces nombres peuvent être associé de manière unique une vitesse $v(y)$ de manière à obtenir la distribution voulue $P(v)$. La probabilité d'obtenir une vitesse dans un intervalle dv autour de v est donc :

$$\begin{aligned} dP &= P(v)dv = P(y)dy \\ \Rightarrow P[v(y)] \frac{dv}{dy} dy &= P(y)dy = dy \end{aligned}$$

d'où

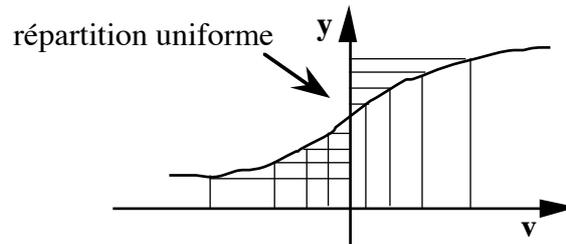
$$P[v(y)] \frac{dv}{dy} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dv} = P[v(y)]$$

Il en sort la relation

$$y(v) = \int_{-\infty}^v P[v] dv$$

Cette relation permet de tabuler un nombre aléatoire à une vitesse v de telle sorte que l'on ait $v = y^{-1}(v)$ pour construire la distribution voulue. De la même façon, on répartit les particules

ayant une vitesse comprise dans l'intervalle dv , suivant une loi de répartition uniforme $P(x)$. Géométriquement, cette répartition peut être représentée comme sur la figure ci-dessous :



Cette figure montre bien la répartition uniforme suivant x construisant une distribution des vitesses maxwellienne (beaucoup de particules aux faibles vitesses, peu de particules à vitesse élevée).

Cette méthode possède trois défauts :

(i) Si l'on obtient bien une Maxwellienne *globalement* dans toute la boîte de simulation, cela n'est pas vrai localement pour chaque intervalle Δx . On ne s'approche de la loi de répartition choisie que si le nombre de particules dans chaque Δx est très grand.

(ii) La neutralité n'est pas assurée localement. Pour disposer les particules, on n'a pas tenu compte de l'hypothèse de quasi-neutralité et d'effet d'écrantage des particules chargées. Pour un plasma réel, un excès de particules dans une région diminue la probabilité qu'une particule de même charge y pénètre. Puisque l'on ne tient pas compte de la tendance naturel du plasma à demeurer quasi-neutre, une période transitoire sera nécessaire au plasma pour atteindre cet état, entraînant un bruit numérique supplémentaire.

(iii) Cette loi de répartition ne peut donner une image fidèle de la distribution choisie dans les régions où il y a peu de particules. En particulier, ce problème apparaît dans la queue de la Maxwellienne où très peu de macro-particules ont été générées. Ceci est rédhibitoire dans les études où ces régions de faibles densité jouent un rôle critique dans les phénomènes étudiés (faisceau très énergétique, ondes de choc, etc...).

Toutes ces remarques impliquent un niveau de bruit électrostatique beaucoup plus intense que dans les plasmas expérimentaux. Une estimation de ce bruit peut être fait, on trouve :

$$\frac{\langle E^2 \rangle}{nmv_{th}^2} \propto \frac{1}{(N_c + N_D)} \text{ avec } (N_c + N_D)_{\text{simulation}} \ll (N_D)_{\text{laboratoire}}$$

où N_c : nombre de particules par points grille

N_D : nombre de particules dans la sphère de Debye

Ces fluctuations sont trop importantes pour pouvoir étudier certains problèmes fins tels que l'amortissement Landau. Il nous faut donc définir une autre façon d'initialiser un plasma Maxwellien qui nous permette d'avoir un niveau de bruit numérique inférieur à celui d'un plasma thermique naturel.

VI.2 Exemple d'une distribution "Maxwellienne" : tirage uniforme

Afin d'illustrer l'importance d'une telle répartition spatiale des particules, il est intéressant de regarder l'énergie électrostatique d'un plasma lorsque celui-ci a été réparti de manière uniforme dans l'espace (donc sans tenir compte de l'effet d'écrantage de Debye) et de le comparer à l'énergie électrostatique que possède un plasma réel.

Pour cela, on suppose les ions immobiles et constituant un fond neutralisant et l'on pose une densité électronique de la forme :

$$n(\vec{r}) = \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \text{ où } r_i \text{ est la position de la particule } n^{\circ}i.$$

Dans l'espace de Fourier, cette répartition spatiale donne le spectre en nombre d'ondes :

$$n(\vec{k}) = \frac{1}{L^n} \sum_i e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_i}$$

où n est le nombre de dimension du problème et L la largeur du volume dans lequel le plasma est confiné.

On en déduit la valeur moyenne de la densité

$$\left| n(\vec{k}) \right|^2 = \frac{1}{L^{2n}} \sum_{i,j} e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)} \Rightarrow \left\langle \left| n(\vec{k}) \right|^2 \right\rangle = \frac{N}{L^{2n}} = \frac{n}{L^n}$$

où N nombre total de particule dans la boîte de simulation et n densité de macro-particules par point grille.

On peut relier la densité des électrons aux fluctuations du champ électrostatique à l'aide de l'équation de poisson, on a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -4\pi e(n - n_0) \text{ avec } n_0 \text{ densité des ions}$$

Dans l'espace de Fourier, on obtient $i\vec{k} \cdot \vec{E}_L = -4\pi e n(\vec{k})$, dont le module s'écrit

$$\left| \vec{E}_L \right| = \frac{4\pi e n(\vec{k})}{k^2}, \text{ la densité spectrale associée s'écrit alors après une moyenne d'ensemble}$$

$$\frac{\left\langle \left| \vec{E}_L(\vec{k}) \right|^2 \right\rangle}{8\pi} = \frac{e^2}{2k^2} \frac{n}{L^n} = \frac{m\omega_{pe}^2}{2k^2 L^n} \quad (\text{I})$$

Cette expression est à comparer à la densité d'énergie du champ électrique associée aux mouvements thermiques des particules d'un plasma non magnétisé qui s'écrit :

$$\frac{\left\langle \left| \vec{E}_L(\vec{k}) \right|^2 \right\rangle}{8\pi} = \frac{kT}{2} \frac{1}{(1 + k^2 \lambda_D^2)} \quad (\text{II})$$

Une comparaison des équations I et II montrent que :

(i) les deux expressions ne coïncident que pour les grandes valeurs de k , pour des fluctuations d'échelles plus petites ou comparables à la longueur de Debye. Ces échelles sont à la limite de ce que l'on peut observer dans une simulation particulière d'un plasma non-collisionnel, et ne nous intéresse donc pas.

(ii) aux faibles nombres d'onde (grandes longueurs d'onde), le niveau de fluctuations d'une répartition spatiale uniforme est toujours supérieur à celui d'un plasma de Vlasov.

Une façon de résoudre le problème est de diviser la boîte de simulation en cellule de la taille de la longueur de Debye et de mettre dans chacune d'elles le nombre de particules donnant la quasi-neutralité (avec tirage au sort des vitesses).

Dans ce cas, l'énergie cinétique d'un plasma thermique associée aux petits nombres d'onde k est égale à $\frac{KT}{2}$. Si les particules ont été placées de façon à obtenir la quasi-neutralité dans chaque cellule, l'énergie du champ électrique est nulle pour ces modes. Le plasma se comportant comme un ensemble d'oscillateurs harmoniques d'énergie KT , les particules

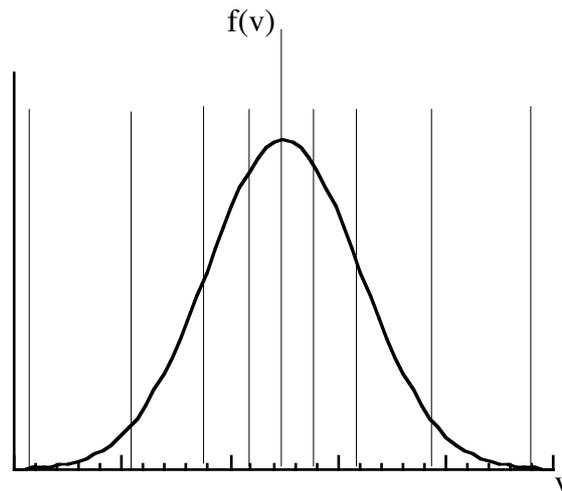
évolueront spontanément pour acquérir une énergie supplémentaire de $\frac{KT}{2}$. Cette procédure produit donc toujours un certain bruit numérique mais reste inférieur à celui de la distribution aléatoire pure.

VI.3 Exemple d'une distribution "Maxwellienne" : le départ calme

Une méthode plus générale consiste à distribuer les particules de manière uniforme et régulière dans l'espace réel et dans l'espace des phases (en x et v_x pour le cas mono-dimensionnel électrostatique). Pour ce faire, on se donne des cellules dans la boîte de simulation dans lesquelles on cherche à obtenir (i) la quasi-neutralité et (ii) approximer une Maxwellienne.

VI.3.1 Répartition spatiale uniforme

Comme exemple, supposons que l'on veuille placer N particules dans chaque cellule de façon à approximer une Maxwellienne. La figure ci-dessous montre une distribution Maxwellienne divisée en zone d'aire égale.



Dans chaque cellule, on met n_1 particules de vitesses v_1 , n_2 de vitesse v_2 etc... tel que l'on ait :

- $n_1+n_2+n_3+...= N$ (où N : nombre total de particules)
- v_1, v_2, \dots décrivant une Maxwellienne complète

On normalise la distribution $P(v)$ tel que $\int P(v)dv = N$ où N est le nombre de particules par cellule. On cherche alors la vitesse v_1 telle que l'on ait

$$n_1 = \int_0^{2v_1} P(v)dv$$

et on place alors ces n_1 particules dans la cellule. On répète cette procédure pour la vitesse v_2

$$n_2 = \int_{2v_1}^{2(v_2 - v_1)} P(v)dv$$

et ainsi de suite jusqu'à balayer toute la distribution. Cette méthode est altérée pour les grandes vitesses car on ne peut intégrer jusqu'aux vitesses infinies, il suffit en fait de choisir une vitesse maximale (coupure) pour la distribution. Le plasma ainsi créé consiste en une multitude de faisceaux (aspect discret de la répartition des particules). Un système tel ordonné laissé à lui-même, évolue vers l'équilibre thermique (accroissement de l'entropie) au bout d'un temps suffisamment long. Le plasma numérique devient donc plus bruité via une instabilité faisceaux-faisceaux. En appliquant la théorie linéaire, on trouve l'équation de dispersion

$$\frac{4\pi e^2}{m} \sum_{\sigma} \frac{N_{\sigma}}{(\omega - kV_{\sigma})^2} = 1$$

On peut alors montrer que pour une telle distribution de faisceaux, la majorité des modes sont instables. Le temps caractéristique au bout duquel l'ensemble du plasma sera thermalisé correspond à 5-10 fois le taux de croissance du mode le plus instable et est donné par la relation :

$$\tau \approx (5 - 10) \times \frac{2\pi}{k\delta v} \frac{1}{\left| \ln \frac{k^2 v_{th} \delta v}{\omega_{pe}^2} \right|}$$

chaque faisceau étant supposé séparé de δv .

Pour des longueurs d'onde de l'ordre de la longueur de Debye ($k\lambda_D \approx 1$) et $\delta v = v_{th}/M$ où M nombres de faisceaux décrivant la distribution maxwellienne, on obtient :

$$\tau \approx (5 - 10) \times \frac{2\pi}{\omega_{pe}} M \frac{1}{\ln M}$$

Pour $M \geq 10$, $\tau \approx 100\omega_{pe}^{-1}$, ce qui est suffisant pour la plupart des problèmes rencontrés en pratique. On voit donc que le bruit numérique ainsi engendré n'a pas le temps de perturber l'évolution physique des plasmas thermiques.

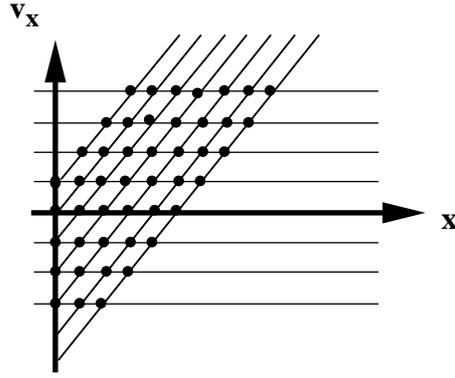
Ce type de procédé conduit à une instabilité numérique qui porte essentiellement sur les faisceaux de forte vitesse de dérive donc sur la queue de la fonction de distribution. On devra donc se cantonner aux problèmes intéressant le coeur de la distribution où $v_{ph} \ll v_{th}$. Il ne pourra donc pas être utilisé afin d'étudier l'amortissement Landau.

VI.3.2 Répartition en vitesses uniformes

Dans ce but, il faut générer une distribution ayant une répartition spatiale uniforme mais avec des densités de charges variant suivant les vitesses. Les quantités q et m , charge et masse respectivement, vont décroître suivant la loi

$$q \propto e^{-\left(\frac{v^2}{2v_{th}^2}\right)} \text{ telle que } \frac{q}{m} = \text{cte.}$$

L'espace des phases peut être illustré par la figure suivante qui montre la répartition des particules en fonction de x et v_x (cas mono-dimensionnel).



Ce type de configuration aboutit aussi à une interaction multi-faisceaux dont les caractéristiques ressemblent au précédent mais avec un niveau de saturation inférieur. A l'inverse du premier, l'instabilité numérique porte sur les faisceaux de faible vitesse (là où la densité est la plus élevée), donc au coeur de la fonction de distribution. Cette répartition permettra donc d'étudier les problèmes physiques où $v_{ph} \gg v_{th}$.

Dans tous les cas, les études numériques effectuées ne peuvent porter que sur des temps caractéristiques, soient très longs, soit très courts devant les temps de thermalisation de ces "plasmas" multi-faisceaux.

Ce type de procédure est généralisable à un plasma en présence d'un champ magnétique mais est beaucoup plus compliqué car il faut introduire en plus une *phase aléatoire* de rotation autour de B.

VII. Importance du numérique sur les phénomènes physiques

Nous avons déjà vu qu'un système constitué de particules ayant une taille finie pouvait modifier de façon notable les équations physiques. Nous allons en voir un exemple dans ce chapitre.

VII.1 Effet de la taille finie sur les équations physiques

Soit ρ_p et j_p la densité et le courant pour un système de particules ponctuelles localisées aux points x' , alors la densité et le courant correspondant aux particules de tailles finies s'écrivent dans un espace mono-dimensionnel:

$$\begin{pmatrix} \rho_c(x,t) \\ j_c(x,t) \end{pmatrix} = \int S(x' - x) \begin{pmatrix} \rho_p(x',t) \\ j_p(x',t) \end{pmatrix} dx'$$

La force de Lorentz se réécrit sous la forme :

$$\vec{F}(x,v,t) = q \int S(x' - x) \left[\vec{E}(x',t) + \vec{v} \times \vec{B}(x',t) \right] dx'$$

On se trouve devant une convolution dont la transformée de Fourier dans l'espace est :

$$\begin{pmatrix} \rho_c(k,t) \\ j_c(k,t) \end{pmatrix} = S(k) \begin{pmatrix} \rho_p(k,t) \\ j_p(k,t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}(k,v,t) = qS(-k) \left[\vec{E}(k,t) + \vec{v} \times \vec{B}(k,t) \right]$$

Effectuer de tels calculs dans l'espace de Fourier a l'avantage de réduire les intégrales à des produits de matrices beaucoup plus rapides à exécuter sur un ordinateur. D'autre part, cela fait apparaître que la théorie plasma peut être réécrit de manière simple en tenant compte de la taille finie des particules. Par exemple, en reportant dans l'équation de Vlasov, après transformation de Fourier (coordonnées spatiales) et de Laplace (coordonnées temporelles), on obtient la constante diélectrique :

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 + \frac{\omega_{pe}^2 |S(k)|^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_o / \partial v}{\omega - kv} dv$$

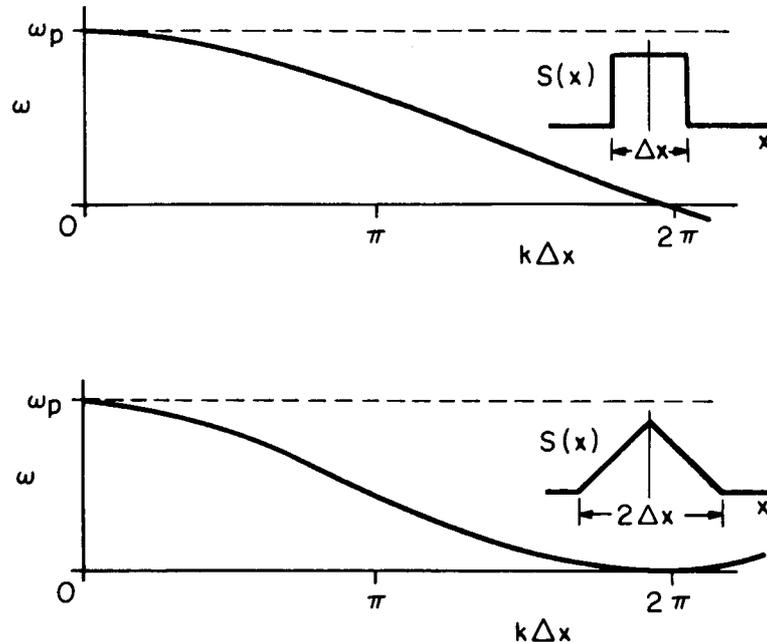
où l'intégrale singulière s'interprète comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_o / \partial v}{\omega - kv} dv = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_o / \partial v}{\omega - kv} dv + i\pi \left(\frac{\partial f_o}{\partial v} \right)_{v=\frac{\omega}{k}}$$

(pour plus de détail se reporter au cours)

Une comparaison avec la constante diélectrique obtenu avec des particules ponctuelles montre que la seule modification consiste à remplacer ω_{pe}^2 par $\omega_{pe}^2 |S(k)|^2$. En fait, on montre qu'il suffit dans toutes les équations plasma de remplacer la charge q par la quantité $qS(k)$ pour décrire parfaitement un plasma de macro-particules.

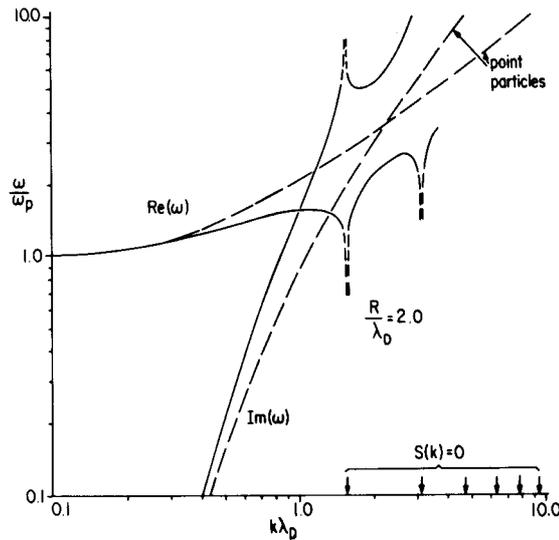
Les modifications observées dans l'évolution de ce plasma vont donc être directement relire à l'expression du facteur de forme choisi pour l'interpolation. La représentation de ces facteurs de forme dans l'espace de Fourier est donnée sur la figure suivante dans le cas mono-dimensionnel



Avec pour valeur analytique, les expressions :

$$S(k) = \int S(x)e^{-ikx} dx \Rightarrow \begin{cases} S(k)_{NGP} = \frac{\sin\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)}{\frac{k\Delta x}{2}} \\ S(k)_{CIC} = \left[\frac{\sin\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)}{\frac{k\Delta x}{2}} \right] \end{cases}$$

Une comparaison des courbes de dispersion d'un plasma maxwellien théorique (traits pleins) et d'un plasma simulé (traits pointillés) est présentée sur la figure ci-dessous. Le modèle choisi utilise l'interpolation NGP, la taille des nuages de charges, est prise égale à $R = 2\lambda_D$. Il est à noter les singularités des solutions lorsque $S(k)=0$. De plus, on observe des résultats discutables dès que $k\lambda_D \sim 1$, autrement dit dès que $k \leq \lambda_D$, c'est-à-dire aux courtes longueurs d'ondes où l'hypothèse d'une particule de taille finie est la plus contraignante pour les résultats physiques.



VII.2 Effet de la grille discrète sur les équations physiques

On peut mettre en évidence les problèmes soulevés par l'utilisation d'une grille discrète en étudiant un cas simple d'interaction faisceau-plasma. Pour un faisceau froid de vitesse v_0 , l'équation de dispersion donne

$$\varepsilon(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - kv_0)^2} = 0$$

On peut alors calculer cette expression en supposant que la grille spatiale est discrète. Cette hypothèse introduit des alias (voir paragraphe IV.1.3) dans l'expression de la force $F(k)$ et du potentiel $\phi(k)$, après calcul on trouve pour l'équation de dispersion, la relation :

$$\varepsilon(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{K^2(k)} \sum_p \frac{k_p \kappa(k_p) S^2(k_p)}{(\omega - k_p v_o)^2} = 0 \text{ avec } k_p = k - \frac{2\pi p}{\Delta x}$$

$$\text{où } K^2(k) = k^2 \left(\frac{\sin \frac{k\Delta x}{2}}{\frac{k\Delta x}{2}} \right)^2 \text{ et } \kappa(k) = \frac{k \sin k\Delta x}{k\Delta x}$$

La présence d'une grille introduit donc *fictivement* une infinité de faisceaux dont l'interaction mutuelle perturbe le système étudié. Sans même résoudre l'équation de dispersion, il est clair qu'il apparaîtra des instabilités non physiques. Afin d'obtenir des résultats vraisemblables, il faudra donc toujours choisir un facteur de forme pour lequel $S(k_p) \approx 0$ pour $p \neq 0$.

VIII. Conclusion

L'introduction qui vient d'être faite ne reflète qu'une partie de la complexité des techniques mises en oeuvre dans la simulation numérique des plasmas. Il est important de comprendre que la modélisation numérique d'un problème n'élimine pas l'effort de réflexion du physicien. Bien au contraire, elle nécessite la conceptualisation du système physique dans ces moindres détails. En d'autres termes, pour simuler un problème, il faut d'abord en avoir compris les prémices ainsi que les conditions d'applicabilités.

D'autre part, il est important de remarquer que les résultats obtenus à l'aide de la simulation devront toujours être critiqués, à la fois si (i) les résultats concordent avec ce que l'on attendait, ou si (ii) les résultats ne concordent pas. Dans les deux cas, le problème persiste de savoir si les résultats obtenus sont le reflêt de phénomènes physiques réels (prévus ou non prévus) ou bien juste la conséquence de calculs numériques non valables. Il sera intéressant dans ces Travaux Pratiques de toujours garder ces remarques à l'esprit lors de l'examen des diagnostics plasmas afin de ne pas faire de lourdes erreurs d'interprétation.

Références :

Cette bibliographie succincte permettra d'approfondir les problèmes soulevés par la simulation numérique en générale et la simulation particulière en particulier. Ces publications font le point sur *l'état de l'art* de la simulation numérique et son utilisation dans la physique moderne.

Ouvrages de référence:

- Plasma Physics via computer simulation, Birdsall, Ch. K. et Langdon, A. B., édité chez McGraw-Hill Book Compagny, **1985**.
- Methods in computational physics (Advances in Research and Applications), édité par B. Alder, S. Fernbach et M. Rotenberg chez Academic Press, New York, **1970**.
- Third International School for Space Simulation: Tutorial courses, édité par B. Lembège chez Cepadues-editions, **1987**.
- Computer simulation using particles, Hockney, R. W. et Eastwood, J. W., édité chez McGraw-Hill International Book Compagny, **1981**.

Publications spécialisées :

- Aldrich, C., H., Particle code simulations with injected particles, *Space Sci. Rev.*, **42**, 131, **1985**.
- Byers, J., A., Cohen, B., I., Condit, W., L., Hanson, J., D., Hybrid simulations of quasi-neutral phenomena in magnetized plasma, *J. Comput. Phys.*, **127**, 363, **1978**.
- Dawson, J., M., One-dimensional plasma model, *Phys. Fluids*, **5**, 445, **1962**.
- Dawson, J., M., Particle simulation of plasmas, *UCLA report*, PPG-618, **1982**.
- Denavit, J. and Kruer, W., L., Comparison of numerical solutions of the Vlasov equation with particle simulations of collisionless plasma, *Phys. Fluids*, **14**, 1782, **1971**
- Dum, C., T., Simulation models for space plasmas and boundary conditions as a key to their design and analysis in *Computer simulation of space plasma* edited by H.,Matsumoto and Sato, pp 303-375, **1984**..
- Kruer, W., L., Dawson, J., M., Rosen, B., The dipole expansion method for plasma simulation, *J. Comp. Phys.*, **13**, 114, **1973**.
- Langdon, A., B. and Dawson, C., K., Theory of plasma simulation using finite-size particles, *Phys. Fluids*, **13**, 2125, **1970**.
- Langdon, A., B. and Lasinski, B., F., Electromagnetic and relativistic plasma simulation models in *Methods of computational physics* edited by B. Adler et Al., **16**, pp 327-366, Academic press, New York, **1976**.
- Okuda, H. and Birdsall, C., K., Collisions in a plasma of finite-size particles, *Phys. Fluids*, **13**, 2123, **1970**.
- Okuda, H., Verification of theory for plasma of finite-size particles, *Phys. Fluids*, **15**, 1268, **1972**.
- Okuda, H., Nonphysical noises and instabilities in plasma simulation due to a spatial grid, *J. Comput. Phys.*, **10**, 475, **1972**.

Projet n°1 : Domaines de validité d'une simulation particulière

Le code numérique utilisé, **ES1**, est un code électrostatique. On étudie le comportement collectif d'un plasma froid, non collisionnel à une dimension dans une boîte de longueur L . On s'intéresse à des plasmas de grandes dimensions devant λ_{De} (longueur de Debye : $L \gg \lambda_{De}$). Les paramètres d'entrée du code sont explicités en **Annexe n°1**.

Dans un premier temps, on s'intéresse aux domaines de validité de ce type de simulation. Pour ce faire, on étudie un plasma froid que l'on perturbe à l'aide d'une onde électrostatique stationnaire de la forme $\delta(x) = x_1 \cos(kx + \varphi)$. Cette onde est imposée au plasma à chaque pas de temps Δt et se concrétise par un déplacement $\delta(x)$ de l'ensemble des particules dans la boîte de simulation.

I. Compréhension des résultats numériques

Afin de se familiariser avec les paramètres numériques et les paramètres plasma utilisés durant ces simulations, il est intéressant d'étudier le cas le plus simple, celui d'un plasma froid au repos. En prenant pour valeurs initiales les valeurs ci-dessous, étudier la dynamique du plasma à l'aide des diagnostics à votre disposition (voir **Annexe n°2**).

```
nsp-----l-----dt-----nt-----mmax-----l/a
1      6.283185307  0.2      150      14      0
ng----iw----epsi-----a1-----a2-----E0-----w0
128   2   1.00   0.00  0.00      0      0
n----nv2---nlg---mode
256   0   1     1
wp----wc-----qm-----vt1----vt2---v0
1.00  0.00 -1.00   0.00  0.00  0.00
x1----v1---thetax--theta
0.001 0.0  0.00  0.00
n----nv2---nlg---mode
64    0   1     1
wp----wc-----qm-----vt1----vt2---v0
1.00  0.00 -1.00   0.00  0.00  0.00
x1----v1---thetax--theta
0.001 0.0  0.00  0.00
```

En particulier, il sera intéressant d'étudier l'évolution de la densité ainsi que le diagramme d'énergie du champ électrique en fonction du temps. Qu'observe-t-on ? En déduire la fréquence des oscillations et la comparer à la fréquence plasma. Interpréter.

En général, étudier le comportement physique d'un plasma froid sous l'action d'une faible perturbation.

II. Effets de discrétisation temporelle

Partant des conditions initiales précédentes, étudier l'évolution de la fréquence plasma en fonction de Δt . Mettre en évidence l'écart entre la fréquence d'oscillation observée ω et ω_p lorsque Δt augmente. Vérifier la formule théorique donnant cet écart. Représenter sur un schéma les deux courbes et discuter les écarts observés. Qu'obtient-on lorsque la valeur Δt dépasse la valeur critique théorique ? Vérifier la limite à ne pas dépasser.

III. Effets de discrétisation spatiale

Afin d'illustrer les limitations numériques dues à l'existence d'une grille spatiale discrète, étudier le comportement du plasma sous l'action de l'onde électrostatique stationnaire.

III.1 Effet d'aliasing

Reprendre le cas $\Delta t = 0.2$ du **I.**, la fréquence ω dépend-elle du nombre d'onde k ? En faisant varier ce paramètre, que peut-on illustrer ? Représenter les variations de la fréquence ω avec le vecteur d'onde k . Observe-t-on le même type d'évolution que précédemment ? Existe-t-il une limitation théorique d'échantillonnage ? Mettre en évidence le comportement du plasma sous l'action de cette onde.

III.2 Effet de déferlement

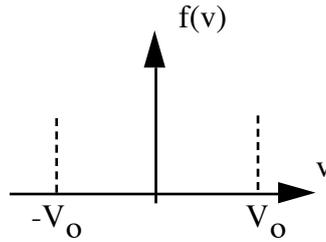
En choisissant une onde électrostatique de grande amplitude (paramètre x_1) mettre en évidence l'apparition d'effets non-linéaires du type déferlement. Comment peut-on interpréter le résultat obtenu ? En quoi le comportement du plasma est-il modifié ? Déterminer théoriquement la valeur maximale de x_1 pour laquelle apparaît le phénomène de déferlement.

Projet n° 2 : Etude d'un cas physique : l'interaction double faisceaux

Afin d'illustrer la puissance de la simulation numérique, on se propose d'étudier les modes électrostatiques engendrés par un système mono-dimensionnel constitué de deux faisceaux d'électrons froids, de densité n_0^1 et n_0^2 et de vitesse de dérive V_0^1 et V_0^2 . La neutralité du plasma est assurée par un fond continu d'ions froids et lourds.

I. Approche théorique

On étudie la configuration suivante :



En prenant une perturbation d'ordre 1, on a respectivement :

$$\begin{cases} n^1 = n_o^1 + n_1^1 \\ n^2 = n_o^2 + n_1^2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} V^1 = V_o^1 + V_1^1 \\ V^2 = V_o^2 + V_1^2 \end{cases}$$

Après linéarisation, on trouve l'équation de dispersion :

$$\frac{(\omega_p^1)^2}{(\omega - kV_o^1)^2} + \frac{(\omega_p^2)^2}{(\omega - kV_o^2)^2} = 1 \text{ avec } \omega_p^{1,2} = \left(\frac{q_e^{1,2} n_o^{1,2}}{\epsilon_o m_e} \right)^{1/2}$$

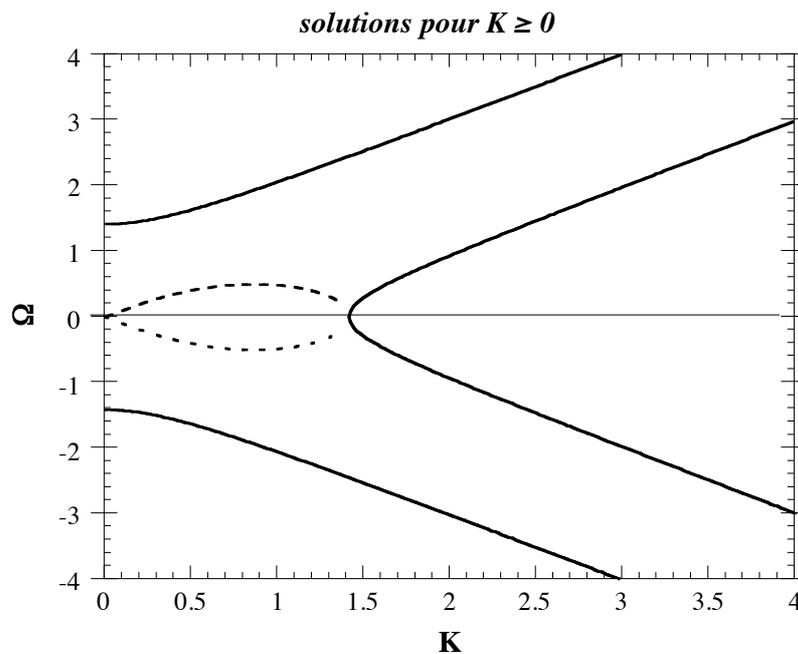
Pour de plus amples détails concernant l'interaction double faisceaux se reporter à l'étude théorique du cours. Si on suppose $n_o^1 = n_o^2 = n_o$ et $V_o^1 = -V_o^2 = V_o$, l'équation de dispersion peut se réécrire sous la forme

$$\frac{1}{(\Omega - K)^2} + \frac{1}{(\Omega + K)^2} = 1 \text{ avec } K = \frac{kV_o}{\omega_p} \text{ et } \Omega = \frac{\omega}{\omega_p}$$

Cette équation bi-carrée à coefficients réels est de degré deux en Ω^2 . Elle possède quatre solutions opposées deux à deux.

- si $K \geq \sqrt{2}$ --> solutions réelles et opposées deux à deux.
- si $K \leq \sqrt{2}$ --> deux solutions réelles et deux solutions imaginaires pures, opposées

La figure ci-dessous représente ces solutions pour $K \leq 4$.



Solutions de l'équation de dispersion du système constitué de deux faisceaux d'électrons de même densité et de vitesse opposée. Les traits continus représentent les solutions réelles et les pointillés les solutions imaginaires pures. Le diagramme est symétrique pour $K < 0$.

II. Approche numérique

Déterminer un jeu de paramètres permettant d'étudier l'interaction double-faisceaux. On étudiera les deux cas séparément, $K \leq \sqrt{2}$ et $K \geq \sqrt{2}$:

II.1 Cas $K \leq \sqrt{2}$

Dans ce cas, l'équation de dispersion $\Omega(K) = 0$ possède deux racines réelles opposées et deux solutions imaginaires pures conjuguées. Montrer, en calculant le produit $\rho_K \Phi_K^*$, que l'énergie du champ électrique peut s'écrire sous la forme :

$$W_E(t) \propto (\cos 2\omega t + 2e^{-\gamma t} \cos \omega t + e^{-2\gamma t})$$

Tracer le diagramme (Ω, K) . Pour cela on effectuera une série de simulations pour différentes valeurs de K ($K \leq 2$). Déterminer les paramètres pertinents pour une telle étude. On étudiera la solution réelle en analysant les oscillations sinusoïdales de l'énergie du champ électrique.

II.2 Cas $K \geq \sqrt{2}$

Dans ce cas, les diagrammes d'énergie sont plus complexes et montrent 4 racines réelles (deux à deux opposées), on pose $\omega_1 = \Omega_1 = -\Omega_2$ et $\omega_2 = \Omega_3 = -\Omega_4$. Montrer que dans ce cas, on peut obtenir l'énergie électrique sous la forme :

$$W_E(t) \propto (a + b \cos 2\omega_1 t + c \cos 2\omega_2 t + d \cos(\omega_1 - \omega_2)t + e \cos(\omega_1 + \omega_2)t)$$

où a, b, c, d, e sont des constantes dépendant de l'amplitude des champs électriques. On se contentera d'étudier les cas très proches de $\sqrt{2}$, de façon à ce que les racines soient bien séparées.

II.3 Description physique

Expliquer les phénomènes physiques se déroulant dans la boîte de simulation à l'aide des différents diagnostics à votre disposition. En regardant le diagramme énergie-temps déterminer la zone caractérisant les phénomènes linéaires et non-linéaires. Quelle zone est correctement décrit par la théorie ? Pour quelles raisons ?

Projet n° 3 : Etude d'un cas physique : amortissement Landau

La théorie cinétique prévoit qu'une onde électrostatique peut être amortie dans un plasma thermique non-collisionnel. Afin d'étudier l'amortissement Landau, on considère une seule espèce de particule, les électrons du plasma (les ions étant supposés immobiles créant un fond neutralisant). Le plasma est alors perturbé par une onde électrostatique du type $\delta(x) = x_1 \cos(kx + \varphi)$.

I. Aspect théorique

L'amortissement Landau est un mécanisme d'amortissement linéaire dans un milieu non dissipatif. Une onde longitudinale ne peut se propager sans s'amortir brutalement que lorsque sa vitesse de phase v_{ph} est très supérieure à la vitesse thermique du plasma. Cette condition est réalisée dans la queue de la fonction de distribution Maxwellienne. La constante diélectrique d'un plasma maxwellien s'écrit sous la forme :

$$\varepsilon_1(\omega, k) = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \hat{f}_0 / \partial v}{\left(v - \frac{\omega}{k}\right)} dv$$

On s'intéresse aux ondes faiblement amorties ou amplifiées correspondant à la condition $|\omega_i(k_r)| \ll |\omega_r(k_r)|$. En écrivant les équations linéarisées du système onde-plasma, on obtient la constante diélectrique $D(\omega, k)$ complexe suivante :

$$\varepsilon_1(\omega, k) = D_r(\omega_r, k) + iD_i(\omega_r, k) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} P \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \hat{f}_0 / \partial v}{\left(v - \frac{\omega}{k}\right)} dv \right\} - i \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \pi \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \Bigg|_{v=\frac{\omega}{k}}$$

Avec les relations

$$\begin{cases} D_r(\omega_r, k) = 0 \\ \omega_i \approx - \frac{D_i(\omega_r, k)}{\frac{\partial D_r(\omega_r, k)}{\partial \omega}} \approx \pi \omega_r \frac{\omega_{pe}^2}{2k^2} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v} \Bigg|_{v=\frac{\omega}{k}} \end{cases}$$

Dans le cas d'une distribution Maxwellienne, on trouve le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \omega_r \Big|_{\text{Bohm et Gross}} = \omega_{pe} \left[1 + \frac{3}{2} k^2 v_{th}^2 \right] \\ \omega_i \Big|_{\text{Landau}} = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{e^{-3/2}}{v_{th}^2 k^3} \omega_{pe}^2 e^{-\frac{\omega_{pe}^2}{2k^2 v_{th}^2}} \end{cases}$$

Le paragraphe III. montre les valeurs obtenues pour cette équation de dispersion sans approximation (équations de Fried et Conte) et avec approximation (équation de Bohm et Gross et de Landau).

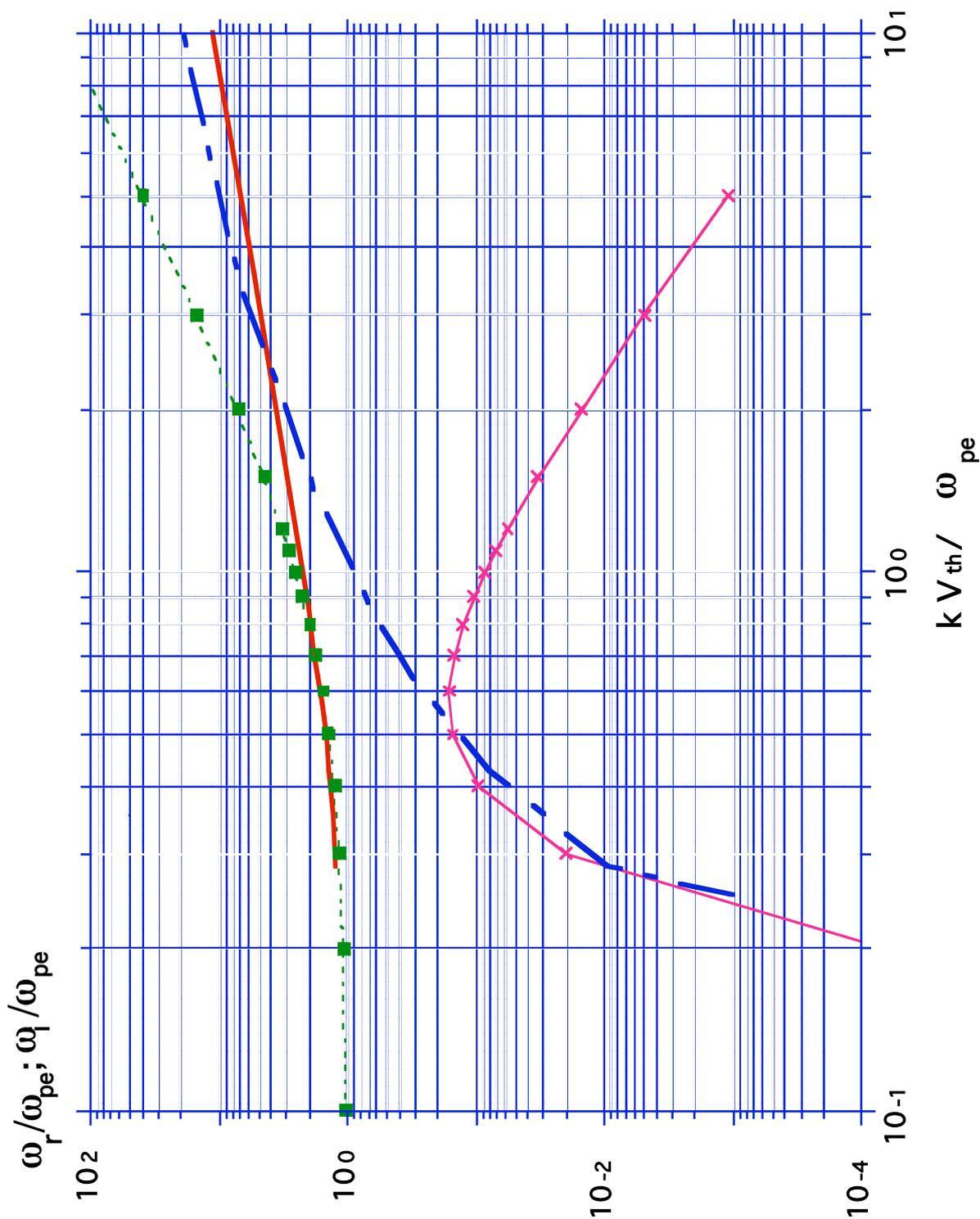
II. Aspect numérique

Cette étude nécessite une simulation fine des effets cinétiques du plasma. On prendra soin d'initialiser le plasma thermique avec le "*départ calme*". En quoi ces équations de dispersion sont-elles modifiées lorsqu'on utilise des particules de taille finie ? Montrer que ces modifications peuvent être négligées par un choix judicieux de conditions initiales. Vérifier que l'on se trouve dans le domaine de validité de la simulation. Calculer les fréquences réelles et imaginaires, ω_r et ω_i , en faisant varier la vitesse thermique. Qu'observe-t-on lorsque la condition $v_{th} \ll v_{\phi}$ n'est plus vérifié ? Conclusion.

III. Equations de dispersion : avec et sans approximation

Fried et Conte

ω_r ——— numérique - - - ■ - - Bohm & Gross
 ——— numérique ——— × ——— formule Landau



Projet n° 4 : Etude d'un cas physique : interaction faisceau-plasma

On étudie ici un autre aspect de l'effet Landau, i.e. non plus l'amortissement mais l'amplification. Nous cherchons donc une configuration où ω_i est positif (condition d'instabilité). ω_i est proportionnel à la pente de la distribution électronique du plasma à la vitesse de phase de l'onde.

On se place dans le cas de l'interaction d'un faisceau thermique ($v_{thf} \neq 0$) et d'un plasma ($v_{thp} \neq 0$) tel que l'on a :

(i) un plasma maxwellien de densité n_p , de vitesse thermique v_{thp} et de vitesse de dérive nulle

(ii) un faisceau d'électrons également maxwellien, de densité n_f , de vitesse thermique v_{thf} et de vitesse de dérive v_o

On se place dans les conditions
$$\begin{cases} v_{thp} \ll v_\phi \ll v_o \\ n_f \ll n_p \end{cases}$$

Un développement de l'équation de dispersion à l'ordre zéro, nous donne

$$\begin{cases} \omega_r \approx \omega_{p_p} \\ \omega_i \approx \frac{\pi}{2} \frac{\omega_{p_p}^2}{k^2} \omega_{p_p} \left. \frac{\partial \hat{f}_f}{\partial v} \right|_{v=\frac{\omega}{k}} \end{cases}$$

où $f_f(v)$ est la fonction de distribution représentant le faisceau. On remarque qu'à l'ordre zéro, le plasma peut être considéré comme froid et le faisceau comme chaud. On se trouve dans le cas d'une instabilité cinétique.

La population du faisceau doit être très inférieure à celle du plasma, pourquoi ? Etudier l'évolution temporelle de la fonction de distribution des électrons, qu'observe-t-on ?

Pour mettre en évidence l'instabilité la plus forte, nous nous placerons au point d'inflexion de la distribution des électrons du faisceau, à savoir pour $\frac{\omega}{k} = V_o - V_{the}$. Déterminer un jeu de paramètres permettant l'étude de l'instabilité Landau.

Annexe n°1 : Paramètres d'entrée du programme ES1

Les paramètres indispensables au fonctionnement du programme peuvent être séparés en deux groupes distincts:

I. Paramètres globaux à la simulation

L	Longueur du système
NSP	nombre d'espèce (1 ou 2)
DT	pas de temps d'intégration
NT	nombre total de pas de temps
NG	nombre total de point grille (doit être une puissance de 2)
IW	facteur de pondération utilisé - 1 : ordre zéro <i>NGP</i> - 2 : premier ordre <i>PIC</i> ou <i>CIC</i>
EPSI	rapport $1/\epsilon_0$ (usuellement égal à 1)
A1	facteur de compensation (A1 = 0 signifie aucune compensation)
A2	facteur de lissage (A2 = 0 signifie aucun lissage)
MMAX	nombre maximum de modes électrostatiques mémorisés et donc visibles dans les diagnostics. Il est à noter que ce paramètre n'a aucune incidence sur les calculs.

(Le programme a les limitations suivantes : $nt \leq 3000$, $nsp \leq 2$, $ng \leq 256$)

II. Paramètres liés à chaque espèce

N	nombre de particule (par espèce)
WP	fréquence plasma (toujours positive)
WC	fréquence cyclotronique (positive/négative dépend de la charge)
QM	rapport de masse (dépend de la charge)
VT1	génère une distribution gaussienne centrée sur V0
VT2	génère une distribution gaussienne centrée sur V0 (par la méthode " <i>départ calme</i> ")
NLG	nombre de sous-groupe ayant la même vitesse (usuellement 1)
NV2	exposant de la distribution gaussienne liée au " <i>départ calme</i> " $f(v) = \left(\frac{v}{VT2}\right)^{NV2} \exp\left(-\frac{v^2}{2(VT2)^2}\right)$ (usuellement 0)
V0	vitesse de dérive du plasma dans la direction x (peut être positive ou négative)
MODE	nombre de mode donnée à la perturbation initiale en x et en v_x
X1	amplitude de la perturbation en x tel que l'on a $\delta x = X1 \cos\left(\frac{2\pi x MODE}{L} + \varphi_x\right)$
V1	amplitude de la perturbation en v_x tel que l'on a $\delta v = V1 \sin\left(\frac{2\pi x MODE}{L} + \varphi_v\right)$
THETAX	φ_x
THETAV	φ_v